

哈特曼-夏克波前传感器的插值重构算法

李晶^{1,2} 巩岩¹

(¹ 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所应用光学国家重点实验室, 吉林 长春 130033)

² 中国科学院大学, 北京 100049

摘要 为实现使用 Hartmann-Shack(哈特曼-夏克)波前传感器对高分辨率物镜进行高精度检测,提出了使用二维插值多项式替代泽尼克(Zernike)多项式为重构基底对被测波前进行模式重构的方法。为了验证方法的可行性,仿真高分辨率物镜设计波像差为待测波前,得到重构误差均方根(RMS)值为 0.0609λ 。模拟理想球面波为待测波前,重构精度随拟合阶数增加稳定变化。经过重构正弦波前、余弦波前、非球面波前以及含有低阶球差、彗差、象散、场曲和畸变等像差的一般波前,进一步对比了 Zernike 多项式和二维插值多项式为基底的重构精度,得到了一种较 Zernike 多项式拟合精度更高更稳定的模式重构基底。

关键词 哈特曼-夏克波前传感器;模式波前重构;泽尼克多项式;二维插值多项式

中图分类号 TH741 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/LOP49.120101

Insert Algorithm of Wavefront Reconstructions for Hartmann-Shack Wavefront Sensor

Li Jing^{1,2} Gong Yan¹

(¹ State Key Laboratory of Applied Optics, Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Science, Changchun, Jilin 130033, China
² University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract In order to use Hartmann-Shack wavefront sensor testing lithography objective lens accurately, two-dimension insert polynomial is proposed to replace Zernike polynomial, which is the basic of modal wavefront reconstruction. The wavefront aberration of a lithography lens is simulated to be the under-test wavefront. The root-mean-square (RMS) value of the reconstruction error reaches 0.0609λ . The possibility of this method is proved. The accurate of reconstruction changes stably by increase of polynomial fitting orders when the under-test wavefront is ideal spherical wavefront. By reconstructing sine wavefront, cosine wavefront, aspherical wavefront and normal wavefront which contains low order of spherical aberration, coma, astigmatism, field curvature and distortion aberrations, the accuracy of Zernike modal wavefront reconstruction and two-dimension insert modal wavefront reconstruction is compared. A more stable and accurate basic of modal wavefront reconstruction is obtained.

Key words Hartmann-Shack sensors; modal wavefront reconstruction; Zernike polynomial; two-dimension insert polynomial

OCIS codes 010.7350; 120.3930; 120.4640; 220.5050

1 引言

Hartmann-Shack(哈特曼-夏克)波前传感器利用光的几何特性,可在极短的曝光时间里测得待测光波

收稿日期: 2012-06-10; 收到修改稿日期: 2012-07-09; 网络出版日期: 2012-10-18

基金项目: 国家杰出青年科学基金(41104122)资助课题。

作者简介: 李晶(1987—),女,硕士研究生,主要从事光学系统检测和装调方面的研究。

E-mail: lijing871215@126.com

导师简介: 巩岩(1968—),男,博士,研究员,主要从事短波光学、光机系统集成等方面的研究。

E-mail: gongy@sklao.ac.cn(通信联系人)

本文电子版彩色效果请详见中国光学期刊网(<http://www.opticsjournal.net>)

的相位和强度,具有动态范围大、无需参考光、环境适应能力强和价格低廉的优点,广泛应用在激光波前检验、视光学、自适应光学、天文检测和调校天文望远镜等领域^[1~3]。

Hartmann-Shack 波前传感器以测量波前斜率为基础,通过进行波前的重构,获得被测波前信息,实现波前检验。目前常用的重构方法是基于泽尼克(Zernike)多项式的模式重构法。1934年,Zernike^[4]首次提出使用泽尼克(Zernike)多项式,随后 Nijboer^[5]将 Zernike 多项式用于描述像差的衍射理论,1979年,Cubalchini 提出用 Zernike 多项式重构波前的算法,解决了之前区域法存在的问题,但也存在模式间耦合和混淆的问题^[6],使得重构精度不够稳定,因此 Zernike 多项式并不总是数据拟合的最佳选择。段海峰等^[7]的研究结果表明,模式之间不交对波前重构与波前校正的精度影响很小。这样 Hartmann-Shack 波前传感器采用模式法进行模式选取时,只需保证重构模式彼此线性无关,就可以弱化对模式正交性的要求。针对被测对象的特性选择有效的数学模型,加强重构模式对被测波前描述的完备性研究^[7]。

为了实现高准确度的 Hartmann-Shack 波前传感器检验,需要提高波前重构的精度。本文提出将二维插值多项式代替 Zernike 多项式为基底,对被测波前进行模式重构,研究了此方法的可行性,探究了以二维插值多项式作基底时,重构精度随拟合阶数增加变化的稳定性,进一步对比了两种函数基底的重构精度,得到了一种较 Zernike 多项式拟合精度更高、更稳定的模式重构基底。

2 基本原理

2.1 Hartmann-Shack 波前传感器工作原理

Hartmann-Shack 波前传感器将完整被测波前分割成若干个子波前,以波前斜率测量为基础,获得每一个子波前的近场波面相位分布规律后,重构得到完整的波前信息,进而得出系统的光学特性参数——斯特雷尔比(SR)、点扩散函数(PSF)、传递函数(OTF)和调制传递函数(MTF)等^[8]。

Hartmann-Shack 波前传感器的关键部分由微透镜阵列和 CCD 构成,通过测量 CCD 上参考波前成像点斑与被测波前点斑在 x 、 y 方向的位移差 Δx 、 Δy ,得到子波前的波前斜率,进而得到完整波前的平均斜率测量值,即波前 Φ 的一阶导数为

$$\nabla \Phi_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \Phi_{i,j} = \frac{1}{f} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}_{i,j}. \quad (1)$$

由于 Hartmann-Shack 波前传感器得到的测量结果位于面积为 s 的单元子孔径内,在 x 、 y 方向的平均斜率 g_x 、 g_y 可表示为

$$\begin{cases} g_x = \frac{1}{s} \iint_s \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} dx dy \\ g_y = \frac{1}{s} \iint_s \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} dx dy \end{cases}. \quad (2)$$

2.2 波前重构原理

利用 Hartmann-Shack 波前传感器测得的波前斜率(即波前相位的一阶导数)还原出原始波前的过程称为波前重构。常见的波前重构方法主要分为区域法和模式法。由于区域法重构波前没有分离出波前倾斜量和离焦量,因此在光学检测中常使用模式重构法。模式法将全孔径内的波前相位展开成不同的模式,用全孔径内的测量数据去求解各模式的系数,得到完整波前展开式,从而重构出波前^[9]。

与 Zernike 多项式类似,波前可以表示为二维插值多项式的形式,即

$$\Phi(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m K_{i,p}(x) K_{j,q}(y) P_{ij}, \quad (3)$$

式中 n 、 m 分别为 x 、 y 方向上的采样点个数, P_{ij} 为波前振幅, $K_{i,p}(x)$ 和 $K_{j,q}(y)$ 分别表示定义在向量 $\mathbf{X}(x_1, \dots, x_n)$ 和 $\mathbf{Y}(y_1, \dots, y_n)$ 方向上的 p 次和 q 次插值多项式函数的基本函数。 $K_{i,p}(x)$ 、 $K_{j,q}(y)$ 定义为

$$K_{i,p}(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k, \quad (4a)$$

$$K_{j,q}(y) = \sum_{k=0}^q b_k y^k. \quad (4b)$$

插值多项式函数满足循环关系:

$$K_{i,p}(x) = \frac{x - x_{i+p}}{x_{i+p} - x_i} K_{i,p-1}(x) + \frac{x_{i+p+1} - x}{x_{i+p+1} - x_{i+1}} K_{i+1,p-1}(x), \quad (5)$$

对于 y 方向, 有相似的循环关系。将(3)式简化成

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=0}^N c_k S(x, y). \quad (6)$$

由(2)式得到平均斜率 g_x, g_y 为

$$\begin{cases} g_x = \sum_{k=1}^N c_k \frac{\partial S(x, y)}{\partial x} \\ g_y = \sum_{k=1}^N c_k \frac{\partial S(x, y)}{\partial y} \end{cases}. \quad (7)$$

(7)式的矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix} C. \quad (8)$$

这样, 波前拟合问题就转化成(8)式中对系数 C 的求解问题。考虑到平均采样点个数大于拟合项数, 构造的(8)式为超定方程组。超定方程组不存在唯一解, 常用的解法是: 矩阵的广义逆求解法、Gram-Schmidt 正交法和奇异值分解法等^[10]。由于使用奇异值分解得到的广义逆求解方程在最小二乘范数下具有稳定解, 因此选择奇异值分解法求解(8)式, 从而实现波前的多项式重构。

3 仿真实验与分析

设计仿真实验, 验证以二维插值多项式为基底模式重构的可行性, 探究这种重构方法高阶拟合的稳定性以及重构的精度。模拟高分辨率物镜设计的波像差为待测波前, 验证以二维插值多项式为基底的模式重构是否可行。以理想球面波为例, 探究二维插值多项式为基底重构精度是否随拟合阶数的增加而稳定变化, 再模拟更加复杂的正弦波, 研究以二维插值多项式为基底的重构精度。进一步模拟余弦波前、非球面波前和一般待测波前, 其中一般待测波前为含有一定低阶球差、彗差、象散、场曲和畸变等像差的波前; 分别计算以 Zernike 多项式和二维插值多项式为基底重构波前的重构误差。

3.1 二维插值多项式为基底的可行性验证

为了验证使用二维插值多项式为基底重构波前的可行性, 选择参照文献[11]中数值孔径(NA)为 0.75 的物镜设计参数, 利用设计结果的波向差构造待测波前[图 1(a)], 待测波前的 36 项 Zernike 多项式系数见表 1, 根据夫琅禾费衍射理论, 仿真生成待测波前的光束在 Hartmann-Shack 传感器上形成的方形域 CCD 光斑阵列, 利用(2)式计算各子孔径的斜率, 根据(8)式, 使用 7 阶的二维插值多项式为基底, 对该波前进行模式重构。

表 1 待测波前各项 Zernike 多项式系数

Table 1 Number of Zernike polynomial of the under-tested wavefront

Zernike order	Corresponding Zernike polynomial coefficients								
1~9	0.16	0.91	-4.5	-0.29	0.1	-0.12	-0.68	0.16	-0.79
10~18	1.01	-0.09	-0.53	0.06	-0.22	-0.11	0.91	-0.23	0.05
19~27	-0.27	0.35	-0.6	0.03	0.36	-0.09	-0.06	-0.04	0.36
28~36	0.07	-0.20	-0.20	-0.53	-0.03	0.13	0.79	0	0.06

图 1(c)、(d)给出了使用二维插值多项式为基底进行波前重构的结果, 可以看出该方法能够很好地复原原始波前, 计算得到的重构误差均方根(RMS)值为 0.0609 λ , 满足使用要求。因此, 使用 Hartmann-Shack 波前传感器检验高分辨率物镜时, 以二维插值多项式为基底重构波前是可行的。

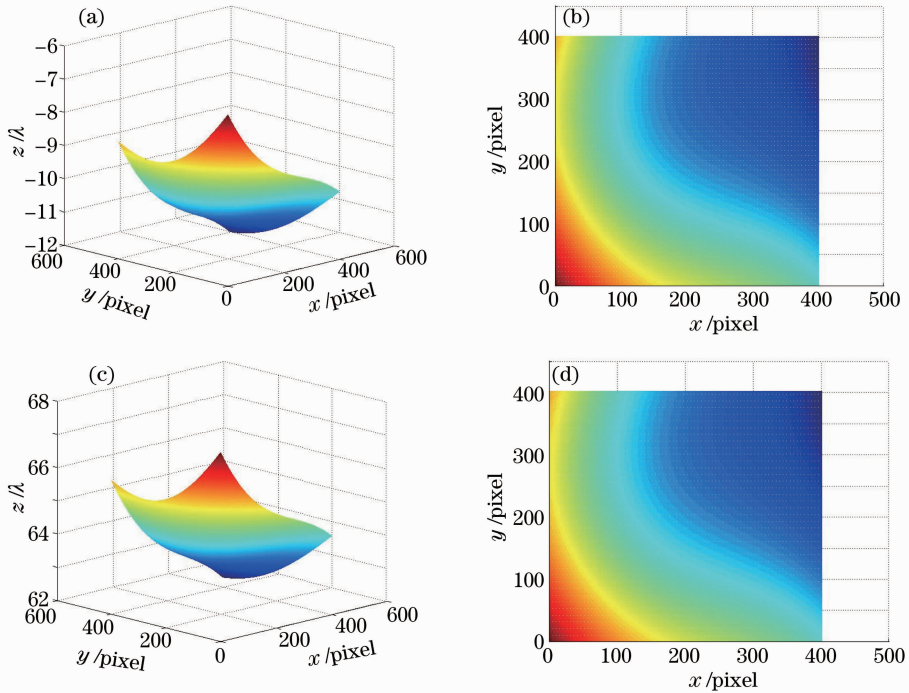


图 1 模拟待测波前与重构结果。(a)待测波前三维图；(b)待测波前平面图；(c)重构结果三维图；(d)重构结果平面图
Fig.1 Under-tested wavefront and reconstruction results. (a) Three-dimension figure of the under-tested wavefront; (b) two-dimension figure of the under-tested wavefront; (c) three-dimension figure of fitting results; (d) two-dimension figure of fitting results

3.2 二维插值多项式为基底波前重构的精度稳定性

以 Zernike 多项式为基底的模式法重构由于采样点数有限,产生了模式耦合和混淆的问题^[12~14],导致重构精度并没有随着 Zernike 多项式重构项数的增多而提高。因此对于一个未知波前,不易判断最佳的 Zernike 多项式重构项数。为了检验以二维插值多项式为基底的模式重构是否存在同样的问题,以理想球面波前为待测波前,比较二者的重构精度随拟合阶数变化的稳定性。

图 2(a)和(b)分别给出待测波前为理想球面波时,以 6~36 项 Zernike 多项式和 3~7 阶二维插值多项式为基底重构波前的重构误差 RMS 值变化规律。从图 2(a)可以看出,以 Zernike 多项式为基底的波前重构精度在高阶时产生突变,重构精度变化范围大、不稳定,最佳重构误差 RMS 值为 0.0395λ 。而以二维插值多项式为基底重构波前的重构精度在高阶时相对稳定,如图 2(b)所示。最佳重构误差 RMS 值为 0.0393λ 。

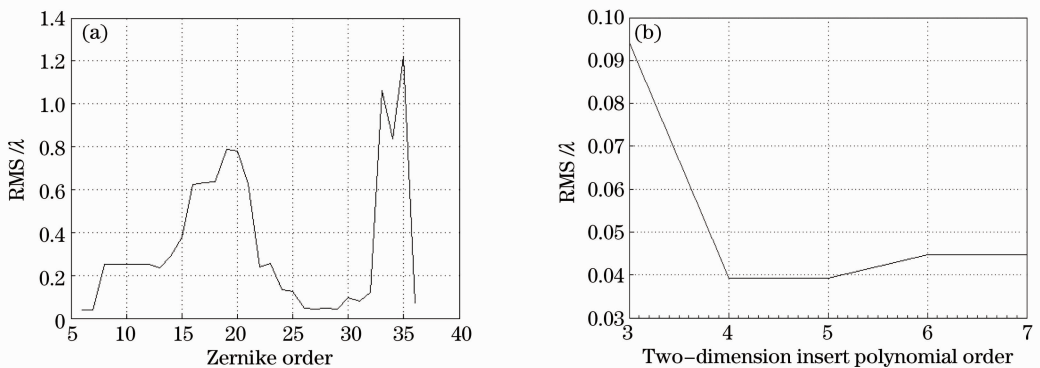


图 2 理想球面波重构误差 RMS 值变化曲线。(a)以 Zernike 多项式为基底的重构结果；(b)以二维插值多项式为基底的重构结果

Fig.2 Error RMS curves of sphere wavefront reconstruction error. (a) Error RMS curve of Zernike polynomial fitting; (b) error RMS curve of two-dimension insert polynomial fitting

3.3 二维插值多项式为基底波前重构的精度

为了研究二维插值多项式为基底波前重构的精度,模拟了更加复杂的正弦波前作为待测波前。分别使用 Zernike 多项式与二维插值多项式为基底重构待测波前,重构误差 RMS 如图 3 所示。模拟 1681、441、121 个采样点,分别使用 6~36 项 Zernike 多项式为基底对原始波前进行模式重构,图 3(a)为其误差 RMS 值的变化。模拟一系列采样点,分别使用 3~6 阶二维插值多项式重构正弦波前,图 3(b)为其误差 RMS 值的变化。

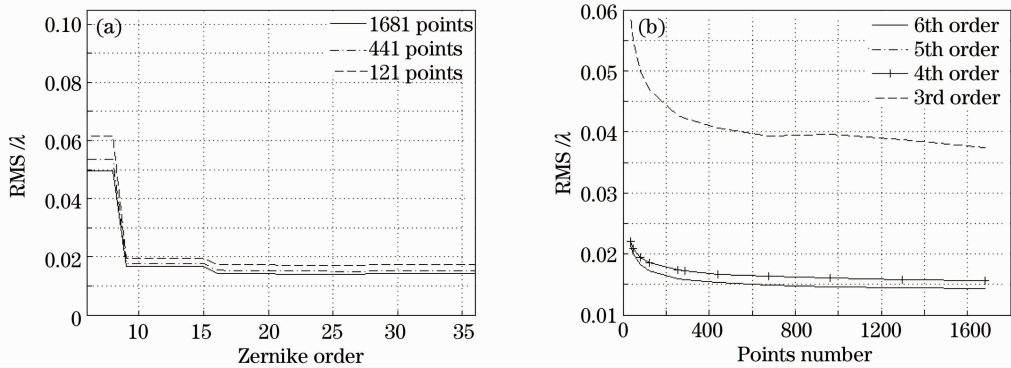


图 3 正弦波前重构误差 RMS 值曲线。(a) Zernike 多项式的误差重构 RMS 值曲线; (b) 二维差值多项式的重构误差 RMS 值曲线

Fig. 3 Error RMS curves of sine wavefront reconstruction error. (a) Error RMS curve of Zernike polynomial fitting; (b) error RMS curve of two-dimension insert polynomial fitting

从图 3(a)看出,随着拟合项数和采样点数的增加,Zernike 多项式重构精度逐渐增加。原因是正弦波前引入了高阶像差,Zernike 多项式的高阶项能够较好地表示高阶像差,使得模式混淆误差减小,提高了重构精度。当拟合 Zernike 多项式达到 16 项以上时,最佳重构精度 RMS 值可达到 0.0142λ 。二维插值多项式重构正弦波前的精度也随着拟合阶数和采样点个数的增加而增加。当阶数在 4 阶及以上时,重构精度保持稳定,当 x, y 的拟合阶数为 6 阶时,重构精度达到 0.0143λ 。通过图 3(a)与(b)的分析比较表明:只有在高阶时,Zernike 多项式和二维插值多项式为基底的模式重构才能较高精度重构复杂的正弦波前,二者具有近似的重构精度。

进一步选取余弦波前、非球面波前以及含有一定低阶球差、彗差、象散、场曲和畸变等像差的一般波前为待测波前,分别以 Zernike 多项式与二维插值多项式为基底进行波前重构,结果如图 4~6 所示。比较它们的最佳重构误差 RMS 值如表 2 所示。

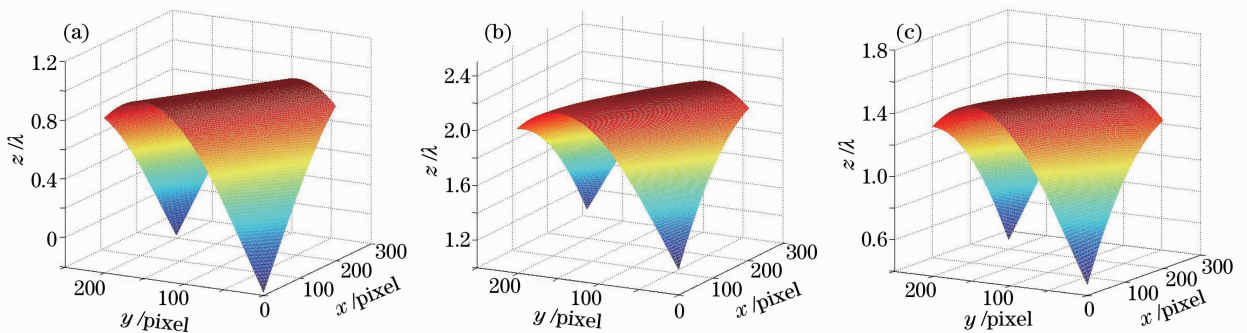


图 4 模拟待测波前 1 与重构结果。(a)待测波前 1; (b) Zernike 多项式重构结果; (c) 二维插值多项式重构结果
Fig. 4 No. 1 under-tested wavefront and its reconstruction results. (a) No. 1 under-tested wavefront; (b) Zernike polynomial fitting result; (c) two-dimension insert polynomial fitting result

从图 4~6 可以看出,二维插值多项式和 Zernike 多项式为基底的模式重构都能较好地复原待测波前,其中对于余弦和非球面波前复原效果很好,而含有低阶像差的一般待测波前误差较大。

比较表 2 中的各类波前的重构结果可以看出,对于余弦波前,非球面波前和含有低阶像差的一般波前,以二维插值多项式为基底的重构精度与以 Zernike 多项式为基底的重构精度相当,甚至优于 Zernike 多项式的精度。

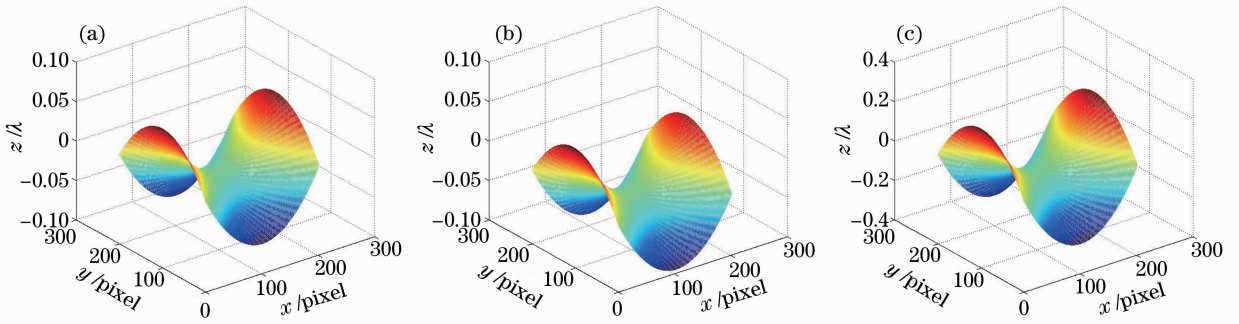


图 5 模拟待测波前 2 与重构结果。(a)待测波前 2；(b) Zernike 多项式重构结果；(c)二维插值多项式重构结果

Fig. 5 No. 2 under-tested wavefront and its reconstruction results. (a) No. 2 under-tested wavefront; (b) Zernike polynomial fitting result; (c) two-dimension insert polynomial fitting result

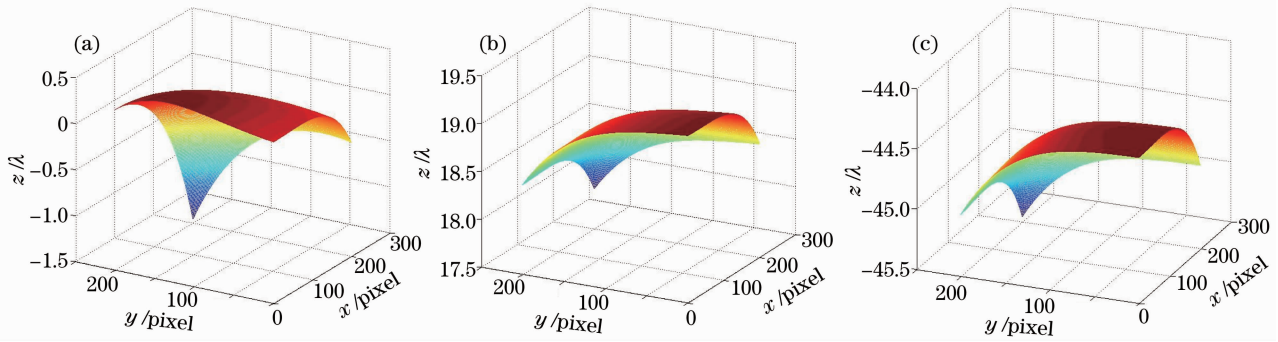


图 6 模拟待测波前 3 与重构结果。(a)待测波前 3；(b) Zernike 多项式重构结果；(c)二维插值多项式重构结果

Fig. 6 No. 3 under-tested wavefront and its reconstruction results. (a) No. 3 under-tested wavefront; (b) Zernike polynomial fitting result; (c) two-dimension insert polynomial fitting result

表 2 其他几种形式待测波前的重构误差 RMS 值

Table 2 Results of other kinds of wavefront reconstruction

	Under-tested wavefront	Zernike polynomial	Two dimension inserol polynomial
1	$\cos(1.2x+2.3y)$	0.0488λ	0.0471λ
2	$0.3x^2-0.25y^2$	0.0068λ	$1.6240 \times 10^{-15}\lambda$
3	$0.25+0.185y+0.16(x^2+y^2)-0.68(x^2+y^2)^2+0.175y(x^2+y^2)+0.115y^2+0.005(x^2+y^2)+0.02875y$	0.1872λ	0.1784λ

4 结 论

提出使用二维插值多项式为基底对 Hartmann-Shack 波前传感器检测高分辨率物镜的波前进行重构的思想。验证了在高分辨率物镜的 Hartmann-Shack 波前传感器检验中,以二维插值多项式为基底的模式重构是可行的。模拟理想球面波、正弦波、余弦波、非球面波以及含有一定低阶像差的波前为待测波前,结果表明使用二维插值多项式为基底,相比 Zernike 多项式重构精度更高且更稳定。

参 考 文 献

- 1 D. Malacara. Optical Shop Testing[M]. Canada: John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2007. 361~375
- 2 B. C. Platt, R. Shack. History and principles of Shack-Hartmann wavefront sensing[J]. *J. Refractive Surgery*, 2001, **17**: S573~S577
- 3 Niu Saisai, Shen Jianxin, Liang Chun *et al.*. Centroid optimization of Hartmann-Shack wave-front sensor human eye aberration detection[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2011, **19**(12): 3016~3024
- 钮赛赛, 沈建新, 梁 春 等. 人眼像差探测哈特曼波前传感器的质心优化[J]. *光学 精密工程*, 2011, **19**(12):

3016~3024

- 4 F. Zernike. Diffraction theory of knife-edge test and its improved form, the phase contrast method[J]. *Monthly Noticer of the Royal Astronomical Society*, 1934, **94**: 377~384
- 5 B. R. A. Nijboer. The diffraction theory of optical aberrations. part I: general discussion of the geometrical aberrations [J]. *Physica*, 1943, **10**: 679~692
- 6 Zhou Renzhong, Yon Jixiong. Theory of Adaptive Optics[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1996. 168~183
周仁忠, 涌吉熊. 自适应光学理论[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1996. 168~183
- 7 Duan Haifeng, Li Ende, Wang Haiying *et al.*. The effect of mode orthogonality on precision of wavefront[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(9): 1143~1148
段海峰, 李恩得, 王海英 等. 模式正交性对哈特曼-夏克传感器波前测量等的影响[J]. 光学学报, 2003. **23**(9): 1143~1148
- 8 Zhang Jinping, Zhang Xuejun, Zhang Zhongyu *et al.*. Test of rotationally symmetric aspheric surface using Shack-Hartmann wavefront sensor[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2012, **20**(3): 492~498
张金平, 张学军, 张忠玉 等. Shack-Hartmann 波前传感器检测大口径圆对称非球面反射镜[J]. 光学精密工程, 2012, **20**(3): 492~498
- 9 L. Seifert, H. J. Tiziani, W. Osten. Wavefront reconstruction with the adaptive Shack-Hartmann sensor[J]. *Opt. Commun.*, 2005, **245**(1-6): 255~269
- 10 Shan Baozhong, Wang Shuyan, Niu Hanben *et al.*. Method and application of Zernike polynomial fitting[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2002, **10**(3): 318~323
单宝忠, 王淑岩, 牛憨笨 等. Zernike 多项式拟合方法及应用[J]. 光学精密工程, 2002, **10**(3): 318~323
- 11 Xu Weicai. Optical Design and Imaging Performance Compensation for the Lithographic Lens [D]. Changchun: Changchun Institute of Optics, Fine Machanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, 2011. 87
许伟才. 投影光刻物镜的光学设计与像质补偿[D]. 长春: 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 2011. 87
- 12 J. S. Lee, H. S. Yang, J. W. Hahn. Wavefront error measurement of high-numerical-aperture optics with a Shack-Hartmann sensor and a point source[J]. *Appl. Opt.*, 2007, **46**(9): 1411~1415
- 13 Li Xinyang, Jiang Wenhan. Zernike modal wavefront reconstruction error of Hartmann-Shack wavefront sensor[J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(10): 1236~1240
李新阳, 姜文汉. 哈特曼-夏克传感器的泽尼克模式波前复原误差[J]. 光学学报, 2002, **22**(10): 1236~1240
- 14 Zhang Qiang, Jiang Wenhan, Xu Bing. Reconstruction of turbulent optical wavefront realized by Zernike polynomial[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 1998, **25**(6): 15~19
张强, 姜文汉, 许冰. 利用 Zernike 多项式对湍流波前进行波前重构[J]. 光电工程, 1998, **25**(6): 15~19