非局域椭圆厄米-高斯空间光孤子与相移

王　清　王形华　谢应茂　罗兴垅　黎东波

（赣南师范学院物理与电子信息学院，江西 赣州 341000）

摘要　研究了椭圆厄米-高斯光束在强非局域非线性介质中的传输特性。依据强非局域介质响应函数特征宽度远大于光束束宽的原理，对介质响应函数做两次泰勒级数展开，都近似取到二阶，得到了非局域非线性薛定谔方程对应的近似的拉格朗日密度函数。在此基础上，运用变分法得到了椭圆厄米-高斯光束各参量的演化方程、演化规律和两个临界功率。当光束、响应函数的椭圆率满足一定条件时，两个临界功率可以相等。当初始功率等于这一临界功率，光束从光腰处入射时，可得到椭圆厄米-高斯空间光孤子。进一步分析发现椭圆厄米-高斯空间光孤子的相移与介质椭圆率和孤子阶数有密切关系，当介质椭圆率和孤子阶数取不同值时，可产生大的正相移、零相移，甚至负相移。

关键词　非线性光学；椭圆厄米-高斯空间光孤子；变分法；非局域非线性薛定谔方程；相移

中图分类号　O437；TN012　　**文献标识码**　A　　**doi**：10.3788/LOP49.021901

Elliptical Hermite-Gaussian Spatial Optical Soliton and Phase Shift

Wang Qing　Wang Xinghua　Xie Yingmao　Luo Xinglong　Li Dongbo

（*School of Physics and Electronic Information*, *Gannan Normal University*, *Ganzhou*, *Jiangxi* 341000, *China*）

Abstract　The propagation properties of elliptical Hermite-Gaussian light beam in a strongly nonlocal nonlinear medium are studied. As the characteristic width of response function of strongly nonlocal media is much bigger than the beam width, the response function is expanded twice with Taylor series and the series are both preserved up to the second-orderterm, and the approximative Lagrangian density function corresponding to nonlocal nonlinear Schrödinger equation is thus obtained. Based on this, the evolution equations, evolution laws of elliptical Hermite-Gaussian light beam′s every variable and two critical powers are also derived using variational method. When the ellipticities of light beam and response function satisfy certain conditions, these two critical powers are equal. When the initial power is equal to the critical power and light beam is incident at the beam waist, the elliptical Hermite-Gaussian spatial optical soliton is obtained. Further studies point out that the phase shift of elliptical Hermite-Gaussian spatial optical soliton is closely connected with media′s ellipticity and soliton′s order. With different values of the media′s ellipticity and soliton′s order, large positive, zero even negative phase shift may come into being.

Key words　nonlinear optics; elliptical Hermite-Gaussian spatial optical soliton; variational method; nonlocal nonlinear Schrödinger equation; phase shift

OCIS codes　190.6135; 190.4400; 160.4330; 140.3295

1　引　　言

光束在非局域非线性介质中传输时，遵循非局域非线性薛定谔方程（NNLSE）。为了求得光束的传输特性，需要求解 NNLSE，但在大多数情形下很难给出 NNLSE 的精确解，只有在某些特殊的情况下采用逆散射法才能解出。目前，对光束在非局域非线性介质中传输特性的理论研究可采用数值解法[1]，也可根据介质非

收稿日期：2011-07-24；**收到修改稿日期**：2011-09-05；**网络出版日期**：2011-11-22

基金项目：江西省教育厅科技项目（GJJ11586）资助课题。

作者简介：王　清（1984—），男，硕士研究生，主要从事非线性光学传输理论方面的研究。

E-mail：zhujunying120@sina.com

导师简介：王形华（1963—），男，教授，主要从事非线性光学传输理论方面的研究。E-mail：jxwxh@126.com（通信联系人）

局域程度的不同对 NNLSE 进行近似处理,得到相应的近似简化模型,在此基础上利用解析法(极强非局域[2]、强非局域[3]、弱非局域[4])或变分法(1+1 维强非局域情形[5]、1+2 维强非局域情形[6,7])或微扰的方法(1+1 维非局域情形[8]、1+2 维非局域情形[9])进行求解。自 1997 年 Snyder 等[2]提出强非局域模型以来,起初人们对非局域空间光孤子的研究主要是对基模孤子的研究,近年来有些学者开始对高阶光束在强非局域介质中的传输性质进行了研究,并取得一定的成就。如分别用解析和变分的方法研究了厄米-高斯光束在强非局域介质中的传输特性[10,11];用变分法得到了强非局域介质中的拉盖尔-高斯解[12];把高阶光束看成高斯光束与某一函数的乘积,用调制试探解的方法得到了高阶呼吸子[13,14]、高阶旋涡孤子[15]、贝塞尔型孤子[16]、Ince-Gaussian 解[17]等;并讨论了厄米-高斯解、拉盖尔-高斯解、Ince-Gaussian 解存在相互转换的可能;用自相似方法研究了二维高斯孤子族、涡漩孤子族、对称环路孤子族和缺陷孤子族[18];数值模拟了厄米-高斯光束在热非局域矩形铅玻璃中的传输情况,成功得到高阶椭圆形项链光束[19]。椭圆厄米-高斯光束在具有椭圆对称响应函数的强非局域非线性介质中的传输特性的理论研究目前没有相关的报道,本文运用变分法对其进行研究。

2 参量演化方程

在不考虑传输损耗的情况下,椭圆厄米-高斯光束在强非局域非线性介质中传输时满足的 NNLSE 方程为[3]

$$\mathrm{i}\frac{\partial\phi}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi+\rho\phi\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R(x-x',y-y')\,|\phi(x',y',z)|^2\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=0,\tag{1}$$

式中 $\phi(x',y',z)$ 代表傍轴光束,$\mu=1/(2k)$,$\rho=k\eta$($\eta>0$ 对应聚焦介质,$\eta<0$ 对应散焦介质),$k=\omega n_0/c$,n_0 是非线性介质折射率的线性部分,z 代表纵轴坐标,x,y 代表横轴坐标。$R(x,y)$ 代表非局域介质响应函数,为椭圆对称的归一化函数。

在强非局域介质中,对介质的椭圆对称响应函数 $R(x-x',y-y')$ 在 $x'=0$,$y'=0$ 处做泰勒级数展开,然后对展开的各项在 $x=0$,$y=0$ 处进一步做泰勒级数展开,近似取到二阶,可得:

$$\mathrm{i}\frac{\partial\phi}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)+\rho\phi\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[R_0-\frac{1}{2}(x-x')^2\gamma_x-\frac{1}{2}(y-y')^2\gamma_y\right]|\phi(x',y',z)|^2\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=0,\tag{2}$$

式中 $R_0=R(0,0)$,$\gamma_x=-R^{(2,0)}(0,0)$,$\gamma_y=-R^{(0,2)}(0,0)$。(2)式所对应的拉格朗日密度函数为[6]

$$\begin{aligned}L=&\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial z}-\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial z}\right)-\mu\left(\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|^2\right)+\\&\frac{1}{2}\rho|\phi|^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[R_0-\frac{1}{2}(x-x')^2\gamma_x-\frac{1}{2}(y-y')^2\gamma_y\right]|\phi(x',y',z)|^2\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'.\end{aligned}\tag{3}$$

假设在强非局域介质中(2)式存在椭圆厄米-高斯变分试探解:

$$\phi_{nm}(x,y,z)=A(z)\mathrm{H}_n\left[\frac{x}{a_x(z)}\right]\mathrm{H}_m\left[\frac{y}{a_y(z)}\right]\exp\left[\mathrm{i}c_x(z)x^2+\mathrm{i}c_y(z)y^2+\mathrm{i}\theta(z)-\frac{x^2}{2a_x(z)^2}-\frac{y^2}{2a_y(z)^2}\right],\tag{4}$$

式中 $\mathrm{H}_n[x/a_x(z)]$,$\mathrm{H}_m[y/a_y(z)]$ 为厄米多项式;$A(z)$ 为光束复振幅的大小;$\theta(z)$ 为相位,$a_x(z)$,$a_y(z)$ 分别为 x,y 方向束宽;$c_x(z)$,$c_y(z)$ 分别为 x,y 方向波前曲率系数。将(4)式代入(3)式并对 x,y 求积分得:

$$\begin{aligned}L_r(m,n)=&-2^{n+m}n!m!A^2\pi\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)a_x^3a_y\frac{\mathrm{d}c_x}{\mathrm{d}z}+a_y^3a_x\frac{\mathrm{d}c_y}{\mathrm{d}z}\left(m+\frac{1}{2}\right)+a_xa_y\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}\right]-\\&2^{n+m}n!m!\mu A^2\pi\left[\frac{(2n+1)a_y}{2a_x}+2(2n+1)c_x^2a_x^3a_y+\frac{(2m+1)a_x}{2a_y}+2(2m+1)c_y^2a_y^3a_x\right]+\\&\frac{1}{2}\pi^2 2^{2(n+m)}(n!m!)^2\rho A^4\left[a_x^2a_y^2R_0-\gamma_xa_x^4a_y^2\left(n+\frac{1}{2}\right)-\gamma_ya_y^4a_x^2\left(m+\frac{1}{2}\right)\right].\end{aligned}\tag{5}$$

运用变分原理 $\delta\int L_r\mathrm{d}z=0$,$\delta L_r/\delta p_i=0$,即有

$$\frac{\delta L_r}{\delta p_i}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L_r}{\partial\left(\dfrac{\partial p_i}{\partial z}\right)}-\frac{\partial L_r}{\partial p_i}=0,\tag{6}$$

式中 p_i 分别代表光束各参量 θ,c,A,a。由此可得

$$A(z)^2=\frac{P_0}{2^{n+m}n!m!\pi a_x a_y},\tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}z}-4\mu c_x a_x=0,\tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}z}-4\mu c_y a_y=0,\tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}c_x}{\mathrm{d}z}-\frac{\mu}{a_x^4}+4\mu c_x^2+\frac{1}{2}\rho\gamma_x P_0=0,\tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}c_y}{\mathrm{d}z}-\frac{\mu}{a_y^4}+4\mu c_y^2+\frac{1}{2}\rho\gamma_y P_0=0,\tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}+\mu\left(\frac{2n+1}{a_x^2}+\frac{2m+1}{a_y^2}\right)-\frac{1}{4}\rho P_0\left[4R_0-\gamma_x a_x^2(2n+1)-\gamma_y a_y^2(2m+1)\right]=0,\tag{12}$$

式中 $P_0=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(x,y,z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为光束的输入功率。(7)～(12)式即为 x,y 方向束宽、波前曲率系数和相位的演化方程。由(8)～(11)式可得

$$\frac{\mathrm{d}^2a_x}{\mathrm{d}z^2}=\frac{4\mu^2}{a_x^3}-2\gamma_x\mu\rho P_0 a_x,\tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2a_y}{\mathrm{d}z^2}=\frac{4\mu^2}{a_y^3}-2\gamma_y\mu\rho P_0 a_y.\tag{14}$$

(13),(14)式即为 x,y 方向束宽演化的动力学方程。

3 椭圆厄米-高斯空间光孤子

假定光束是从光腰处入射，$z=0$ 时，$\mathrm{d}^2a_x/\mathrm{d}z^2=0,\mathrm{d}^2a_y/\mathrm{d}z^2=0,\mathrm{d}a_x/\mathrm{d}z=0,\mathrm{d}a_y/\mathrm{d}z=0,a_x=a_{x0}$，$a_y=a_{y0}$，$a_{x0}(z)$，$a_{y0}(z)$ 分别为 x,y 方向基模高斯光束的初始束宽。由(13),(14)式可求得 x,y 方向要保持光束不变所对应的临界功率：

$$P_{cx}=\frac{2\mu}{\gamma_x\rho a_{x0}^4},\tag{15}$$

$$P_{cy}=\frac{2\mu}{\gamma_y\rho a_{y0}^4}.\tag{16}$$

一般情形下，$P_{cx}\neq P_{cy}$，当输入功率等于 P_{cx} 或 P_{cy} 时，则光束将在 x 或 y 方向保持不变，得到单方向的孤子解，另一方向则做周期性的压缩或展宽。若初始功率 $P_0=P_{cx}=P_{cy}$，则要求 $\gamma_x a_{x0}^4=\gamma_y a_{y0}^4$，即 $\sqrt{\gamma_x/\gamma_y}=a_{y0}^2/a_{x0}^2$，这时 x,y 方向的衍射效应和非线性效应分别达到平衡，光束束宽将始终保持不变，即形成稳定的椭圆厄米-高斯型空间光孤子。由(7)～(12)式并结合初始条件可得椭圆厄米-高斯光束各参量演化规律：

$$a_x^2=a_{x0}^2\left[\cos^2(\beta_{x0}z)+\frac{P_{cx}}{P_0}\sin^2(\beta_{x0}z)\right],\tag{17}$$

$$a_y^2=a_{y0}^2\left[\cos^2(\beta_{y0}z)+\frac{P_{cy}}{P_0}\sin^2(\beta_{y0}z)\right],\tag{18}$$

$$c_x=\frac{\beta_{x0}k\left(\frac{P_{cx}}{P_0}-1\right)\sin(2\beta_{x0}z)}{4\left[\cos^2(\beta_{x0}z)+\frac{P_{cx}}{P_0}\sin^2(\beta_{x0}z)\right]},\tag{19}$$

$$c_y=\frac{\beta_{y0}k\left(\frac{P_{cy}}{P_0}-1\right)\sin(2\beta_{y0}z)}{4\left[\cos^2(\beta_{y0}z)+\frac{P_{cy}}{P_0}\sin^2(\beta_{y0}z)\right]},\tag{20}$$

$$\theta(z)=-\frac{(2n+1)}{2}\arctan\left[\sqrt{\frac{P_{cx}}{P_0}}\tan(\beta_{x0}z)\right]+(2n+1)\left[\frac{(P_{cx}/P_{x0}-1)\rho\gamma_x a_{x0}^2 P_0}{16\beta_{x0}}\sin(2\beta_{x0}z)-\frac{(P_{cx}/P_0-1)\rho\gamma_x a_{x0}^2 P_0 z}{8}\right]-\frac{(2m+1)}{2}\arctan\left[\sqrt{\frac{P_{cy}}{P_0}}\tan(\beta_{y0}z)\right]+(2m+1)\times\left[\frac{(P_{cy}/P_0-1)\rho\gamma_y a_{y0}^2 P_0}{16\beta_{y0}}\sin(2\beta_{y0}z)-\frac{(P_{cy}/P_0-1)\rho\gamma_y a_{y0}^2 P_0 z}{8}\right]+\rho R_0 P_0 z, \tag{21}$$

式中 $\beta_{x0}=(\gamma_x\eta P_0)^{1/2}$,$\beta_{y0}=(\gamma_y\eta P_0)^{1/2}$,$a_x$,$a_y$ 为基模孤子的束宽，对应的高阶孤子的束宽为 $a_{xn}=\sqrt{(2m+1)}a_{x0}$,$a_{ym}=\sqrt{(2n+1)}a_{y0}$[11]。

由(17)～(21)式可得，当 $P_0=P_{cx}=P_{cy}$ 时，光束束宽保持不变，波前曲率系数为零，即形成椭圆厄米-高斯空间光孤子，其表达式为

$$\phi_{nm}(x,y,z)=\frac{c_{nm}}{\sqrt{a_{x0}a_{y0}}}\mathrm{H}_n\left[\frac{x}{a_{x0}(z)}\right]\mathrm{H}_m\left[\frac{y}{a_{y0}(z)}\right]\exp(\mathrm{i}\Phi_{nm}z)\exp\left[-\frac{x^2}{2a_{xn}(z)^2}-\frac{y^2}{2a_{ym}(z)^2}\right], \tag{22}$$

式中 $c_{nm}=[P_0/(\pi 2^{n+m}n!m!)]^{1/2}$ 为归一化常数；Φ_{nm} 为相移系数，其具体表达式为

$$\Phi_{nm}=\frac{R_0}{\gamma_x k a_{x0}^4}-\frac{3(2n+1)}{4ka_{x0}^2}-\frac{3(2m+1)}{4ka_{y0}^2}, \tag{23}$$

考虑到 γ_x 与 R_0/w_x^2 有关，γ_y 与 R_0/w_y^2 有关，$w=w_y/w_x$,w_x,w_y 分别是介质响应函数在 x,y 方向的特征宽度[20]，(23)式可化简为

$$\Phi_{nm}=\frac{3}{4ka_{x0}^2}\left[\frac{4\nu w_x^2}{3a_{x0}^2}-(2n+1)-\frac{(2m+1)}{w}\right]. \tag{24}$$

式中 ν 为材料系数，由介质自身性质决定，数量级为 1[20]。

4 相　　移

依据(24)式对附加相移进行数量级粗略计算，此时可把 $4\nu/3$ 近似取为 1：

$$\Phi_{nm}\approx\frac{3}{4ka_{x0}^2}\left[\frac{w_x^2}{a_{x0}^2}-(2n+1)-\frac{2m+1}{w}\right]. \tag{25}$$

假设强非局域介质响应函数的特征宽度与光束束宽比满足 $\alpha_x=w_x/a_{x0}=10$(表征强非局域程度)，对于基阶光孤子情形，$m=n=0$，圆对称时椭圆率 $w=w_y/w_x=1$，(25)式退化为 $\Phi\approx 3(100-1-1)/(4ka_{x0}^2)$；相移 Φ_{00} 的正数项远大于负数项(负数项可以忽略不计)，可以得到大的正相移[3]。椭圆对称时，$\Phi_{00}\approx 3(100-1-1/w)/(4ka_{x0}^2)$，一般也产生大的正相移；要出现零相移则要求 $w\approx 0.01$，只有椭圆率非常小时才可以产生负相移。对于高阶空间光孤子情形，我们发现相移系数的负数项随着阶数的增大而增大，假如是圆对称高阶，即 $w=w_y/w_x=1$，令 $\Phi_{nm}=0$，得 $m=n=25$。可见要实现零相移需要很高的阶数，实际中难以做到。对于椭圆厄米-高斯空间型光孤子，当达到一定阶数时，不需要 w 很小就能产生零相移。如 $m=n=5$ 时，$w\approx 0.1$，则有可能实现 $\Phi_{55}\approx 0$；当 $w<0.1$ 或 $m=n>5$ 甚至可以实现负的相移。

5 结　　论

依据强非局域模型即强非局域介质响应函数的特征宽度远大于光束束宽(α_x,$\alpha_y\geqslant 10$)，把椭圆对称响应函数进行两次泰勒级数展开，每次都近似取到二阶，可得到与 NNLSE 相对应的近似简化的拉格朗日密度函数。在此基础上再运用变分法对 NNLSE 进行求解，探讨了 1+2 维椭圆厄米-高斯光束在强非局域非线性介质中的传输特性，导出了光束各参量的演化方程、演化规律和两个束宽横向方向上对应的临界功率。当光束、响应函数的椭圆率满足一定条件时，两个临界功率可以相等。当初始功率等于这一临界功率，且光束从光腰处入射时，可得到椭圆厄米-高斯空间光孤子。对椭圆厄米-高斯空间光孤子的相位进一步分析，发现椭圆厄米-高斯空间光孤子的相移与介质椭圆率和孤子阶数有密切关系，当介质椭圆率和孤子阶数取不同值时，可产生正相移、零相移和负相移，特别是其比普通的高斯孤子和圆对称高阶高斯空间光孤子更易实现零相移，甚至可以得到负相移。

参 考 文 献

1 Cao Jueneng, Guo Qi. Properties of spatial optial solitions to different degrees of nonlocality[J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(8): 3688～3693

曹觉能, 郭 旗. 不同非局域程度条件下空间光孤子的传输特性[J]. 物理学报, 2005, **54**(8):3688～3693

2 A. W. Snyder, D. J. Mitchell. Accessible solitons [J]. *Science*, 1997, **276**(5318): 1538～1541

3 Q. Guo, B. Luo, F. Yi *et al*.. Large phase shift of nonlocal optical spatial solitons [J]. *Phys. Rev. E*, 2004, **69**(1): 016602

4 W. Krolikowski, O. Bang. Solitons in nonlocal nonlinear media: exact solutions [J]. *Phys. Rev. E*, 2000, **63**(1): 016610

5 Q. Guo, B. Luo, S. Chi. Optical beams in sub-strongly non-local nonlinear media: a variational solution[J]. *Opt. Commun.*, 2006, **259**(1): 336～341

6 Wang Xinghua, Guo Qi, Xie Yiqun. Propagation properties of the paraxial Gaussian beam in strongly nonlocal media [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(6): 848～854

王形华, 郭 旗, 谢逸群. 傍轴高斯光束在强非局域介质中的传输特性[J]. 光学学报, 2005, **25**(6): 848～854

7 Wang Xinghua, Guo Qi. Propagation properties of hyperbolic secant shaped optical beam in strongly nonlocal media[J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(5): 645～649

王形华, 郭 旗. 双曲正割形光束在强非局域介质中的传输特性[J]. 中国激光, 2006, **33**(5): 645～649

8 S. G. Ouyang, Q. Guo, W. Hu. Perturbative analysis of generally nonlocal spatial optical solitons[J]. *Phys. Rev. E*, 2006, **74**(3):036622

9 H. Y. Ren, S. G. Ouyang, Q. Guo *et al*.. (1+2)-dimensional sub-strongly nonlocal spatial optical solitons: perturbation method[J]. *Opt. Commun.*, 2007, **275**(1): 245～251

10 Zhang Xiaping, Guo Qi. Analytical solution in the Hermite Gaussian form of the beam propagating in the strong nonlocal media[J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(7): 3178～3182

张霞萍, 郭 旗. 强非局域非线性介质中光束传输的厄米高斯解[J]. 物理学报, 2005, **54**(7):3178～3182

11 Bai Dongfeng, Guo Qi, Hu Wei. Variational investigation of Hermite-Gaussian beam propagation in nonlocal Kerr media [J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, **57**(9): 5684～5689

白东峰, 郭 旗, 胡 巍. 非局域克尔介质中厄米-高斯光束传输特性的变分研究[J]. 物理学报, 2008, **57**(9): 5684～5689

12 Dai Jihui, Guo Qi. Optical beams in nonlocal nonlinear media: a variational solution of the Laguerre-Gauss form[J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, **57**(8): 5001～5006

戴继慧, 郭 旗. 非局域非线性介质中光束传输的拉盖尔-高斯变分解[J]. 物理学报, 2008, **57**(8): 5001～5006

13 Zhang Xiaping, Liu Youwen. Analytical solution in the Ince-Gaussian form of the beam propagating in the strong nonlocal media[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, **58**(12): 8332～8338

张霞萍, 刘友文. 强非局域非线性介质中光束传输的 Ince-Gauss 解[J]. 物理学报, 2009, **58**(12): 8332～ 8338

14 D. M. Deng, X. Zhao, Q. Guo *et al*.. Hermite-Gaussian breathers and solitons in strongly nonlocal nonlinear media [J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2007, **24**(9): 2537～2544

15 F. G. Ye, Y. V. Kartshov, B. B. Hu *et al*.. Twin-vortex solitons in nonlocal nonlinear media[J]. *Opt. Lett.*, 2010, **35**(5): 628～630

16 J. C. Liang, Z. B. Cai, L. Li *et al*.. Bessel solitary waves in strongly nonlocal nonlinear media [J]. *Opt. Commun.*, 2010, **283**(3): 386～390

17 Zhao Xin, Chu Cunkun, Zhang Dongsheng *et al*.. (1+1)-dimensional higher-order mode breathers in strongly nonlocal nonlinear media[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(5): 965～970

赵 昕, 楚存坤, 张东升 等. (1+1)维强非局域非线性介质中的高阶模呼吸子[J]. 光学学报, 2008, **28**(5): 965～970

18 Chen Susong. Two-dimensional self-similar soliton waves in highly nonlocal media[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(6): 1653～1658

陈粟宋. 强非局域介质中的二维自相似孤子波[J]. 光学学报, 2009, **29**(6): 1653～1658

19 Li Shaohua, Yang Zhenjun, Hu Wei *et al*.. Numerical study of Hermite-Gaussian beams in nonlocal thermal media[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(2): 024214

李少华, 杨振军, 胡 巍 等. 厄米-高斯光束在热非局域介质中传输的数值模拟研究[J]. 物理学报, 2011, **60**(2): 024214

20 Qin Xiaojuan, Guo Qi, Hu Wei *et al*.. Strongly nonlocal elliptical spatial optical soliton[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(3): 1237～1243

秦晓娟, 郭 旗, 胡 巍 等. 椭圆强非局域空间光孤子[J]. 物理学报, 2006, **55**(3): 1237～1243