

CT 扇形束滤波反投影图像重建算法优化

马晨欣 胡君杰* 闫 镔

(解放军信息工程大学信息工程学院, 河南 郑州 450002)

摘要 基于等距扇形束滤波反投影(FBP)算法推导了一种新的算法——求导-希尔伯特反投影(DHB)算法,研究了 DHB 算法在频域对投影的滤波特性。通过理论分析和实验验证,指出由于 DHB 滤波函数在高频段对于锐截止特性的改善,很大程度上消除了重建图像的抖动现象。并且算法中去掉了反投影算子中的距离加权运算,使计算速度进一步提高。

关键词 成像系统; X 射线光学; CT 扇形束重建; 差分滤波; 希尔伯特变换

中图分类号 O434.19 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/LOP49.091103

Optimization of Fan-Beam CT Filtered Backprojection Reconstruction Algorithm

Ma Chenxin Hu Junjie Yan Bin

(College of Information Engineering, PLA Institute of Information Engineering,
Zhengzhou, He'nan 450002, China)

Abstract A derivation Hilbert backprojection (DHB) reconstruction algorithm based on the filtered backprojection (FBP) algorithm in equispaced fan-beam CT is proposed and realized. Because of the improvement of sharp cut-off characteristic of DHB filtering function in high frequency, the experimental result shows that the reconstructed image using DHB is smoother than that using FBP. Simultaneously, the distance weighting in backprojection operator is got rid of, which leads to the reduction in reconstruction time.

Key words imaging system; X-ray optics; CT fan-beam reconstruction; difference filtering; Hilbert transform

OCIS codes 110.6960; 340.7440

1 引言

CT 图像重建是图像处理中一个重要研究分支,其意义在于获取被检测物体内部结构的图像而不对物体造成任何物理上的损伤。重建算法的好坏直接关系到重建图像的好坏、重建速度以及抗干扰能力,是整个 CT 处理过程中的重点和难点^[1]。重建算法根据图像求解的不同出发点分为解析类^[2]和代数类^[3]。代数类算法由于运算时间长与存储资源占用严重而影响了它在现实中的应用。解析类的基本思想是将扫描系统中的光源、探测器及被测物体放在一个几何空间当中进行建模,以傅里叶中心切片定理为理论依据^[4],将探测器线阵或面阵上经过行滤波的投影反投影到点源的空间位置上去,该类算法由于其极具理论性而被广泛应用。目前,无论在医用还是工业用 CT 中所采用的重建算法绝大多数属于解析类中的滤波反投影(FBP)算法,它的基本步骤是滤波加反投影。将平行束重建算法中的滤波函数进行分解变换,就出现了一种新的算法:求导-希尔伯特反投影(DHB)算法^[5]。由于希尔伯特变换和反投影都是局部算法,在处理截断的投影数据时有着重要的应用^[6]。而扇形束 FBP 重建算法却不能直接写出求导、希尔伯特变换的形式。文献[6,7]中都给出了等角扇束中利用求导和希尔伯特变换来重建图像的算法。本文在 Radon 反演公式和文献[1]的基础上,通过平行光束到等距扇束的变量替换推导出了等距扇束 DHB 算法,并在计算机上进行算法实现,通过和 FBP 算法的对比研究后发现,DHB 算法由于在滤波函数方面的改进,以及去掉了反投影算子中的距离加权,具有更好的重建效果和更少的重建时间。

收稿日期: 2012-04-23; 收到修改稿日期: 2012-06-16; 网络出版日期: 2012-07-20

作者简介: 马晨欣(1972—),女,博士,讲师,主要从事信号处理与成像技术等方面的研究。

* 通信联系人。E-mail: plahjj@sohu.com

2 等距扇形束 DHB 算法推导

2.1 Radon 反变换

将斜坡滤波函数 $|\omega|$ 作分解:

$$|\omega| = j2\pi\omega \left[\frac{1}{2\pi} (-j \operatorname{sgn} \omega) \right]. \quad (1)$$

已知,

$$\mathcal{F}^{-1}[j2\pi\omega S_\theta(\omega)] = \frac{\partial P_\theta(t)}{\partial t}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{-j}{2\pi} \operatorname{sgn} \omega\right) = \frac{1}{2\pi^2 t}, \quad (2)$$

那么滤波后的投影可以重写为

$$q_\theta(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\pi t} \cdot \frac{\partial P_\theta(t)}{\partial t} \right] = \frac{1}{2\pi} H \left[\frac{\partial P_\theta(t)}{\partial t} \right], \quad (3)$$

式中 H 为希尔伯特变换, 则可获得极坐标平面上的平行束重建公式:

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial P_\theta(t)}{\partial t} \frac{1}{2\pi^2 [r \cos(\theta - \varphi) - t]} dt d\theta. \quad (4)$$

(4)式即为 Radon 反变换^[8], 因其运算顺序为求导、希尔伯特变换和反投影, 又被称为 DHB 算法。对投影求导是获取信号的变换信息, 而希尔伯特变换相当于一种特殊的滤波^[9], 滤波后频谱幅度保持不变, 实部、虚部互换, 相位根据频率符号改变正或负的 $\pi/2$ 。

2.2 等距扇形束 DHB 算法公式推导

图 1 为等距扇束扫描几何结构图。扇形束内过点 $f(r, \varphi)$ 的射线 SA 可以由 (β, s) 唯一确定, β 是扇束中轴线与 y 轴的夹角, s 是射线 SA 在虚拟探测器上的投影位置。已知等距扇束重建公式为

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{D}{D + r \sin(\beta - \varphi)} \right]^2 \int_{-s_m}^{s_m} R_\beta(s) h(s' - s) \times \frac{D}{\sqrt{D^2 + s^2}} ds d\beta. \quad (5)$$

该 FBP 算式的运算步骤为: 投影加权、斜坡滤波、距离加权和反投影。因为点源的反投影算子中包含一个距离加权函数, 不具备平行束反投影时的移不变特性, 且运算复杂度有所增加, 对重建速度势必造成影响。本文在扇束 FBP 算式基础上按照平行 DHB 算法在频域内拆分滤波函数的思路, 并将所有扇形束中射线进行分组, 使每一条射线都分属于某一个平行束, 然后采用变量替代和算式变换, 去掉依赖距离的权函数从而推导出扇束投影的 DHB 算式。

当将一条射线看做位于一个平行束内时, 它的位置参数为 (θ, t) , θ 是 SA 法线与 x 轴的夹角, 也是该平行束的旋转角, t 是 SA 到旋转中心的距离。两组参数有如下关系:

$$\theta = \beta + \arctan \frac{s}{D}, \quad t = \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}}, \quad (6)$$

那么每个角度下投影对探测器位置求偏导为

$$\frac{\partial p(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial g(\beta, s)}{\partial s} \frac{(D^2 + s^2)^{3/2}}{D^3}. \quad (7)$$

根据雅可比行列式求出

$$dt d\theta = \frac{D^3}{(D^2 + s^2)^{3/2}} ds d\beta. \quad (8)$$

为了便于表达, 简化算式, 引入两个新的变量:

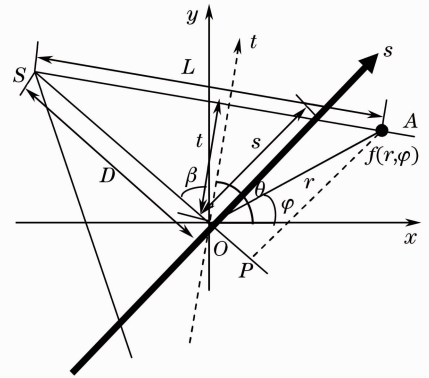


图 1 等距扇束扫描几何结构图

Fig. 1 Scanning geometry of equispaced fan-beam

本文在扇束 FBP 算式基础上按照平行 DHB 算法在频域内拆分滤波函数的思路, 并将所有扇形束中射线进行分组, 使每一条射线都分属于某一个平行束, 然后采用变量替代和算式变换, 去掉依赖距离的权函数从而推导出扇束投影的 DHB 算式。

当将一条射线看做位于一个平行束内时, 它的位置参数为 (θ, t) , θ 是 SA 法线与 x 轴的夹角, 也是该平行束的旋转角, t 是 SA 到旋转中心的距离。两组参数有如下关系:

$$\theta = \beta + \arctan \frac{s}{D}, \quad t = \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}}, \quad (6)$$

那么每个角度下投影对探测器位置求偏导为

$$\frac{\partial p(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial g(\beta, s)}{\partial s} \frac{(D^2 + s^2)^{3/2}}{D^3}. \quad (7)$$

根据雅可比行列式求出

$$dt d\theta = \frac{D^3}{(D^2 + s^2)^{3/2}} ds d\beta. \quad (8)$$

为了便于表达, 简化算式, 引入两个新的变量:

$$\begin{cases} U(r, \varphi, \beta) = \frac{\overline{SO} + \overline{OP}}{D} = \frac{D + r \sin(\beta - \varphi)}{D}, \\ \frac{s'}{\overline{SO}} = \frac{\overline{EP}}{\overline{SP}}, \quad s' = D \frac{r \cos(\beta - \varphi)}{D + r \sin(\beta - \varphi)} \end{cases} \quad (9)$$

现在对希尔伯特变换部分做变量替换:

$$\frac{1}{r \cos(\theta - \varphi) - t} = \frac{1}{r \cos\left(\beta + \arctan \frac{s}{D} - \varphi\right) - \frac{Ds}{\sqrt{D^2 + s^2}}} = \frac{\sqrt{D^2 + s^2}}{UD} \frac{1}{(s' - s)}. \quad (10)$$

若设一个新的参数 L 为光源焦点到重建点的距离, 且有比例关系

$$U = \frac{L}{\sqrt{D^2 + s^2}}, \quad (11)$$

将其代入平行束 DHB 公式

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-s_m}^{s_m} \frac{D^2 + s^2}{DL} \frac{\partial g(\beta, s)}{\partial s} \frac{1}{2\pi(s' - s)} ds d\beta. \quad (12)$$

此时 L 是一个关于 (r, φ, β) 的变量, 求解 L 势必要增加计算开销, 且当 L 较小时, 使算法变得很不稳定, 应该设法将其去掉。

如图 2 所示, 弦 $S_1 S_2$ 是光源焦点在 S_1 处通过重建点的射线, 而弦 $S_2 S_1$ 是光源焦点在 S_2 处通过重建点的射线, 两条射线的位置具有关系:

$$\gamma_2 = -\gamma_1, \quad \beta_2 = \beta_1 + 2\gamma_1 + \pi, \quad (13)$$

它们所产生的投影互为冗余。重建点 $f(r, \varphi)$ 对于两条射线的投影值所做的贡献与它距离光源焦点的长度有关, 在此引入比例因子

$$\omega(\gamma, \beta, r, \varphi) = \frac{L}{2D \cos \gamma}, \quad \cos \gamma = \frac{D}{\sqrt{D^2 + s^2}}. \quad (14)$$

显然,

$$\omega_1(\gamma_1, \beta_1, r, \varphi) + \omega_2(\gamma_2, \beta_2, r, \varphi) = 1 \quad (15)$$

将比例因子代入, 得到扇形束的 DHB 重建算式

$$\begin{aligned} f(\gamma, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-s_m}^{s_m} \left[\frac{\omega_1(\gamma_1, \beta_1, r, \varphi)}{L_1} + \frac{\omega_2(\gamma_2, \beta_2, r, \varphi)}{L_2} \right] \frac{D^2 + s^2}{D} \frac{\partial g(\beta, s)}{\partial s} \frac{1}{2\pi(s' - s)} ds d\beta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-s_m}^{s_m} \left(\frac{1}{2D \cos \gamma_1} + \frac{1}{2D \cos \gamma_2} \right) \frac{D^2 + s^2}{D} \frac{\partial g(\beta, s)}{\partial s} \frac{1}{2\pi(s' - s)} ds d\beta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-s_m}^{s_m} \left(\frac{\sqrt{D^2 + s^2}}{D} \right)^3 \frac{\partial g(\beta, s)}{\partial s} \frac{1}{2\pi(s' - s)} ds d\beta. \end{aligned} \quad (16)$$

3 DHB 算法中的滤波

由单位间隔排列的探测器单元接收的投影是一个离散序列, 算法中对连续投影的求导在实际实现时转换为有限差分运算, 如果令后向差分 $G(k) = P(k) - P(k-1), k = 1, \dots, M$, 则投影经过差分运算的信号频谱变为

$$\tilde{S}_{\text{back-diff}}(m) = \sum_{k=1}^M [P(k) - P(k-1)] \exp[-j 2\pi k(m/M)] = \sum_{k=1}^M P(k) \exp[-j 2\pi k(m/M)] -$$

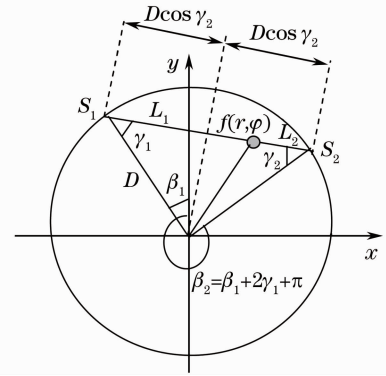


图 2 光源位于两个不同位置时的两条重合射线
Fig. 2 Two overlapped X-rays when source is located in two different places

$$\sum_{k=1}^M P(k-1) \exp[-j2\pi k(m/M)] = S(m) - S(m) \exp(-j2\pi m/M) = S(m)[1 - \exp(-j2\pi m/M)] = S(m)H_{\text{back-diff}}(m), \quad (17)$$

可知经过后向有限差分后,初始投影在变换域被乘上一个 $H_{\text{back-diff}} = 1 - \exp(-j2\pi m/M)$ 的函数。

有限差分运算在变换域使幅值放大 $2\sin \pi|\omega|$ 倍,具有抑制直流、衰减低频、放大高频的作用,在这里将该操作称为差分滤波。滤波后的信号实部和虚部分别是:

$$\begin{cases} \text{Re } \tilde{S}(\omega) = \text{Re } S(\omega)(1 - \cos 2\pi\omega) - \text{Im } S(\omega) \sin 2\pi\omega \\ \text{Im } \tilde{S}(\omega) = \text{Im } S(\omega)(1 - \cos 2\pi\omega) + \text{Re } S(\omega) \sin 2\pi\omega \end{cases}, \quad (18)$$

其中 $\omega = m/M$ 。由于 $P(k)$ 是实信号,则它的频域信号具有 Hermitian 性质^[10],由三角函数的奇偶对称性可知差分信号仍然具有 Hermitian 性质。有限差分的传递函数如图 3 所示。

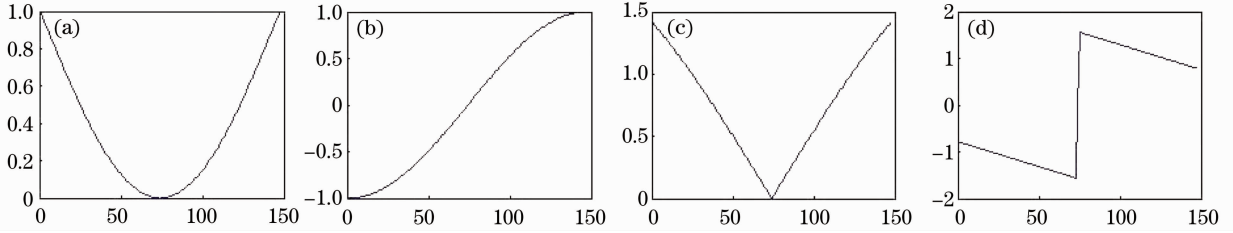


图 3 有限差分的传递函数。(a)实部;(b)虚部;(c)模;(d)相位

Fig. 3 Transfer function of finite difference. (a) Real part; (b) imaginary part; (c) amplitude; (d) phase angle

将差分信号做希尔伯特变换:

$$\tilde{S}(m) = S(m)H_{\text{back-diff}}(m)H_{\text{Hilbert}}(m) = S(m)[1 - \exp(-j2\pi m/M)](-j \text{sgn } m). \quad (19)$$

希尔伯特变换对于信号的放大没有改变,仅使在差分运算时发生了倒相的负频率再一次倒相,保证最终滤波信号与原始投影信号相位一致,同时使奇对称的虚部变换成偶对称的实部,偶对称的实部变换成奇对称的虚部,将差分运算中互换的虚实部交换过来,变换后仍然保留 Hermitian 性,保证了反变换后的信号是实的差分-希尔伯特变换的传递函数如图 4 所示。但是 DHB 滤波中的有限差分运算使滤波函数呈现低频段近似线性放大、高频段相对压低特性,从而区别于 FBP 中斜坡滤波的线性放大。

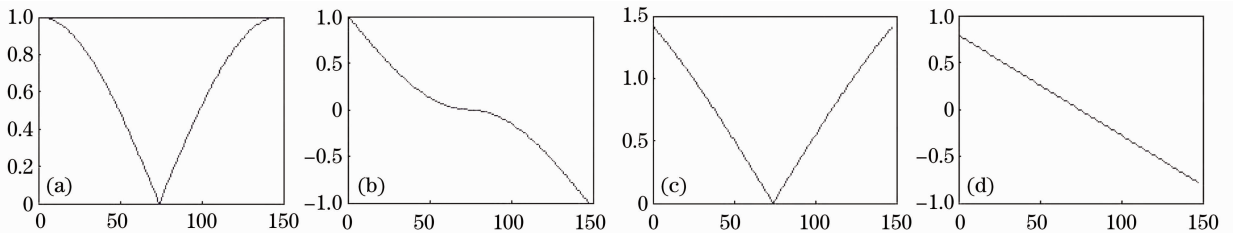


图 4 差分+希尔伯特变换的传递函数。(a)实部;(b)虚部;(c)模;(d)相位

Fig. 4 Transfer function of difference combined with Hilbert transform. (a) Real part; (b) imaginary part; (c) amplitude; (d) phase angle

4 实验结果

首先在计算机上利用 Matlab 软件的 Fan-beam 模拟扇束投影函数对像素点为 200×200 ($N=200$) 的 Shepp-Logan 头模产生 287×360 个等距扇形束投影,然后分别采用扇束的 FBP 算法和 DHB 算法来重建头模图像。需要注意的是,在做完差分后,投影矩阵会减少一行,因此在希尔伯特变换之前需要做补 0 处理,若后向差分 $G(k) = P(k) - P(k-1)$,需在第一行补 0,若作前向差分 $G(k) = P(k+1) - P(k)$,需在最末一行补 0,那么会得到反向的有限差分传递函数,此时需要注意对结果取反。

重建结果如图 5 所示,从直观上来看 DHB 重建结果更接近原图。为了更清晰地看清结果之间的区别,取白色矩形框部分进行放大,因为准确地重建这一部分无论对算法的空间分辨率还是对密度分辨率的要求都非常高。结果如图 6 所示,可以看出 DHB 算法重建的结果较 FBP 的重建结果更加清晰。

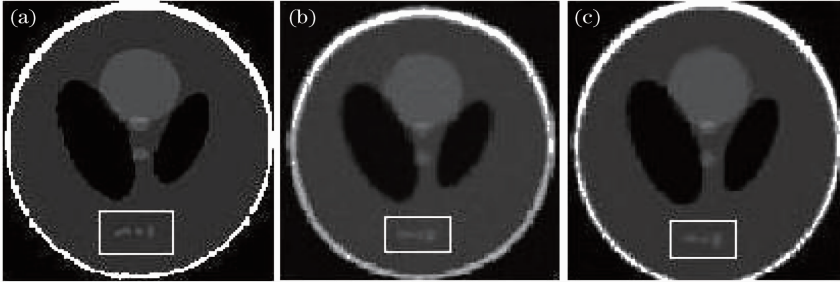


图 5 重建结果对比图。(a)原图;(b)扇束 FBP 重建结果;(c)扇束 DHB 重建对比

Fig. 5 Comparison of reconstruction results. (a) Original image; (b) reconstruction by fan-beam FBP; (c) reconstruction by fan-beam DHB

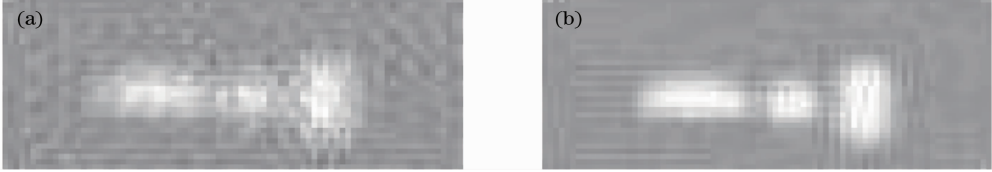


图 6 局部重建结果对比图。(a)扇束 FBP 局部重建结果;(b)扇束 DHB 局部重建结果

Fig. 6 Comparison of reconstruction results in part. (a) Reconstruction by fan-beam FBP; (b) reconstruction by fan-beam DHB

当 N 取不同值时,分别计算两种算法的归一化均方误差 d 和归一化绝对误差 r :

$$d = \left\{ \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (f_{ij}^{\text{rec}} - f_{ij})^2 \right] / \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (f_{ij}^{\text{rec}} - \bar{f})^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (20)$$

$$r = \left[\left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |f_{ij}^{\text{rec}} - f_{ij}| \right) / \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} \right], \quad (21)$$

式中 f_{ij} 是参考图像像素值, f_{ij}^{rec} 是重建图像像素值, \bar{f} 是参考图像像素平均值。结果如图 7 和表 1 所示。此外,表 1 还给出了两种算法的重建时间对比。

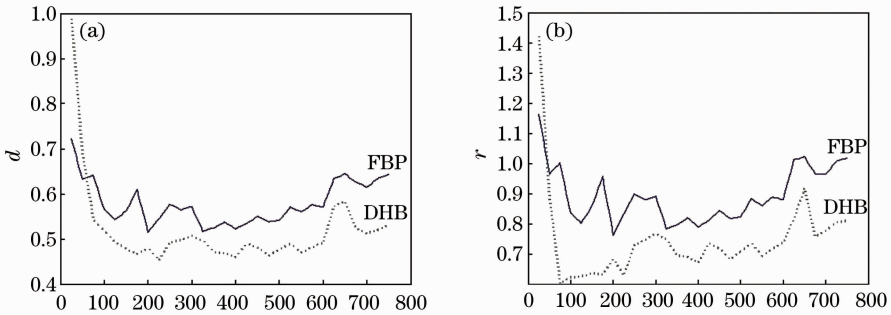


图 7 结果误差对比曲线。(a)归一化均方误差;(b)归一化平均绝对误差

Fig. 7 Curve of error comparison. (a) Normalized mean square error; (b) normalized absolute average error

表 1 FBP 算法与 DHB 算法性能对比

Table 1 Performance comparison of FBP and DHB

Number of pixels		$(N \times N)$					
		100×100	200×200	300×300	400×400	500×500	600×600
d	FBP	0.57	0.52	0.57	0.52	0.54	0.57
	DHB	0.51	0.47	0.5	0.41	0.48	0.49
r	FBP	0.83	0.76	0.89	0.79	0.83	0.88
	DHB	0.62	0.68	0.76	0.67	0.7	0.73
Reconstruction time / s	FBP	4.13	14.58	30.89	53.16	82.57	114.8
	DHP	3.31	12.5	27.67	48.1	75.12	107.5

通过实验结果分析发现,在重建不同规模的 $N \times N$ ($N=25 \sim 700$) 图像矩阵时, DHB 算法比 FBP 算法的均方误差平均降低 0.06, 绝对误差平均降低 0.15, 且误差与重建规模没有必然的关系。DHB 算法的重建速度与 FBP 算法的速度提高与重建规模的大小有关, 速度差 $T_{\text{FBP}} - T_{\text{DHB}} \approx N/100$ s。

5 结 论

在平行束 DHB 算法的基础上利用 360° 扇束扫描存在的冗余投影的特性构建权因子, 去掉了反投影算子中的距离加权函数, 推导出了等距扇束 DHB 算法。通过误差分析可以看出等距扇束 DHB 算法的总体重建质量要好于 FBP 算法, 由于算法中拆解了 FBP 中的 $|\omega|$ 函数, 使滤波分解为差分 and 希尔伯特变换两部分, 使系统传递函数对投影频谱的放大不再保持线性关系, 而是着重于中低频率的放大, 在高频处适当压低, 使图像分辨率更趋均匀, 并且去掉了距离加权的运算缩短了整体重建时间。

参 考 文 献

- 1 R. M. Lewitt. Reconstruction algorithms; transform methods[J]. *Proc. IEEE*, 1983, **71**(3): 390~408
- 2 G. T. Herman. Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography[M]. New York: Academic Press, 1980
- 3 Y. Censor. Finite series-expansion reconstruction methods[J]. *Proc. IEEE*, 1983, **71**(3): 409~419
- 4 E. Y. Sidky, X. Pan. Recovering a compactly supported function from knowledge of its Hilbert transform on a finite interval[J]. *IEEE Trans. Signal Processing Lett.*, **12**(2): 97~100
- 5 M. Defrise, F. Noo, Kudo H, Clackdoyle. Truncated Hilbert transform and image reconstruction from limited tomographic data[J]. *Inverse Problems*, 2006, **22**(3): 1037~1053
- 6 Zeng Gengsheng. Medical Image Reconstruction[M]. Beijing: Higher Education Press, 2010
曾更生. 医学图像重建[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010
- 7 J. You, G. L. Zeng. Hilbert transform based FBP algorithm for fan-beam CT full and partial scans[J]. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 2007, **26**(2): 190~199
- 8 A. C. Kak, M. Slaney. Principles of Computerized Tomographic Imaging[M]. New York: IEEE Press, 1998. 56~68
- 9 Ronald N. Bracewell. The Fourier Transform and Its Applications[M]. New York: McGraw Hill, 2000
- 10 A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer. Discrete-Time Signal Processing[M]. Englewoods: Prentice-Hall, 1998