

# 多元与条件概率统计分布的变值测量

郑智捷

(云南大学软件学院信息安全系, 云南 昆明 650091)

**摘要** 概率统计模型是量子统计的基础。在几率处理的量子统计模式中通常假设具有极大数目的量子运动能满足随机过程大数定理的条件,其概率分布能利用经典多元正态分布从连续概率统计出发进行逼近。从量子交互作用测量出发,对 Einstein 受激发射、Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH)、Aspect 等测量参数形成四元组。利用多变量逻辑函数和变值原理,在  $N$  元 0-1 输入/输出序对上形成变值测量四元组,建立变值双路模拟模型。该模型根据多元/条件概率、同步/异步、对称/反对称等不同条件得到对应概率统计分布,形成 4 组 16 个统计直方图。根据穷举模拟计算结果,展现变值概率统计在复杂交互作用条件下能否满足连续的概率统计分布。给出了两类仿真实验计算统计分布测量结果。模拟测量结果表明,多元概率统计与正态分布关联,而条件概率统计则与量子干涉统计分布关联。

**关键词** 量子光学;量子交互作用;波粒二重性;对称/反对称;测量参数四元组;多元/条件概率

**中图分类号** O431; O41 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/LOP49.042701

## Multiple and Conditional Probabilities and Their Statistical Distributions for Variant Measures

Zheng Jeffrey

(Department of Information Security, School of Software, Yunnan University,  
Kunming, Yunnan 650091, China)

**Abstract** Under two distinct probability models, i. e., multiple and conditional probabilities, statistical distributions are investigated. Using measurement model and statistical approaches to simulate quantum interaction on binary level systems, multiple interactive conditions are simulated via double-path interference model. From quantum interaction, Einstein, Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) and Aspect measuring quaternion is investigated. Using multiple variable logic functions and variant principle,  $N$  bit vectors of 0-1 input/output pairs form variant quaternion to establish variant double-path simulation model. Using both multiple and conditional probabilities and symmetry/anti-symmetry and synchronous/asynchronous conditions, the simulation system generates 4 groups of 16 histograms to express the statistical distributions in relevant conditions. Simulation results show that multiple probability is associated with normal distribution, while conditional probability is related to quantum interference distribution.

**Key words** quantum optics; quantum interaction; wave particle duality; symmetry/anti-symmetry; measurement quaternion; multiple and conditional probabilities

**OCIS codes** 270.5585; 350.2460; 000.5490; 350.4990; 350.7420

## 1 引言

量子统计在量子力学体系中占据核心位置<sup>[1~4]</sup>。在量子交互作用特性完全不同于常规表现的实验中有两类双缝干涉实验结果至今仍在量子体系中被公认为核心秘密<sup>[1,5~7]</sup>:一类是量子在标准相关信号条件下的双缝干涉实验<sup>[1~4,6,7]</sup>,而另一类则是量子在超低强度极长时间环境中以自相关性解释著称的系列实验结果<sup>[8~14]</sup>。多元变量统计长期以来是经典统计的核心部分,而条件概率方法在经典的贝叶斯统计模型中起到

**收稿日期**: 2011-08-12; **收到修改稿日期**: 2011-09-02; **网络出版日期**: 2012-01-19

**基金项目**: 云南省信息安全特色专业建设基金(X3108042)和云南省软件工程重点实验室建设基金(2010EI02, 2010KS06)资助课题。

**作者简介**: 郑智捷(1956—),男,博士,教授,主要从事变值逻辑、量子基础、量子密码等方面的研究。

E-mail: conjugatesys@gmail.com

基础支撑作用<sup>[5,15,16]</sup>。历史上先验概率和后验概率之间的差别和联系引起过激烈争论<sup>[16]</sup>，值得注意的是在多元变量概率条件下均匀分布或正态分布的结构，在条件概率的作用下会出现怎样的分布特性<sup>[5,15,16]</sup>。这类统计难题长期同实际应用中大量涌现出的非正态分布特性直接关联。

Feynman 等<sup>[17]</sup>强调双缝实验在量子力学体系中的核心地位。通过他的反复解释，双缝实验作为解析量子相互作用的基础可视化模型——粒子的概率可加性和波动统计干涉效应，被研究者普遍认可<sup>[1~4,6,7]</sup>。

为了利用测量方法区分经典和量子相互作用，Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH)<sup>[18]</sup>在1969年提出自旋态测量实验方法以检验 Bell 不等式。近年来，人们采用激光、核磁共振、大分子、量子计算等测量实验和计算模拟方法，在世界范围内完成了一系列检验实验<sup>[8~14,19~26]</sup>。

本文利用马赫-曾德尔干涉仪建立双路测量模型，对 Einstein、CHSH 和 Aspect 等<sup>[19]</sup>测量方法形成四元组。利用变值原理和逻辑函数，将多变量逻辑函数转为等价变值表示，形成变值测量四元组。利用仿真模型和计算方法，提出变值模拟模型。该模型将给定逻辑函数分解为两个基元逻辑函数，模拟在双路和单路不同组合条件下的量子测量和交互作用。 $N$ 元位向量通过穷举形成量化变值测量，利用可视化形式确定对称/反对称特性及其两类概率统计分布特性，形成4组16个统计分布直方图。从模拟的结果可以观察到在异步加条件下粒子统计的可加概率分布以及在同步加条件下波动统计的干涉叠加效果。从模拟模型和计算的角度，该系统提供的结果能一致地满足 Feynman 等针对双缝实验的悖论，采用理想实验方法判别波粒二重性问题所提出的系列化经典判据。

## 2 双路干涉模型

### 2.1 马赫-曾德尔干涉仪

在双路干涉实验中使用马赫-曾德尔干涉仪<sup>[1~4,6,7]</sup>，其工作模式如图1所示。图1(a)为干涉仪模型。输入信号  $X$  在控制函数  $f$  的作用下，激励激光器(LS)输出复合信号  $\rho$ ；在偏振器(BP)的作用下，输出成对偏振信号  $\rho_+$  和  $\rho_-$ 。偏振信号通过开关器(SW)输出  $\rho_+^L$  和  $\rho_+^R$ 。受控的信号序对在交互作用合成器(IM)处理后输出信号  $I(\rho_+^L, \rho_+^R)$ 。图1(b)是对图1(a)功能的模拟描述，以功能模块化的形式用同样的符号和信号流向表示，描述模拟计算过程。

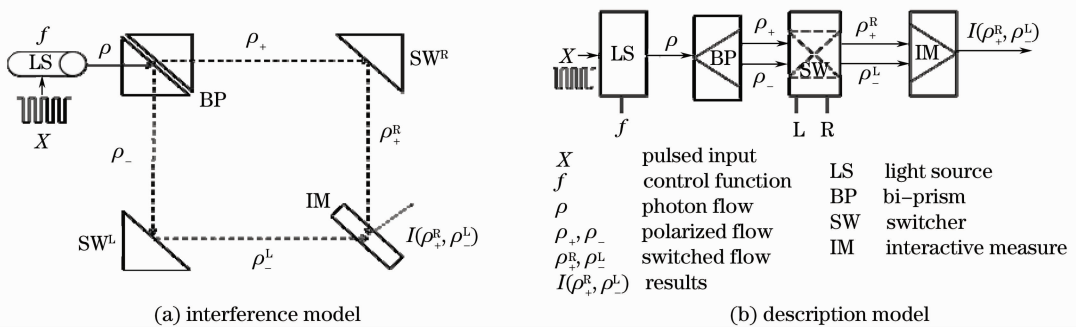


图1 双路干涉模型

Fig. 1 Double-path model

### 2.2 基础测量参数

建立测量参数体系是量子交互作用测量的基础问题。

1916年 Einstein 针对受激发射和吸收条件建立了测量模型<sup>[3,4]</sup>。令双态系统的基态为  $E_1$ ，激发态为  $E_2$ ， $N_1$  和  $N_2$  为在基态和激发态上的原子数目。在时刻  $t$ ，从激发态转变到基态的速率为  $\frac{dN_{21}}{dt}$ ，同时从基态跃迁到激发态的速率为  $\frac{dN_{12}}{dt}$ ， $N_{21}$  为从激发态到基态、 $N_{12}$  为从基态到激发态的原子数目。双态系统的测量四元组为  $\langle N_1, N_2, N_{12}, N_{21} \rangle$ 。

1969年 CHSH<sup>[18]</sup>提议用自旋测量方法检验 Bell 不等式。利用  $\perp \rightarrow +$  和  $\parallel \rightarrow -$  所形成的测量四元组为

$\langle N_{++}(a,b), N_{+-}(a,b), N_{-+}(a,b), N_{--}(a,b) \rangle$ 。

1982年, Aspect等<sup>[19]</sup>进行了Bell不等式的检测实验。在实验中, 4个核心参数(传输率 $N_t$ , 反射率 $N_r$ , 对应率 $N_c$ 和 $\omega$ 单位时间中的总数率 $N_\omega$ )所形成的测量四元组为 $\langle N_t, N_r, N_c, N_\omega \rangle$ 。在该四元组中,  $N_c$ 为一类新类型, 标记有多少组对数据满足双路符合条件。

### 3 变值模拟系统

#### 3.1 变值模型

在模型中所涉及到的变值原理、测量方法和转换公式<sup>[27~29]</sup>的具体描述在3.2~3.4节中给出。对 $N$ 元0-1向量 $\mathbf{X}$ 和给定函数 $f$ , 通过 $2^N$ 次迭代处理之后, 变值测量形成四组直方图。变值模拟系统在图2中给出。在图2(a)中变值模拟系统由三个模块组成: 预处理, 交互处理, 后处理。 $N$ 元向量 $\mathbf{X}$ 和函数 $f$ 作为预处理模块的输入, 形成两组复合信号 $\{\rho, \bar{\rho}\}$ 输出。通过交互处理模块, 输出四组信号 $\{\{u, v\}, \{\bar{u}, \bar{v}\}\}$ , 其中 $u$ 为多元概率对称信号组,  $v$ 为多元概率反对称信号组,  $\bar{u}$ 为条件概率对称信号组, 而 $\bar{v}$ 为条件概率反对称信号组。所有的 $N$ 元向量的穷举状态在通过 $2^N$ 次迭代之后, 测量数据在后处理模块中一共形成4组16个直方图: 4个多元概率对称信号, 4个多元概率反对称信号, 4个条件概率对称信号及4个条件概率反对称信号。

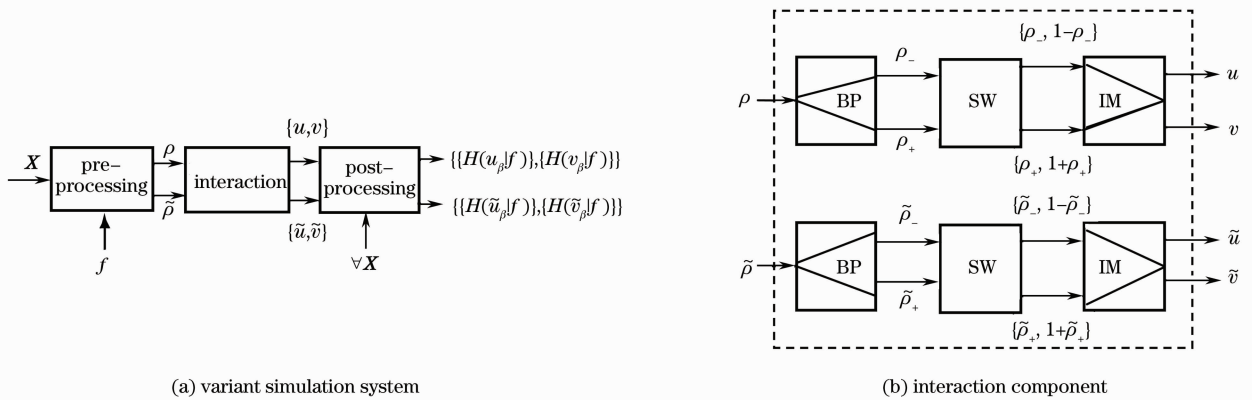


图2 变值模拟系统描述

Fig. 2 Variant simulation system model

在图2(b)中, 交互作用模块能进一步分为三个子功能模块即BP, SW, IM进行处理。复合概率信号 $\{\rho, \bar{\rho}\}$ 通过BP模块输出成对选择信号 $\{\{\rho_-, \rho_+\}, \{\bar{\rho}_-, \bar{\rho}_+\}\}$ , SW模块转换成对信号为四元组 $\{\{\rho_-, 1-\rho_-, 1+\rho_+, \rho_+\}, \{\bar{\rho}_-, 1-\bar{\rho}_-, 1+\bar{\rho}_+, \bar{\rho}_+\}\}$ , 再通过IM模块形成具有对称/反对称特征的四组输出信号 $\{\{u, v\}, \{\bar{u}, \bar{v}\}\}$ 。

#### 3.2 变值原理

变值原理通过作用在 $n$ 元逻辑函数上形成等价变值逻辑函数表示<sup>29~31]</sup>。

对 $n$ 元变量 $x = x_{n-1}, \dots, x_i, \dots, x_0, 0 \leq i < n, x_i \in \{0, 1\} = B_2$ 。令第 $j$ 位为选定特征位,  $0 \leq j < n, x_j \in B_2$ 为选择变量, 对输出变量 $y, n$ 元函数 $f, y = f(x), y \in B_2, x \in B_2^n$ 。对所有 $x$ 的 $2^n$ 个可能状态, 令 $S(n)$ 为状态集, 根据特征位的取值划分该集合为两个集合:  $S_0^j(n)$ 和 $S_1^j(n)$ :

$$\begin{cases} S_0^j(n) = \{x \mid x_j = 0, \forall x \in B_2^n\} \\ S_1^j(n) = \{x \mid x_j = 1, \forall x \in B_2^n\}. \end{cases} \quad (1)$$

$$S(n) = \{S_0^j(n), S_1^j(n)\}$$

对函数 $f$ , 利用特征位值和输入/输出对的关系, 确定4个基元逻辑函数 $\{f_\perp, f_+, f_-, f_\top\}$

$$\begin{cases} f_\perp(x) = \{f(x) \mid x \in S_0^j(n), y = 0\} \\ f_+(x) = \{f(x) \mid x \in S_0^j(n), y = 1\} \\ f_-(x) = \{f(x) \mid x \in S_1^j(n), y = 0\} \\ f_\top(x) = \{f(x) \mid x \in S_1^j(n), y = 1\} \end{cases} \quad (2)$$

在现有的两类标准逻辑范式表示中, AND-OR合取范式选取函数集合 $\{f_+(x), f_\top(x)\}$ 作为 $y = 1$ 项,

以真值表达来实现;而OR-AND析取范式则通过选择函数 $\{f_-(x), f_\perp(x)\}$ 作为 $y=0$ 项,作为假值表达来实现。在函数 $\{f_T(x), f_\perp(x)\}$ 中 $x_j=y$ ,输入/输出序对取值不变。

当选择函数 $\{f_+(x), f_-(x)\}$ 时, $x_j \neq y$ 形成变值逻辑表示。

记 $f(x) = \langle f_+ | x | f_- \rangle$ 为变值逻辑表示,在表示中,两个投影函数与原函数之间的关系是 $f(x) = \langle f_+ | x | f_- \rangle, f_+(x) = \langle f_+ | x | \emptyset \rangle, f_-(x) = \langle \emptyset | x | f_- \rangle$ 。在 $\langle f_+ | x | f_- \rangle$ 结构中, $f_+$ 从 $S_0^i(n)$ 中选择“1”项为合取表达形式,而 $f_-$ 部分从 $S_1^i(n)$ 中选择“0”项为析取表达形式。

为方便理解,利用两变量的逻辑函数全体,将16个函数的标准真值集合表达式和等价变值表达式在表1第1行列出。在表1中, $n=2, j=0, S(2) = \{11, 10, 01, 00\} = \{3, 2, 1, 0\}$ 分别为二进制和十进制整数集合表示,两个子集合为 $S_0^0(2) = \{10, 00\} = \{2, 0\}, S_1^0(2) = \{11, 01\} = \{3, 1\}$ 。

特征向量 $z$ 的互补运算 $\delta$ 定义为:对任意 $\delta \in B_2$ ,

$$z^\delta = \begin{cases} z, & \delta = 1 \\ \neg z, & \delta = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中 $\neg$ 表示逻辑非。

互补运算作用在基元状态对应的整个列上,整列的0-1数值受到算符的影响。在对应关系表示下,变值函数表达式也在表1中给出。

检查 $f=3$ 和 $f=6, \{f=3 = \{1, 0\} := \langle 0 | 3 \rangle, f_+ = 11 := \langle 0 | \phi \rangle, f_- = 2 := \langle \varphi | 3 \rangle\}, \{f=6 = \{2, 1\} := \langle 2 | 3 \rangle, f_+ = 14 := \langle 2 | \phi \rangle, f_- = 2 := \langle \phi | 3 \rangle\}$ ,由于 $f_+$ 和 $f_-$ 为两个投影函数,对应的标准函数表示能从函数表中查出。

表1 二元变量逻辑函数和变值逻辑表示( $n=2, j=0$ )

Table 1 Two-variable logic functions and variable logic representation ( $n=2, j=0$ )

$f$	$f \in$	3	2	1	0	$f_+ \in$	$3^0$	$2^1$	$1^0$	$0^1$	$f_- \in$
No.	$S(2)$	11	10	01	00	$S_0^0(2)$	$11^0$	$10^1$	$01^0$	$00^1$	$S_1^0(2)$
0	$\{\emptyset\}$	0	0	0	0	$\langle \emptyset  $	1	0	1	0	$ 3, 1\rangle$
1	$\{0\}$	0	0	0	1	$\langle 0  $	1	0	1	1	$ 3, 1\rangle$
2	$\{1\}$	0	0	1	0	$\langle \emptyset  $	1	0	0	0	$ 3\rangle$
3	$\{1, 0\}$	0	0	1	1	$\langle 0  $	1	0	0	1	$ 3\rangle$
4	$\{2\}$	0	1	0	0	$\langle 2  $	1	1	1	0	$ 3, 1\rangle$
5	$\{2, 0\}$	0	1	0	1	$\langle 2, 0  $	1	1	1	1	$ 3, 1\rangle$
6	$\{2, 1\}$	0	1	1	0	$\langle 2  $	1	1	0	0	$ 3\rangle$
7	$\{2, 1, 0\}$	0	1	1	1	$\langle 2, 0  $	1	1	0	1	$ 3\rangle$
8	$\{3\}$	1	0	0	0	$\langle \emptyset  $	0	0	1	0	$ 1\rangle$
9	$\{3, 0\}$	1	0	0	1	$\langle 0  $	0	0	1	1	$ 1\rangle$
10	$\{3, 1\}$	1	0	1	0	$\langle \emptyset  $	0	0	0	0	$ \emptyset\rangle$
11	$\{3, 1, 0\}$	1	0	1	1	$\langle 0  $	0	0	0	1	$ \emptyset\rangle$
12	$\{3, 2\}$	1	1	0	0	$\langle 2  $	0	1	1	0	$ 1\rangle$
13	$\{3, 2, 0\}$	1	1	0	1	$\langle 2, 0  $	0	1	1	1	$ 1\rangle$
14	$\{3, 2, 1\}$	1	1	1	0	$\langle 2  $	0	1	0	0	$ \emptyset\rangle$
15	$\{3, 2, 1, 0\}$	1	1	1	1	$\langle 2, 0  $	0	1	0	1	$ \emptyset\rangle$

### 3.3 变值测量

令 $\Delta$ 为变值测量函数<sup>[19,20]</sup>,

$$\Delta = \langle \Delta_\perp, \Delta_+, \Delta_-, \Delta_T \rangle, \quad (4)$$

$$\Delta f(x) = \langle \Delta_\perp f(x), \Delta_+ f(x), \Delta_- f(x), \Delta_T f(x) \rangle = \langle \Delta f_\perp(x), \Delta f_+(x), \Delta f_-(x), \Delta f_T(x) \rangle, \quad (5)$$

$$\Delta f_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } f(x) = f_a(x), \alpha \in \{\perp, +, -, T\} \\ 0, & \text{others} \end{cases}. \quad (6)$$

对给定 $n$ 元状态,在 $\Delta f(x)$ 的4个位置中只有1个位置取值为1,其余的3个位置都取值为0。

对任意 $N$ 元0-1向量 $\mathbf{X}, \mathbf{X} = \mathbf{X}_{N-1}, \dots, \mathbf{X}_j, \dots, \mathbf{X}_0, 0 \leq j < N, \mathbf{X}_j \in B_2, \mathbf{X} \in B_2^N$ 。对给定 $f$ 和输出向量 $\mathbf{Y}$ ,

$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) = \langle f_+ | \mathbf{X} | f_- \rangle, \mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{N-1}, \dots, \mathbf{Y}_J, \dots, \mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_j \in B_2, \mathbf{Y} \in B_2^N$ 。在相关向量的第  $J$  个位置中的  $n$  元变量记为  $x^J = [\dots, \mathbf{X}_J, \dots] \in B_2^n$ , 对应输出向量的第  $J$  个位置为  $\mathbf{Y}_J = f(x^J) = \langle f_+ | x^J | f_- \rangle$ 。当  $N$  个位置循环连接时,  $f(\mathbf{X})$  的变值测量为

$$\Delta \langle \mathbf{X} : \mathbf{Y} \rangle = \Delta f(\mathbf{X}) = \sum_{J=0}^{N-1} \Delta f(x^J) = \langle N_{\perp}, N_+, N_-, N_T \rangle. \quad (7)$$

变值测量参数形成的四元组为  $\langle N_{\perp}, N_+, N_-, N_T \rangle$ 。

例如,  $N = 10$ , 给定  $f, \mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \mathbf{Y} &= 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ \Delta(\mathbf{X} : \mathbf{Y}) &= + \quad - \quad \text{T} \quad \perp \quad + \quad - \quad \text{T} \quad - \quad + \quad \perp \\ \Delta f(\mathbf{X}) &= \langle N_{\perp}, N_+, N_-, N_T \rangle = \langle 2, 3, 3, 2 \rangle. \end{aligned}$$

从数值表示的角度, 输入/输出序对为 0-1 变量, 仅有 4 种可能组合, 对任意的函数, 无论变元数目  $n$  和向量长度  $N$  取值如何, 基本的变值测量模式  $\{\perp, +, -, \text{T}\}$  确定不变。

### 3.4 测量公式

在模拟系统中的各类信号可以通过下列公式计算获得。对给定  $N$  元 0-1 向量  $\mathbf{X}$  和函数  $f$ , 在  $\Delta$  测量下  $\Delta f(\mathbf{X}) = \langle N_{\perp}, N_+, N_-, N_T \rangle, N_0 = N_{\perp} + N_-, N_1 = N_+ + N_T, N = N_{\perp} + N_+ + N_- + N_T$ 。多元概率复合信号  $\rho$  表示为

$$\rho = \frac{\Delta f(\mathbf{X})}{N} = \langle \rho_{\perp}, \rho_+, \rho_-, \rho_T \rangle, \quad \rho_{\alpha} = \frac{N_{\alpha}}{N}, \quad 0 \leq \rho_{\alpha} \leq 1, \quad \alpha \in \{\perp, +, -, \text{T}\}. \quad (8)$$

选择多元概率变值信号  $\{\rho_+, \rho_-\}$ , 输出信号  $\{u, v\}$  及其分量能够被确定:

$$\begin{cases} u = \langle u_0, u_+, u_-, u_1 \rangle = \{u_{\beta}\} \\ v = \langle v_0, v_+, v_-, v_1 \rangle = \{v_{\beta}\} \end{cases}, \quad \beta \in \{0, +, -, 1\}, \quad (9)$$

$$\begin{cases} u_0 = \rho_- \oplus \rho_+ \\ v_0 = [(1 - \rho_-)/2] \oplus [(1 + \rho_+)/2] \\ u_+ = \rho_+ \\ v_+ = (1 + \rho_+)/2 \\ u_- = \rho_- \\ v_- = (1 - \rho_-)/2 \\ u_1 = \rho_- + \rho_+ \\ v_1 = (1 - \rho_- + \rho_+)/2 \end{cases}. \quad (10)$$

而条件概率复合信号  $\bar{\rho}$  表示为

$$\bar{\rho} = \langle \bar{\rho}_{\perp}, \bar{\rho}_+, \bar{\rho}_-, \bar{\rho}_T \rangle, \quad 0 \leq \bar{\rho}_{\alpha} \leq 1, \quad \alpha \in \{\perp, +, -, \text{T}\}, \quad (11)$$

$$\bar{\rho}_{\perp} = \frac{N_{\perp}}{N_0}, \bar{\rho}_+ = \frac{N_+}{N_0}, \bar{\rho}_- = \frac{N_-}{N_1}, \bar{\rho}_T = \frac{N_T}{N_1}. \quad (12)$$

选择条件概率变值信号  $\{\bar{\rho}_+, \bar{\rho}_-\}$ , 输出信号  $\{\bar{u}, \bar{v}\}$  及其分量能够被确定:

$$\begin{cases} \bar{u} = \langle \bar{u}_0, \bar{u}_+, \bar{u}_-, \bar{u}_1 \rangle = \{\bar{u}_{\beta}\} \\ \bar{v} = \langle \bar{v}_0, \bar{v}_+, \bar{v}_-, \bar{v}_1 \rangle = \{\bar{v}_{\beta}\} \end{cases}, \quad \beta \in \{0, +, -, 1\}, \quad (13)$$

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = \bar{\rho}_- \oplus \bar{\rho}_+ \\ \bar{v}_0 = [(1 - \bar{\rho}_-)/2] \oplus [(1 + \bar{\rho}_+)/2] \\ \bar{u}_+ = \bar{\rho}_+ \\ \bar{v}_+ = (1 + \bar{\rho}_+)/2 \\ \bar{u}_- = \bar{\rho}_- \\ \bar{v}_- = (1 - \bar{\rho}_-)/2 \\ \bar{u}_1 = (\bar{\rho}_- + \bar{\rho}_+)/2 \\ \bar{v}_1 = (1 - \bar{\rho}_- + \bar{\rho}_+)/2 \end{cases}. \quad (14)$$

在以上公式中  $0 \leq u_\beta, v_\beta, \bar{u}_\beta, \bar{v}_\beta \leq 1, \beta \in \{0, +, -, 1\}$ ,  $\oplus$  为异步加算符,  $+$  为同步加算符。特别注意在公式  $\{u_1, \bar{u}_1\}$  中系数的明显区别, 而其余公式的系数表达形式相似。

利用  $\{\{u, v\}, \{\bar{u}, \bar{v}\}\}$  信号, 每个  $u_\beta(v_\beta)$  或者  $\bar{u}_\beta(\bar{v}_\beta)$  确定直方图上的一个点, 在所有的向量  $\mathbf{X}$  完成了  $2^N$  组数据测量后, 生成  $\{H(u_\beta | f)\}(\{H(v_\beta | f)\})\{H(\bar{u}_\beta | f)\}(\{H(\bar{v}_\beta | f)\})\beta \in \{0, +, -, 1\}$ 。最终每组输出 4 个对称(反对称)统计直方图分布。

$N$	Left path	Right path	Double-particle	Double-wave	Conditions
12	$H(u_+ f)$	$H(u_- f)$	$H(u_0 f)$	$H(u_1 f)$	symmetric meta distributions $H(u_+ f)=H(u_- f)$
13	$H(u_+ f)$	$H(u_- f)$	$H(u_0 f)$	$H(u_1 f)$	
12	$H(v_+ f)$	$H(v_- f)$	$H(v_0 f)$	$H(v_1 f)$	anti-symmetric meta distributions $H(v_+ f)=H(1-v_- f)$
13	$H(v_+ f)$	$H(v_- f)$	$H(v_0 f)$	$H(v_1 f)$	

(a) statistical histogram patterns

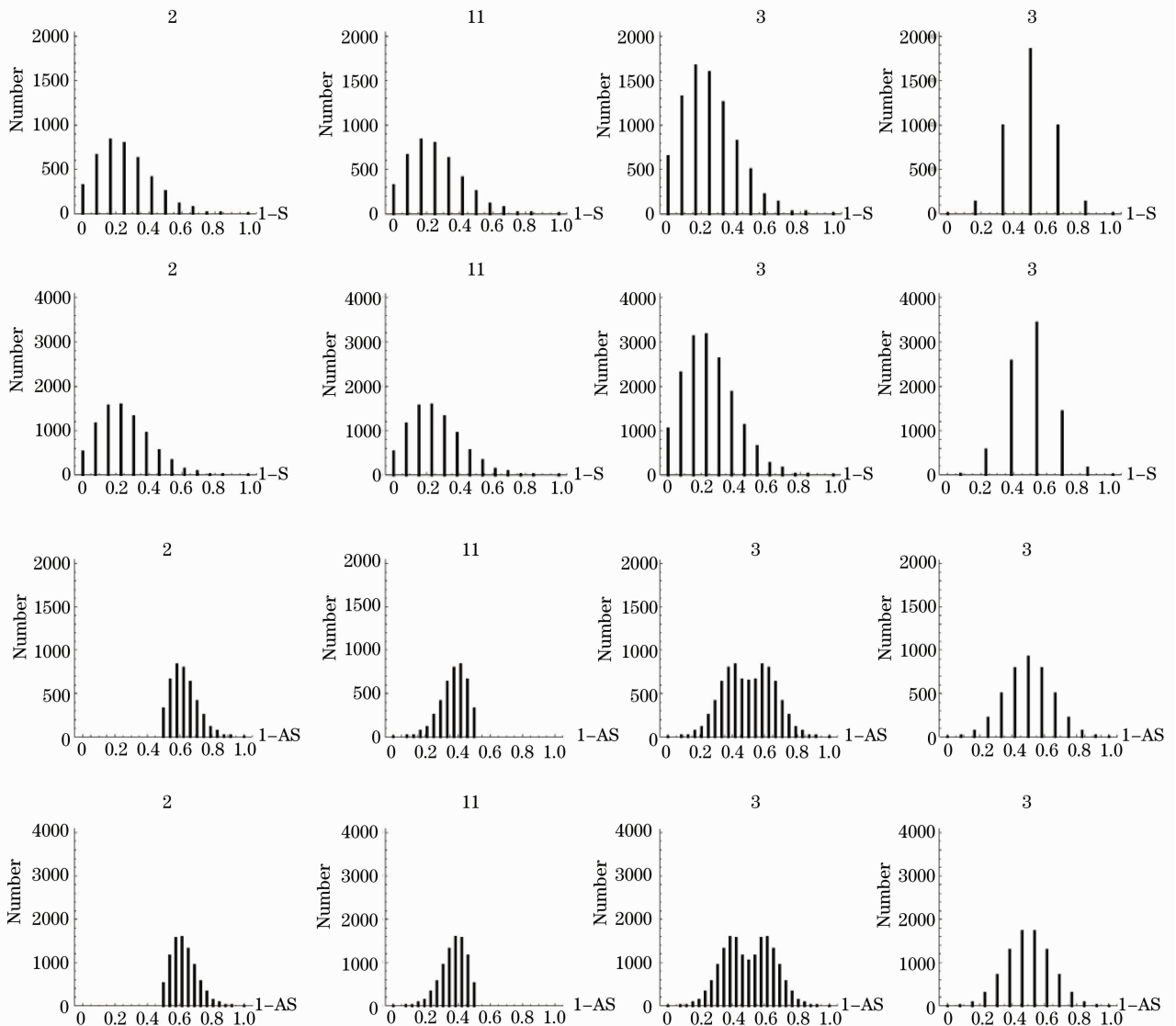
(b)  $N=[12, 13], f=3$ , histograms of symmetric meta distributions

图 3 多元概率对称基元分布统计分布结果

Fig. 3 Results of multiple probabilities and statistical distributions on symmetric meta distributions

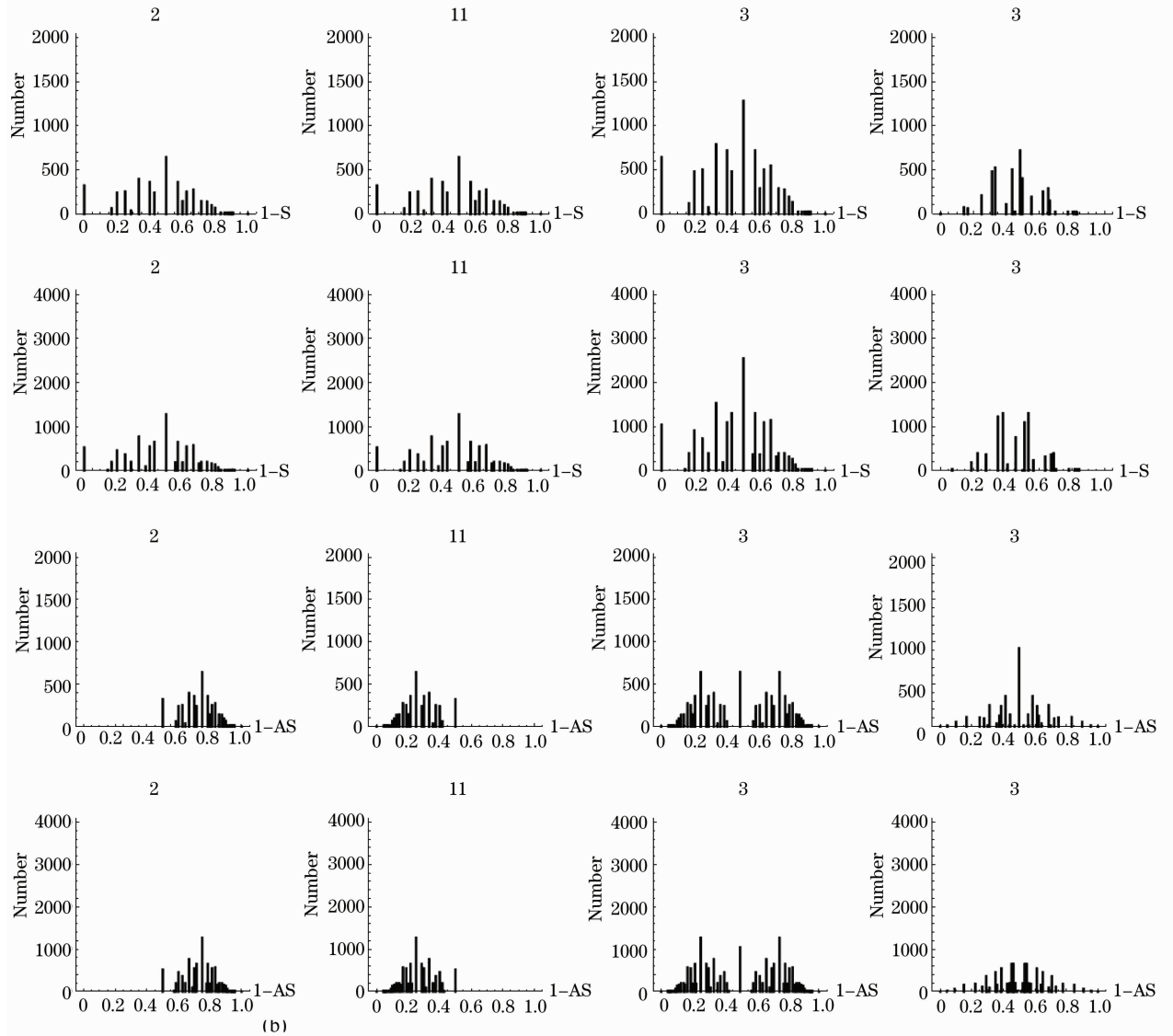
## 4 模拟结果

利用变值模拟系统,可以获得一系列输出结果,在本节中,选择  $N = \{12, 13\}$ ,  $n = 2$ ,  $j = 0$ ,  $\{f = 3, f_+ = 11, f_- = 2\}$  输出结果。在对称基元输入的条件下,分别对应左路、右路、双路粒子和双路波动所形成的系列模拟测量结果。为方便比较,在图 3 中给出多元概率统计结果,而在图 4 中给出条件概率统计输出结果。

在对称基元  $H(u_+ | f) = H(u_- | f)$  分布条件下,图 3(a) 给出在多元概率统计下的输出模式。在图 3(b)

$N$	Left path	Right path	Double-particle	Double-wave	Conditions
12	$H(\tilde{u}_+   f)$	$H(\tilde{u}_-   f)$	$H(\tilde{u}_0   f)$	$H(\tilde{u}_1   f)$	symmetric meta distributions $H(\tilde{u}_+   f) = H(\tilde{u}_-   f)$
13	$H(\tilde{u}_+   f)$	$H(\tilde{u}_-   f)$	$H(\tilde{u}_0   f)$	$H(\tilde{u}_1   f)$	
12	$H(\tilde{v}_+   f)$	$H(\tilde{v}_-   f)$	$H(\tilde{v}_0   f)$	$H(\tilde{v}_1   f)$	anti-symmetric meta distributions $H(\tilde{v}_+   f) = H(1 - \tilde{v}_-   f)$
13	$H(\tilde{v}_+   f)$	$H(\tilde{v}_-   f)$	$H(\tilde{v}_0   f)$	$H(\tilde{v}_1   f)$	

(a) statistical histogram patterns



(b)  $N = \{12, 13\}$ ,  $f = 3$ , histograms of symmetric meta distributions

图 4 条件概率对称基元分布统计分布结果

Fig. 4 Results of conditional probabilities and statistical distributions on symmetric meta distributions

中,显示由 16 个直方图组成的 4 组结果。在对称基元  $H(\bar{u}_+ | f) = H(\bar{u}_- | f)$  分布条件下,图 4(a) 给出在条件概率统计下的输出模式。在图 4(b)中,显示由 16 个直方图组成的 4 组结果。

## 5 结果分析

### 5.1 可视化分布

在  $H(u_+ | f) = H(u_- | f)$  条件下,  $\{H(u_1 | f), H(v_1 | f)\}$  显示出明显的干涉效应,相比其他的图示,谱的数量和密度分布有明显区别,从对称性的角度考虑,  $H(u_1 | f)$  在偶数时比奇数好,而  $H(v_1 | f)$  在不同的奇偶数时都显现出明晰的对称分布特性。

在  $H(\bar{u}_+ | f) = H(\bar{u}_- | f)$  条件下,由于强烈的波动谱特性,单路和双路粒子分布之间可视化差别不大,  $\{H(\bar{u}_1 | f), H(\bar{v}_1 | f)\}$  形成的干涉效应能明显被识别,所形成的统计分布具有较好的整体对称特性。

### 5.2 单双峰效应

在多元概率统计中,当  $N$  为偶数时,  $H(v_1 | f)$  有一个单峰,为奇数时有双峰。在同样的条件下,  $H(u_1 | f)$  的峰分布特性不像  $H(v_1 | f)$  那样明显。

在条件概率统计中,当  $N$  为偶数时,  $H(\bar{u}_1 | f)$  有一个突出的单峰,为奇数时有明显的双峰。在这个条件下,  $H(\bar{v}_1 | f)$  的峰分布特征比  $H(\bar{u}_1 | f)$  更为明显,伴随着强烈的波动干涉效应。

### 5.3 双路粒子统计分布

在异步加算符  $\oplus$  的作用下,多元概率统计信号满足  $0 \leq u_0, v_0, u_-, v_-, u_+, v_+ \leq 1$ 。  $\{H(u_0 | f), H(v_0 | f)\}, \{H(u_+ | f), H(u_- | f)\}$  和  $\{H(v_+ | f), H(v_- | f)\}$  系列分布满足方程

$$\begin{cases} H(u_0 | f) = H(u_- | f) + H(u_+ | f) \\ H(v_0 | f) = H(v_- | f) + H(v_+ | f) \end{cases} \quad (15)$$

条件概率统计信号满足  $0 \leq \bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{u}_-, \bar{v}_-, \bar{u}_+, \bar{v}_+ \leq 1$ 。  $\{H(\bar{u}_0 | f), H(\bar{v}_0 | f)\}, \{H(\bar{u}_+ | f), H(\bar{u}_- | f)\}$  和  $\{H(\bar{v}_+ | f), H(\bar{v}_- | f)\}$  系列分布满足方程:

$$\begin{cases} H(\bar{u}_0 | f) = H(\bar{u}_- | f) + H(\bar{u}_+ | f) \\ H(\bar{v}_0 | f) = H(\bar{v}_- | f) + H(\bar{v}_+ | f) \end{cases} \quad (16)$$

### 5.4 双路波动干涉模式

在对称基元分布的条件下,波动干涉的效应十分明显。在同步加算符运算作用下,多元概率信号取值满足  $0 \leq u_1, v_1, u_0, v_0, u_-, v_-, u_+, v_+ \leq 1$ 。比较  $\{H(u_1 | f), H(v_1 | f)\}$  同单路输出分布  $\{H(u_+ | f), H(u_- | f)\}, \{H(v_+ | f), H(v_- | f)\}$  和双路粒子输出分布,可以看到明显的差别,有下列关系式成立:

$$\begin{cases} H(u_1 | f) \neq H(u_- | f) + H(u_+ | f) = H(u_0 | f) \\ H(v_1 | f) \neq H(v_- | f) + H(v_+ | f) = H(v_0 | f) \end{cases} \quad (17)$$

条件概率信号取值满足  $0 \leq \bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{u}_-, \bar{v}_-, \bar{u}_+, \bar{v}_+ \leq 1$ 。比较  $\{H(\bar{u}_1 | f), H(\bar{v}_1 | f)\}$  同单路输出分布  $\{H(\bar{u}_+ | f), H(\bar{u}_- | f)\}, \{H(\bar{v}_+ | f), H(\bar{v}_- | f)\}$  和双路粒子输出分布,可以看到明显的差别,有下列关系式成立:

$$\begin{cases} H(\bar{u}_1 | f) \neq H(\bar{u}_- | f) + H(\bar{u}_+ | f) = H(\bar{u}_0 | f) \\ H(\bar{v}_1 | f) \neq H(\bar{v}_- | f) + H(\bar{v}_+ | f) = H(\bar{v}_0 | f) \end{cases} \quad (18)$$

在条件概率对称基元分布条件下,双路波动干涉分布与单路输出之间的非等和关系依然成立,但同步双路波动输出同异步双路粒子和单路输出谱线分布波动之间的差别,不像在多元概率对称基元条件下那样明显,需要仔细观察才能确定。从整体的角度而言,条件概率对称基元形成的干涉结果比几类典型的输出更为平衡。这是除了非等和干涉效应之外该类方法能显现出的明显整体分布特征。

### 5.5 不同测量四元组

变值四元组为  $\Delta f(\mathbf{X}) = \langle N_\perp, N_+, N_-, N_T \rangle, N = N_\perp + N_+ + N_- + N_T$ 。

在 Einstein 双态系统中,在测量四元组  $\langle N_1, N_2, N_{12}, N_{21} \rangle$  中的分量可以形成如下对应关系式:



$$\begin{cases} N_1 = N_{\perp} + N_+ \\ N_2 = N_- + N_T \\ N_{12} = N_+ \\ N_{21} = N_- \\ N = N_1 + N_2 \end{cases} \quad (19)$$

在关系表达式中,测量参数序对 $\{N_{21}, N_{12}\}$ 与 $\{N_-, N_+\}$ 对应。

选择 $+\rightarrow 1, -\rightarrow 0$ ,CHSH 的测量参数  $N_{\pm, \mp}$  满足

$$\begin{cases} N_{+,+} \rightarrow N_T \\ N_{+,-} \rightarrow N_- \\ N_{-,+} \rightarrow N_+ \\ N_{-,-} \rightarrow N_{\perp} \end{cases}, \quad (20)$$

$$(N_{+,+}, N_{+,-}, N_{-,+}, N_{-,-}) \rightarrow (N_T, N_-, N_+, N_{\perp}), \quad (21)$$

令  $N = N_{+,+} + N_{+,-} + N_{-,+} + N_{-,-}$ , CHSH 的测量四元组为变值四元组的一个置换序列。

在 Aspect 的测量四元组 $(N_t, N_r, N_c, N_w)$ 中分量满足

$$\begin{cases} N_t \rightarrow N_- \\ N_r \rightarrow N_+ \\ N_w \rightarrow N \end{cases} \quad (22)$$

在变值测量中,没有同  $N_c$  等价的参数,  $N_c$  标记在量子测量处理中双路通道同时出现的信号数目,对于特定实验具有意义,对于模拟系统,参数标记 $\{u_0, v_0\}$ 和 $\{u_1, v_1\}$ 或者 $\{\bar{u}_0, \bar{v}_0\}$ 和 $\{\bar{u}_1, \bar{v}_1\}$ 信号在系统中所出现的数目。

## 6 结 论

在给定变值逻辑函数条件下分析  $N$  元 0-1 向量及其穷举序列,变值模拟系统可以形成不同特性的概率统计分布,利用四组概率参数 $\{u_{\beta}\}, \{v_{\beta}\}, \{\bar{u}_{\beta}\}, \{\bar{v}_{\beta}\}$ 分别描述多元和条件概率在左路、右路、双路粒子和双路波动及其在对称和反对称条件下的分布特性,观察在两种概率对称基元分布组合状态下的分布规律。对比变值测量四元组和其他量子测量四元组结构,探讨各类测量系统的优势和局限。从模拟运算复杂性的角度,任意  $n$  元函数的计算复杂性为  $O(2^n)$ ,而  $N$  元向量穷举复杂性为  $O(2^N)$ ,整个模拟系统的运算复杂性为  $O(2^n \times 2^N)$ 。从应用的角度,建立起模拟系统与实验系统之间的量化测量关系,同时利用优化算法进行可操作的模拟为下一步研究的关键论题。从多元概率表现出的正态分布特性到条件概率显现出的内蕴波动分布特性,将对进一步解释两类经典双缝实验结果提供基础模拟计算实验支持证据。

**致谢** 感谢晚洁生成的测量数据和李清平所做的可视化图形。

## 参 考 文 献

- Zhang Li, Ge Molin. Frontier Issues in Quantum Mechanics [M]. Beijing: Qinghua University Press, 2000  
张 礼, 葛墨林. 量子力学的前沿问题 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2000
- Peng Hengwu. The birth and growth of quantum theory from quantum hypothesis to quantum mechanics [J]. *Physics*, 2001, (5): 265~270  
彭恒武. 量子理论的诞生和发展——从量子论到量子力学[J]. *物理*, 2001, (5): 265~270
- Zhao Kaihua, Luo Weiyin. Quantum Physics; New Conceptual Physics Course[M]. Beijing: Higher Education Press, 2008  
赵凯华, 罗蔚茵. 量子物理——新概念物理教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008
- Zhang Yongde. The Principle of Quantum Information Physics [M]. Beijing: Science Press, 2009  
张永德. 量子信息物理原理[M]. 北京: 科学出版社, 2009
- R. B. Ash, C. A. Doleans-Dade. Probability & Measure Theory [M]. New York: Elsevier, 2000
- John D. Barrow, Paul C. W. Davies, Charles L. Harper Jr.. Science and Ultimate Reality: Quantum Theory, Cosmology and Complexity [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
- S. Hawking, L. Mlodinow. The Grand Design [M]. New York: Bantam, 2010

- 8 Chen Yong-fan, Tsai Zen-Hsiang, Liu Yu-Chen *et al.*. Low-light-level photon switching by quantum interference [J]. *Opt. Lett.*, 2005, **30**(23): 3207~3209
- 9 Alexey A. Kryukov. On the measurement problem for a two-level quantum system [J]. *Found. Phys.*, 2007, **37**(1): 3~39
- 10 J. S. Lundeen, M. W. Mitchell, A. M. Steinberg *et al.*. A double-slit ‘which-way’ experiment on the complementarity-uncertainty debate [J]. *New J. Phys.*, 2007, **9**(8): 287
- 11 Andrew M. C. Dawes. Using Transverse Optical Patterns for Ultra-Low-Light All-Optical Switching [D]. Durham: Duke University, 2008
- 12 Lo Hsiang-Yu, Su Po-Ching, Chen Yong-Fan. Low-light-level cross-phase modulation by quantum interference [J]. *Phys. Rev. A*, 2010, **81**(5): 053829
- 13 Carlidge Edwin. A Quantum Take on Certainty, Physicists Show That in the Iconic Double-Slit Experiment, Uncertainty Can Be Eased [OL]. Nature News, June 2, 2011, doi:10.1038/news. 2011.344
- 14 Niels Vegter, Thijs Wendrich, S. F. Pereira. Making Discrete Photon Effects Visible in an Optical Interference Experiment [OL]. <http://tnw.tudelft.nl/index.php?id=34882&L=1>
- 15 Xu Chuansheng. From the game problems to methodological subjects: The Historic Development of Probability Theory [M]. Beijing: Science Press, 2010  
徐传胜. 从博弈问题到方法论学科—概率论发展史研究[M]. 北京: 科学出版社, 2010
- 16 Chen Xiru. History of Statistics [M]. Changsha: Hunan Education Press, 2000  
陈希孺. 数理统计学简史[M]. 长沙: 湖南教育出版社, 2000
- 17 R. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands. The Feynman Lectures on Physics Vol. 3 [M]. New Jersey: Addison-Wesley, 1963
- 18 F. Clauser, M. Horne, A. Shimony *et al.*. Proposed experiment to test local hidden-variable theories [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1969, **23**(15): 880~884
- 19 A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger. Experimental test of Bell’s inequalities using time-varying analyzers [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **49**(25): 1804~1807
- 20 M. Horne, A. Shimony, A. Zeilinger. Two-particle interferometry [J]. *Nature*, 1990, **347**(6292): 429~430
- 21 O. Nairz, M. Arndt, A. Zeilinger. Quantum interference experiments with large molecules [J]. *Am. J. Phys.*, 2003, **71**(4): 319~325
- 22 Li Yuanhua, Liu Junchang, Nie Yiyou. Quantum information splitting by using a genuinely entangled six-qubit state and Bell-state measurements [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, **40**(2): 307~310  
李渊华, 刘俊昌, 聂义友. 基于六粒子纠缠态和 Bell 态测量的量子信息分离[J]. 光子学报, 2011, **40**(2): 307~310
- 23 Ma Yunzhen, Liu Hongjun, Zhao Wei. Parametric amplification characteristics of weak image [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, **37**(9): 1769~1773  
马云振, 刘红军, 赵 卫. 微弱光学图像的光参量放大特性的研究[J]. 光子学报, 2008, **37**(9): 1769~1773
- 24 Xiong Li, Qin Xiaolin, Feng Mingming *et al.*. Single-photon control with Mach-Zehnder interferometer [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(3): 294~298  
熊 利, 秦小林, 冯明明 等. 基于马赫-曾德尔干涉仪的单个光子操控[J]. 光学学报, 2004, **24**(3): 294~298
- 25 Jing Jietai, Li Xiaoying, Pan Qing. Comparison between two methods measuring of Einstein-Podolsky-Rosen correlation for continuous variables [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(2): 132~136  
荆杰泰, 李小英, 潘 庆. 两种连续变量爱因斯坦-波多尔斯基罗森关联测量方法的比较[J]. 光学学报, 2003, **23**(2): 132~136
- 26 Ma Yu, Yu Xin. The statistic processing of photon image [J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(4): 422~426  
马 瑜, 俞 信. 光子图像统计处理[J]. 光学学报, 2002, **22**(4): 422~426
- 27 Jeffrey Zheng, Chris Zheng, T. L. Kunii. A Framework of Variant-Logic Construction for Cellular Automata. In Alejandro Salcido ed., Cellular Automata-Innovative Modelling for Science and Engineering [M]. Rijeta: InTech Press, 2011. 325~352
- 28 Jeffrey Zheng. Synchronous properties in quantum interferences appearing in simulated double path experiments [J]. *J. Computations & Modelling*, 2011, **1**(1): 73~90
- 29 Zheng Jeffrey, Zheng Chris. Variant measures and visualized statistical distributions [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, **40**(9): 1397~1404  
郑智捷, 郑昊航. 变值测量结构及其可视化统计分布[J]. 光子学报, 2011, **40**(9): 1397~1404
- 30 Li Qingping, Zheng Jeffrey. 2D spatial distributions for measures of random sequences using conjugate maps [C]. 11th Australian Information Warfare Conference, 2010, ISW34. <http://ro.ecu.edu.au/isw/34/>
- 31 Li Qingping, Zheng Jeffrey. 3D visual method for logic functions on exhaustive sequences [C]. IEEE International Conference on Information Theory and Information Security, 2010, 553~557