

基于快速傅里叶变换的相位解包裹算法

张志会¹ 王华英² 刘佐强¹ 黄敏³ 刘飞飞¹ 于梦杰¹ 赵宝群²

¹ 河北工程大学信息与电气工程学院, 河北 邯郸 056038
² 河北工程大学理学院, 河北 邯郸 056038
³ 河北工程大学机电学院, 河北 邯郸 056038

摘要 为了能够同时处理含有较强噪声和欠采样区域的包裹相位图,对基于快速傅里叶变换的4种典型相位解包裹算法的速度、准确性及适用范围等相关问题进行了深入的研究,并且通过计算机模拟分析了该类算法中的4种经典算法的抗噪能力和处理含有欠采样情况的能力。结果表明,对于含有强噪声的数据,基于四次快速傅里叶变换算法的效果最好,基于横向剪切干涉和傅里叶变换相结合的算法效果最差;对于含有欠采样的数据,基于横向剪切干涉和傅里叶变换相结合的算法效果最好,基于四次快速傅里叶变换算法次之;对同时含有噪声和欠采样区域的实验数据,基于四次快速傅里叶变换的相位解包裹算法精度最高。

关键词 全息术;相位解包裹算法;快速傅里叶变换;欠采样;噪声

中图分类号 O438.1 文献标识码 A doi: 10.3788/LOP49.120902

Phase Unwrapping Algorithms Based on Fast Fourier Transform

Zhang Zhihui¹ Wang Huaying² Liu Zuoqiang¹ Huang Min³ Liu Feifei¹
 Yu Mengjie¹ Zhao Baoqun²

¹ School of Information and Electronic Engineering, Hebei University of Engineering, Handan, Hebei 056038, China
² College of Science, Hebei University of Engineering, Handan, Hebei 056038, China
³ College of Mechanical and Electrical Engineering, Hebei University of Engineering, Handan, Hebei 056038, China

Abstract In order to process the wrapped phase map with strong noise and under-sampled area simultaneously, four kinds of phase unwrapping algorithms based on fast Fourier transform are studied in depth and the speed, accuracy and the range of applications are expounded. The effective of denoising and dealing with the under-sampled situations of four kinds of algorithms are verified by computer simulations and experimental demonstrations. The results demonstrate that when the data contain strong noises, the quartic Fourier transform algorithm is the best, the combination algorithm based on lateral shearing interferometry and Fourier transform is the worst. While the data have under-sampled areas, the combination algorithm based on lateral shearing interferometry and Fourier transform is the best, followed by the quartic Fourier transform algorithm. When the experimental data contain both noises and under-sampled areas, the quartic Fourier transform algorithm can obtain the highest-precision results.

Key words holography; phase unwrapping algorithm; fast Fourier transform; under sampling; noise

OCIS codes 090.2880, 090.1995, 100.5088

收稿日期: 2012-06-10; 收到修改稿日期: 2012-07-12; 网络出版日期: 2012-10-18

基金项目: 国家自然科学基金(61077001, 61144005)、河北省自然科学基金(F2010001038, F2012402059)、河北省科技支撑计划(09277101D)和河北省教育厅科学研究重点项目(ZH2011241)资助课题。

作者简介: 张志会(1985—),女,硕士研究生,主要从事数字全息技术及位相解包裹等方面的研究。

E-mail: 1shuiwuh@126.com

导师简介: 王华英(1963—),女,博士,教授,主要从事光学信息处理及数字全息技术等方面的研究。

E-mail: pbxsiyngzi@126.com(通信联系人)

1 引言

相位解包裹是很多基于相位测量技术中所面临的共同问题,如光学计量术^[1]、数字全息术^[2,3]、磁共振成像技术^[4]和合成孔径雷达干涉技术^[5]等,因此具有通用性^[6]。然而在实际应用中,由于噪声、阴影及欠采样等因素的影响,相位解包裹成为一个非常困难的问题。30多年来,虽然国内外学者提出了很多算法,但还没有一种算法能够完全解决相位解包裹中的所有问题,因此,寻找出适合于不同情况下的最优相位解包裹算法有着十分重要的意义^[2,3]。

至今,关于相位解包裹算法的分类有很多种,比较经典的分类方法将所有相位解包裹算法分为两类:路径跟踪算法和路径无关算法,但是这种分类方法比较笼统,对于不同情况的相位解包裹算法的选择问题并不能很好地提供参考。文献[2]提出了新的分类方法,将算法分为5类,其中,基于傅里叶变换的相位解包裹算法是比较有前景的一类算法,然而并没有对该类算法中几种不同方法进行深入的分析和比较。本文将对这类算法进行详细地研究,并通过计算机模拟对该类算法中的4种经典算法的抗噪能力和处理欠采样的能力进行比较。

2 原理及分析

基于傅里叶变换的相位解包裹算法的特点就是在求解的过程中应用了快速傅里叶变换,虽然各种算法应用傅里叶变换的原理不同,但是都有一个共同的优点,那就是运算速度比较快,这是由傅里叶变换自身的特点所决定的,尤其是当图像的大小是2的偶数次幂时,运算速度会更快;并且由于在频域中对数据进行操作不是点对点一一对应的,因此将相位解包裹从空域引入到频域能够很好地解决空域中的噪声等问题。

二维相位解包裹的数学模型可表示为

$$\phi_{i,j} = \varphi_{i,j} + 2\pi k_{i,j}, \quad (1)$$

式中 $\varphi_{i,j}$ 为包裹相位, $-\pi < \varphi_{i,j} \leq \pi$; $\phi_{i,j}$ 为真实连续相位场; $k_{i,j} \in Z$, M, N 分别为行和列的像素数, $0 \leq i \leq M-1$, $0 \leq j \leq N-1$ 。二维相位解包裹的任务就是从包裹相位 $\varphi_{i,j}$ 中估计适当的 $k_{i,j}$, 从而得到真实连续的相位场 $\phi_{i,j}$ 。

最小 L^p 范数法从原理上来说就是进行曲面拟合,其关键是范数的选取问题, $p=2$ 成为目前研究比较多的无权最小二乘相位解包裹算法^[7]。无权的无权最小二乘相位解包裹问题可以转化为求解离散泊松方程的问题,求解离散泊松方程的方法有很多,拓展了相位解包裹的思路。离散泊松方程为

$$(\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}) + (\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}) = \rho_{i,j}, \quad (2)$$

$$\rho_{i,j} = (\nabla_x^2 \varphi_{i,j} - \nabla_x^2 \varphi_{i-1,j}) + (\nabla_y^2 \varphi_{i,j} - \nabla_y^2 \varphi_{i,j-1}). \quad (3)$$

(3)式中含有拉普拉斯算子,由于拉普拉斯算子和傅里叶变换之间存在转换关系,因此, Schofield 等^[8]提出了基于四次快速傅里叶变换算法(四次 FFT)。该算法需要进行四次傅里叶变换和四次逆傅里叶变换,并且需要“镜像”操作,因此计算量比较大。为了缩短运行时间, Volkov 等^[9]又提出了基于二次傅里叶变换的算法(二次 FFT),运行速度明显比第一种算法快。后来,朱勇建等^[10]提出了基于四次离散余弦变换算法(四次 DCT),由于离散余弦变换可以通过傅里叶变换得到,故将该算法也放到这类中,该类算法不需要进行“镜像”操作,运行速度比较快;针对欠采样的问题,范琦等^[11]提出了一种基于横向剪切干涉和傅里叶变换相结合的算法(LS-FFT),这种算法能够解决欠采样问题,但是还不清楚该算法对于噪声的处理效果。本文将通过计算机模拟比较4种算法对于噪声和欠采样的处理效果。

2.1 基于四次快速傅里叶变换算法

根据文献[8],由四次快速傅里叶变换算法得到的解包裹相位的估计值为

$$\phi_e = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ (\cos \varphi_{i,j}) \mathcal{F}^{-1} [(f_x^2 + f_y^2) \mathcal{F}(\sin \varphi_{i,j})] \} / (f_x^2 + f_y^2) \} - \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ (\sin \varphi_{i,j}) \mathcal{F}^{-1} [(f_x^2 + f_y^2) \mathcal{F}(\cos \varphi_{i,j})] \} / (f_x^2 + f_y^2) \}, \quad (4)$$

式中 \mathcal{F} 、 \mathcal{F}^{-1} 分别表示二维快速傅里叶变换及其逆变换, p 和 q 分别为 x 方向和 y 方向的空间频率。最终的解包裹相位可以通过估计值按照下式进行迭代求得:

$$\phi_{k+1} = \phi_k + 2\pi R[(\phi_e - \phi_k)/(2\pi)], \quad (5)$$

式中 k 为迭代步数, 当 $k=0$ 时, 选择 ϕ_0 为包裹相位; 函数 $R(\cdot)$ 为取整函数。

该算法的优点是抗噪效果较好, 但由于一般情况下需要迭代 $2\sim 3$ 次, 因此计算时至少需要 8 次傅里叶变换和 8 次傅里叶逆变换, 导致运行时间很长。与此同时, 由于边界问题, 该算法需要对图像进行“镜像”操作, 使运算时间增加了 $3N^2$ 倍。

2.2 基于四次离散余弦变换算法

该算法的原理和基于四次傅里叶变换算法的原理类似, 只是将(4)式中的 \mathcal{F} 和 \mathcal{F}^{-1} 替换为 \mathcal{C}_d 和 \mathcal{C}_d^{-1} 即可:

$$\begin{aligned} \phi_e = & \mathcal{C}_d^{-1} \{ \mathcal{C}_d \{ (\cos \varphi_{i,j}) \mathcal{C}_d^{-1} [(p^2 + q^2) \mathcal{C}_d (\sin \varphi_{i,j})] \} / (p^2 + q^2) \} - \\ & \mathcal{C}_d^{-1} \{ \mathcal{C}_d \{ (\sin \varphi_{i,j}) \mathcal{C}_d [(p^2 + q^2) \mathcal{C}_d (\cos \varphi_{i,j})] \} / (p^2 + q^2) \}. \end{aligned} \quad (6)$$

然后把(6)式代入(5)式即可以得到真实的相位值。

该算法的优点是比较适合解决含有欠采样的数据, 不需要“镜像”操作, 但对于噪声处理效果不是很好, 同时由于至少需要进行 8 次傅里叶变换, 因此运行速度较慢。

2.3 基于二次傅里叶变换算法

由文献[9], 基于二次快速傅里叶变换算法得到的解包裹相位为

$$\phi_{x,y} = \text{Re} \{ \mathcal{F}^{-1} \{ [\mathcal{F}(\partial_x \phi_{x,y}) p^2 + \mathcal{F}(\partial_y \phi_{x,y}) q^2] / (p^2 + q^2) \} / (2\pi i) \}, \quad (7)$$

式中 $\text{Re}(\cdot)$ 为求复数实部的操作, $\partial_x \phi_{x,y}$ 、 $\partial_y \phi_{x,y}$ 分别为 $\phi_{x,y}$ 在 x 、 y 方向的偏微分, i 为虚数单位。可以通过

$$Z_{x,y} = \exp[i(\varphi_{x,y} + 2\pi k_{x,y})] = \exp(i\varphi_{x,y}), \quad (8)$$

$$\nabla_{\perp} \phi_{x,y} = \text{Re}[\nabla_{\perp} Z_{x,y} / iZ_{x,y}], \quad (9)$$

得到 $\partial_x \phi_{x,y}$ 和 $\partial_y \phi_{x,y}$, 式中 ∇_{\perp} 为梯度运算符。

该算法的优点是只需要二次傅里叶变换和一次傅里叶逆变换, 所以运行速度比较快, 但是也需要对图像进行“镜像”操作。此外, 该算法对于处理欠采样的数据效果不是很好。

2.4 基于横向剪切干涉和傅里叶变换相结合算法

该算法的原理是^[11]: 首先利用横向剪切干涉得到 x 方向和 y 方向的包裹相位差图, 然后根据某种常用的相位解包裹算法对这两个包裹相位差图进行解包裹运算, 得到两个解包裹相位差图, 最后应用傅里叶变换和最小二乘法恢复出真实相位分布。

解包裹后的相位差 $\Delta\varphi_x(x, y)$ 和 $\Delta\varphi_y(x, y)$ 与真实相位之间的关系为

$$\Delta\varphi_x(x, y) = \phi(x + s, y) - \phi(x, y), \quad (10)$$

$$\Delta\varphi_y(x, y) = \phi(x, y + s) - \phi(x, y), \quad (11)$$

式中 s 为剪切量, 通常取其为一个像素大小。可以推得真实相位在 x 方向和 y 方向的一维估计为

$$\phi_x(x, y) = \mathcal{F}_x^{-1} \{ \mathcal{F}_x [\Delta\varphi_x(x, y)] / [\exp(i2\pi f_x s) - 1] \}, \quad (12)$$

$$\phi_y(x, y) = \mathcal{F}_y^{-1} \{ \mathcal{F}_y [\Delta\varphi_y(x, y)] / [\exp(i2\pi f_y s) - 1] \}, \quad (13)$$

式中 f_x 和 f_y 为 x 方向和 y 方向的空间频率, \mathcal{F}_x 和 \mathcal{F}_x^{-1} 为 x 方向的一维傅里叶变换和一维傅里叶逆变换, \mathcal{F}_y 和 \mathcal{F}_y^{-1} 为 y 方向的一维傅里叶变换和傅里叶逆变换。

应用最小二乘原理可以得到真实相位 $\phi(x, y)$ 与 x 、 y 方向的一维估计 $\phi_x(x, y)$ 、 $\phi_y(x, y)$ 之间的关系为

$$\phi(x, y) = \{ [\phi_x(x, y) + d_x(x)] + [\phi_y(x, y) + d_y(y)] \} / 2, \quad (14)$$

式中 $d_x(x)$ 和 $d_y(y)$ 为一维估计 $\phi_x(x, y)$ 、 $\phi_y(x, y)$ 与 $\phi(x, y)$ 之间的相位偏差, 它们可以通过最小二乘波前拟合法求得。

该算法的优点是适合于处理含有欠采样的数据, 但对于噪声的处理情况不明确。通过计算机模拟对其进行分析。

3 计算机模拟验证 4 种算法对噪声的处理效果

图像经常会被噪声污染, 噪声可能发生在图像的获取过程中, 或者在图像的传输期间, 甚至在图像的再现期间。因此消噪是图像处理中一项重要的任务。不少学者对于散斑噪声的抑制提出了解决方法, 其中大

部分方法都是基于滤波技术^[12,13],然而,滤波虽能削弱噪声,但同时也会损失物体部分信息,从而影响测量精度。因此,这里不采用滤波方法对全息图以及再现像进行处理,而是通过寻找一种本身就有消噪功能的相位解包裹算法来获得比较准确的相位信息。

为了研究4种相位解包裹算法是否能够处理强噪声数据,选择 $128 \text{ pixel} \times 128 \text{ pixel}$ 的峰函数作为模拟数据。

首先,将 $0.1 \times P(128)$ 的随机噪声加到峰函数上, $P()$ 为随机噪声产生函数,计算机模拟的峰函数的真实相位及其包裹相位如图1所示。其中图1(a)、(b)分别表示真实相位的二维及三维分布,图1(c)为包裹相位的二维分布。

图2(a)~(d)依次为利用四次FFT、四次DCT、二次FFT和LS-FFT4种算法获得的解包裹相位的二维分布;图2(e)~(h)分别是其三维相位分布;图2(i)~(l)分别是4种算法获得的相位重包裹结果。

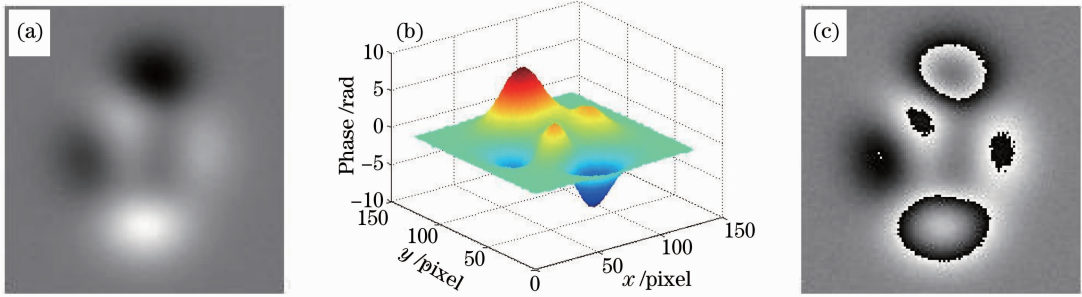


图1 模拟的峰函数的相位分布。(a)真实相位的二维分布;(b)三维分布;(c)包裹相位图

Fig.1 Phase distributions of the simulated peak function. (a) Real phase 2D distribution; (b) 3D phase distribution; (c) wrapped phase distribution

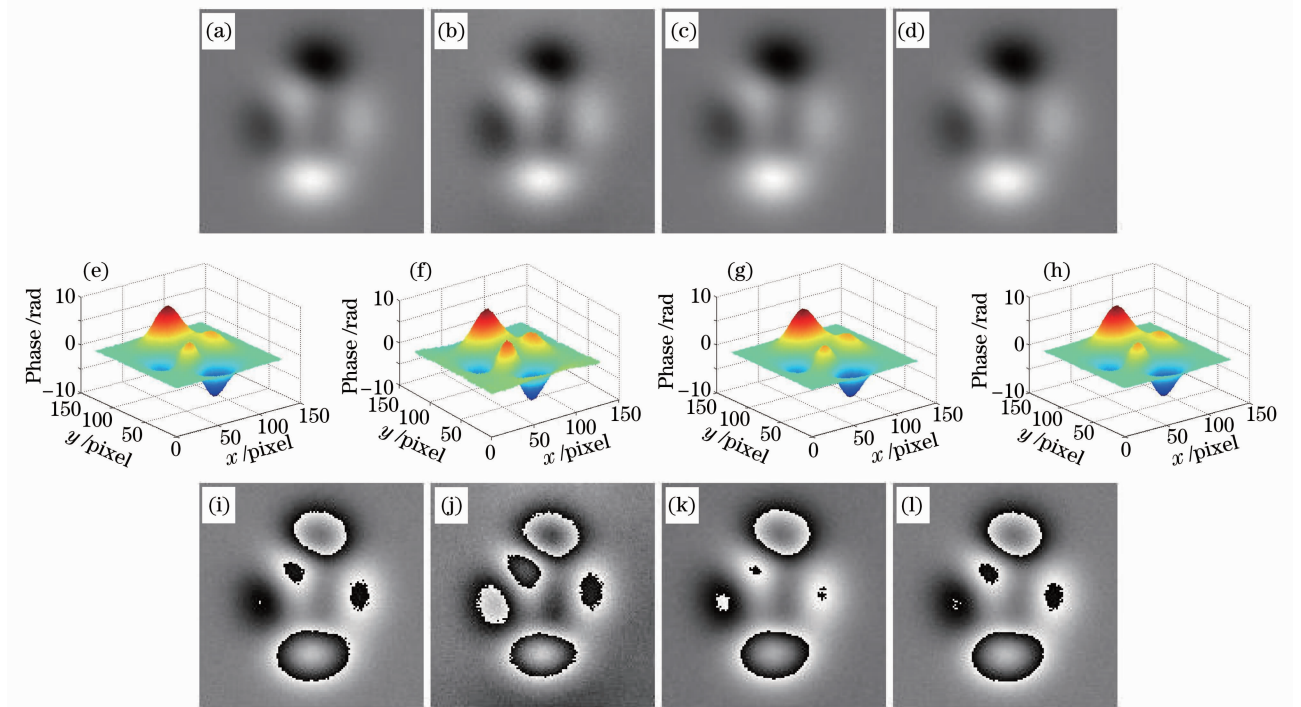


图2 4种算法对于弱噪声的处理结果。(a)~(d)依次为由四次FFT、四次DCT、二次FFT和LS-FFT获得展开相位的二维分布;(e)~(h)依次为(a)~(d)的三维分布;(i)~(l)依次为(a)~(d)的重包裹相位分布

Fig.2 Obtained phase by the four algorithms for weak noisy phase map. (a)~(d) 2D phase distributions obtained by the quartic FFT, quartic DCT, second FFT and LS-FFT algorithms respectively; (e)~(h) 3D phase distributions of (a)~(d) respectively; (i)~(l) rewrapped phase map of (a)~(d) respectively

直观来看,图 2(a)~(d)与图 1(a)差异都比较小。将图 2(e)~(h)分别与图 1(b)比较可知,图 2(b)效果最差。进一步比较图 2(i)~(l)与图 1(c)可知,4 种算法对于含有噪声的包裹相位图的处理效果从好到坏依次是四次 FFT、LS-FFT、二次 FFT 和四次 DCT。

将随机噪声的强度加大为 0.2 时,模拟的峰函数的真实相位及包裹相位如图 3(a)和(f)所示。图 3(b)~(e)分别为利用四次 FFT、四次 DCT、二次 FFT 和 LS-FFT 四种算法获得的解包裹相位分布;图 3(g)~(j)分别是相应的相位重包裹结果。

比较图 3(f)~(j)可知,图 3(g)与(f)最接近,图 3(i)次之,图 3(j)与图 3(f)差异最大。因此,4 种算法对于噪声的处理效果从好到坏依次是四次 FFT、二次 FFT、四次 DCT 和 LS-FFT。特别需要注意的是,当噪声较强时,LS-FFT 算法出现了严重的解包裹错误,可见该算法对噪声的免疫能力非常差。

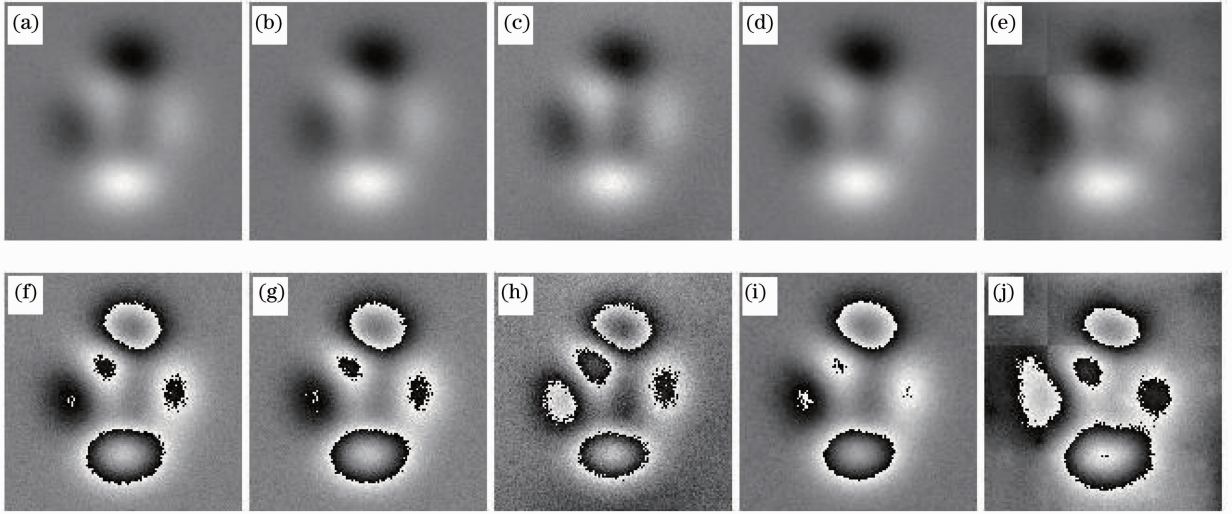


图 3 4 种算法对于强度噪声的处理结果。(a) 峰函数的真实相位分布;(b)~(e) 依次为四次 FFT、四次 DCT、二次 FFT 和 LS-FFT 获得的展开相位;(f) 原始包裹相位图;(g)~(j) 依次为(b)~(e)的重包裹相位图

Fig. 3 Obtained phase by the four algorithms for strong noisy phase map. (a) Real phase distribution of peak function; (b)~(e) results obtained by the quartic FFT, quartic DCT, second FFT and LS-FFT respectively; (f) original wrapped phase; (g)~(j) rewrapped phase map of (b)~(e) respectively

4 计算机模拟验证 4 种算法对欠采样情况的处理效果

当相位在空间中变化较快时,就可能造成包裹相位图相邻像素之间的相位差大于 π ,将出现包裹条纹“混叠”现象,即“欠采样”现象(此时的包裹相位图称为欠采样包裹相位图),使得解包裹产生很大的误差甚至无法顺利完成,因此很有必要验证各种相位解包裹算法对于欠采样的处理效果^[14]。

在理想情况下,当包裹相位的相邻相位差小于 π 时,包裹相位梯度应该和真实相位梯度相等;然而,在实际情况下,干涉图像在噪声、欠采样、重叠和阴影的影响下,包裹相位梯度与真实相位梯度不再相等,因此用相位解包裹算法得到的估计相位重包裹后的条纹数和原始包裹相位的条纹数将不再相等,这种现象就是真实相位“坡度”欠估计现象^[15],通过这个现象对模拟结果进行评价。

为了验证相位解包裹算法是否能够处理含有欠采样的数据,模拟相位数据选择函数

$$\phi(m, n) = 120 \sin\left(\frac{m\pi}{128}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{128}\right), \quad (15)$$

式中 $m=1, 2, \dots, 128$; $n=1, 2, \dots, 128$ 。对其进行包裹,得到包裹相位 $\phi(m, n)$ 为

$$\varphi(m, n) = W[\phi(m, n)], \quad (16)$$

式中 W 为包裹操作运算符。

模拟函数的二维相位分布如图 4(a)所示。对(15)式进行包裹操作,得到包裹相位图如图 4(f)所示,其相邻像素相位差的最大值为 6.205 rad,约等于 1.97π ,所以包裹相位图存在欠采样区域。图 4(f)中的欠采

样区域如图中边框里面的区域。

利用四次 FFT、四次 DCT、二次 FFT 和 LS-FFT 四种算法获得的解包裹相位分布分别如图 4(b)~(e) 所示,图 4(g)~(j) 分别是其重包裹相位图。

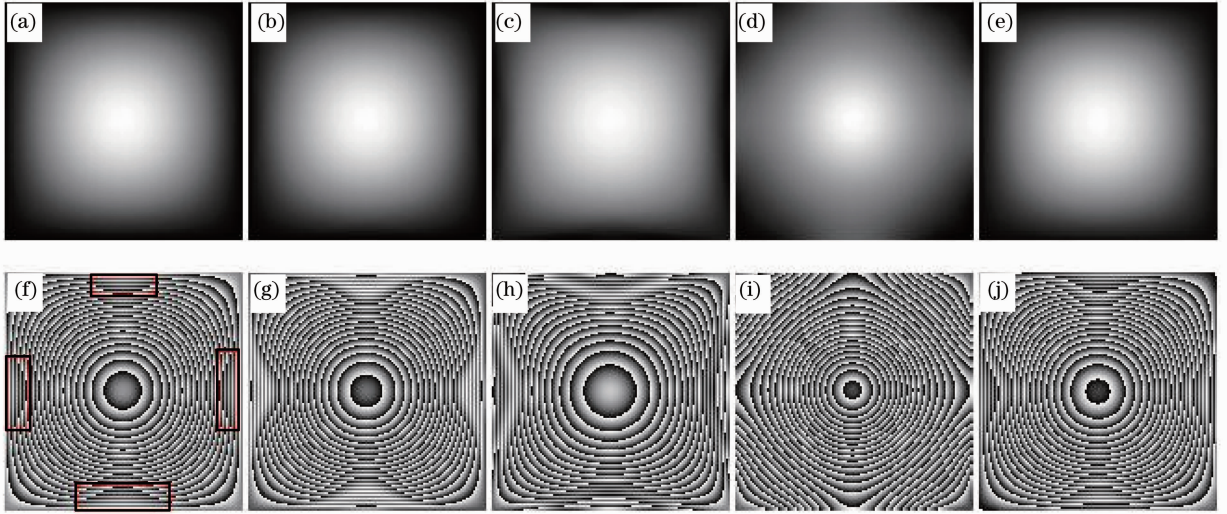


图 4 4 种算法对于欠采样的处理结果。(a) 模拟的真实相位分布;(b)~(e) 依次为四次 FFT、四次 DCT、二次 FFT 和 LS-FFT 获得的展开相位;(f) 原始包裹相位图;(g)~(j) 依次为(b)~(e) 的重包裹相位图

Fig. 4 Obtained phase by the four algorithms for the under-sampled phase map. (a) Real phase distribution of simulation data; (b)~(e) results obtained by the quartic FFT, quartic DCT, second FFT and LS-FFT respectively; (f) wrapped phase map; (g)~(j) rewrapped phase map of (b)~(e) respectively

通过将图 4(b)~(e) 4 幅图像与原始真实相位图 4(a) 相比发现:图 4(b) 和 (e) 得到的解包裹相位与原始真实相位最接近,即四次 FFT 和 LS-FFT 得到的结果较好;图 4(d) 与真实相位差异最大,因此二次 FFT 算法得到的结果最差;四次 DCT 算法得到的结果在欠采样区域存在较大误差。在这 4 种算法中,究竟哪种方法更为准确,不能只凭直观来看,还需要作进一步的分析。因此通过将 4 种算法得到的包裹相位进行重包裹,然后比较重包裹相位条纹和原始包裹相位条纹的数量和形状,即是否存在真实相位“坡度”欠估计现象来判断算法的好坏。重包裹后的相位图如图 4(g)~(j) 所示。

通过将 4 种算法的重包裹相位图图 4(g)~(j) 与原始包裹相位图图 4(f) 比较可知:图 4(i) 中的条纹数以及条纹形状明显不同于原始包裹相位图,即存在真实相位“坡度”欠估计的问题,因此可知二次 FFT 存在严重的误差,不适合处理含有欠采样的包裹相位图;图 4(h) 的条纹数明显少于图 4(f) 中的条纹数,也存在真实相位“坡度”欠估计的问题,并且在欠采样区域存在严重的误差,因此四次 DCT 算法也不适合于处理含有欠采样的数据;图 4(g) 和 (j) 与图 4(f) 都比较接近,但是图 4(g) 在欠采样的区域的条纹的灰度值和图 4(f) 不同,因此,四次 FFT 算法在欠采样区域存在一定的误差。而图 4(j) 和图 4(f) 比较接近,即 LS-FFT 的结果相对更为准确。因此,对于处理含有欠采样的包裹相位图,LS-FFT 效果最好,四次 FFT 次之。

5 结 论

本文对基于傅里叶变换相位解包裹算法的速度、准确性及适用范围等相关问题进行了深入的研究,并通过计算机模拟实验验证了 4 种经典算法对于处理含有噪声和欠采样的包裹相位图的效果。结果表明,对于含有强噪声的数据,四次 FFT 效果最好,LS-FFT 算法效果最差;对于含有欠采样的数据,LS-FFT 算法效果最好,四次 FFT 算法次之。因此,综合上述两种情况,对含有噪声和欠采样区域的包裹相位图,基于四次 FFT 算法的相位解包裹算法精度最高。基于傅里叶变换相位解包裹算法具有运行速度快、抗噪能力较强等优点,具有很好的应用前景,为研究相位解包裹算法提供了新的参考价值。

参 考 文 献

- 1 Zhu Yongjian, Luan Zhu, Sun Jianfeng *et al.*. Quality weight based discrete cosine transform phase unwrapping algorithm in optical interferogram processing[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(5): 848~852
朱勇建, 栾竹, 孙建锋等. 光学干涉图像处理中基于质量权值的离散余弦变换解包裹相位[J]. *光学学报*, 2007, **27**(5): 848~852
- 2 Wang Huaying, Zhang Zhihui, Liao Wei *et al.*. Phase unwrapping algorithms in image plane digital holographic microscopy [J]. *J. Optoelectronics • Laser*, 2012, **23**(2): 402~407
王华英, 张志会, 廖微等. 像面数字全息显微中的相位解包裹算法研究[J]. *光电子·激光*, 2012, **23**(2): 402~407
- 3 Wang Huaying, Zhang Zhihui, Xiong Nanyan *et al.*. Study on the unwrapping algorithm of under-sampled wrapped phase map[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2012, **24**(10): 2311~2317
王华英, 张志会, 熊南燕等. 欠采样包裹相位图的展开算法研究[J]. *强激光与粒子束*, 2012, **24**(10): 2311~2317
- 4 Li Xiaoyu, Mao Shiyi. Study on phase unwrapping algorithms for interferometric SAR and magnetic resonance imaging[J]. *Chinese J. Stereology and Image Analysis*, 2001, **6**(4): 193~198
李笑郁, 毛士艺. 干涉 SAR 与 MRI 中的相位展开算法研究[J]. *中国体视学与图像分析*, 2001, **6**(4): 193~198
- 5 Song Fang. Phase Unwrapping in Interferometric Synthetic Aperture Radar [D]. Chengdu: Sichuan University, 2005. 27~71
宋芳. 合成孔径雷达干涉测量中的相位展开[D]. 成都: 四川大学, 2005. 27~71
- 6 Yu Yingjie, Li Guopei, Chen Mingyi. Phase unwrapping in interferogram processing[J]. *J. Astronautic Metrology and Measurement*, 2002, **22**(4): 49~54
于瀛洁, 李国培, 陈明仪. 干涉图处理中的相位去包裹技术[J]. *宇航技术*, 2002, **22**(4): 49~54
- 7 Zhang Yizhuo, Wang Dayong, Zhao Jie *et al.*. Investigation on phase unwrapping algorithms in digital holography[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(12): 3323~3327
张亦卓, 王大勇, 赵洁等. 数字全息中实用相位解包裹算法研究[J]. *光学学报*, 2009, **29**(12): 3323~3327
- 8 M. A. Schofield, Y. M. Zhu. Fast phase unwrapping algorithm for interferometric applications[J]. *Opt. Lett.*, 2003, **28**(14): 1194~1196
- 9 V. V. Volkov, Y. M. Zhu. Deterministic phase unwrapping in the presence of noise[J]. *Opt. Lett.*, 2003, **28**(22): 2156~2158
- 10 Zhu Yongjian, Li Anhu, Pan Weiqing *et al.*. Fast phase unwrapping algorithms used for structural light measurement[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, **38**(1): 184~188
朱勇建, 李安虎, 潘卫清等. 结构光测量中快速相位解包裹算法的讨论[J]. *光子学报*, 2009, **38**(1): 184~188
- 11 Fan Qi, Yang Hongru, Li Gaoping *et al.*. Method for phase recovery from a single undersampled wrapped phase map[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(3): 63~67
范琦, 杨鸿儒, 黎高平等. 欠采样包裹相位图的恢复方法[J]. *光学学报*, 2011, **31**(3): 63~67
- 12 Y. H. Huang, F. Janabi-Sharifi, Y. S. Liu *et al.*. Dynamic phase measurement in shearography by clustering method and Fourier filtering[J]. *Opt. Express*, 2011, **19**(2): 606~615
- 13 K. M. Qian, W. J. Gao, H. X. Wang. Windowed Fourier filtered and quality guided phase unwrapping algorithm; on locally high-order polynomial phase[J]. *Appl. Opt.*, 2010, **49**(7): 1075~1079
- 14 Zhang Xiong, Qian Xiaofan. An improvement on the least-squares phase unwrapping algorithm for undersampled interferogram[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, **40**(1): 121~125
张雄, 钱晓凡. 欠采样干涉图最小二乘相位解包裹算法改进[J]. *光子学报*, 2011, **40**(1): 121~125
- 15 R. Bamler, N. Adam, G. W. Davidson *et al.*. Noise-induced slope distortion in 2-D phase unwrapping by linear estimators with application to SAR interferometry[J]. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 1998, **36**(3): 913~921