

# 给定抽样频率下同轴数字全息记录条件分析

缪正祥 李重光 张中恒 潘力平

(昆明理工大学理学院, 云南 昆明 650500)

**摘要** 基于光传播的角谱理论和抽样定理, 讨论了给定抽样频率下同轴数字全息图的记录条件以及所适合的物体尺寸。CCD 面阵尺寸、像素单元尺寸和间距限制了物体尺寸和全息图的记录距离。只有在满足抽样条件下所记录到的数字全息图才可能包含物体的三维信息。导出了用已知参数的 CCD 记录数字全息图时的适用范围。

**关键词** 全息; 数字全息; 抽样; 衍射; 角谱

**中图分类号** O438.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/LOP49.110901

## Recording Condition Analysis of in-Line Digital Hologram Using Given Sampling Frequency

Miao Zhengxiang Li Chongguang Zhang Zhongheng Pan Liping

(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming, Yunnan 650500, China)

**Abstract** Base on the angular spectrum theory and sampling theorem, recording condition and the size of suitable object are discussed during an in-line hologram recorded in given sampling frequency. The total size of CCD, detecting unit size and pitch limit the size of object and recording distance. Under the condition that sampling condition is satisfied, recorded hologram could contain three-dimensional information about object. Starting with this principle, application range is presented when a CCD with given parameters is used to record a hologram.

**Key words** holography; digital hologram; sampling; diffraction; angular spectrum

**OCIS codes** 090.1995; 090.1760; 140.4480

### 1 引言

数字全息用固体成像器件(如 CCD)代替传统全息干板记录全息图, 通过计算机模拟再现光波的衍射来实现物光波场的数值再现, 实现了全息图记录、存储和再现全过程的数字化, 为光学信息处理提供了极大的方便。然而, 目前 CCD 探测面阵的分辨率还远达不到传统全息干板的水平<sup>[1]</sup>; 与传统光学全息相比, 数字全息对物体尺寸和记录距离有更多的限制条件。根据抽样定理的要求讨论这些限制条件, 对数字全息实验具有很好的指导作用<sup>[2]</sup>。

针对给定的 CCD, 利用抽样定理和角谱理论, 分析其用于不同类型数字全息实验时物体适合的尺寸, 并给出同轴菲涅耳全息图记录距离的要求, 从而确保所记录的全息图包含物体的三维信息。

### 2 数字全息的记录原理

设物平面为  $x_o y_o$ , CCD 记录面为  $x_c y_c$ , 物到记录面的距离为  $d_o$ , 如图 1 所示。

$U_o(x_o, y_o)$  为物光波, 当满足菲涅耳近似时, 到达 CCD 面上的光场分布为

$$U(x_c, y_c) = \frac{\exp(jkd_o)}{j\lambda d_o} \exp\left[j\frac{k}{2d_o}(x_c^2 + y_c^2)\right] \times \iint_{\Sigma} U_o(x_o, y_o) \exp\left[j\frac{k}{2d_o}(x_o^2 + y_o^2)\right] \times \exp\left[j2\pi\left(x_o \frac{x_c}{\lambda d_o} + y_o \frac{y_c}{\lambda d_o}\right)\right] dx_o dy_o, \quad (1)$$

收稿日期: 2012-06-23; 收到修改稿日期: 2012-09-03; 网络出版日期: 2012-09-11

作者简介: 缪正祥(1986—), 男, 硕士研究生, 主要从事数字全息技术方面的研究。E-mail: zhengxiang\_miao@126.com

导师简介: 李重光(1966—), 男, 博士, 教授, 主要从事数字全息技术方面的研究。E-mail: licg66@yahoo.com.cn

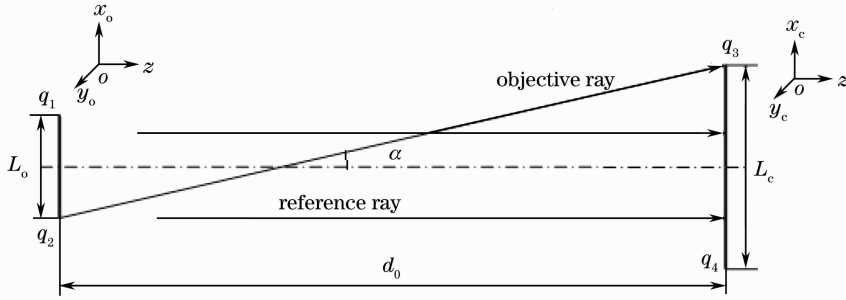


图 1 同轴数字全息记录原理图

Fig. 1 Schematic of recording in-line digital hologram

式中  $\lambda$  为波长,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  表示波数。为简单起见, 设同轴记录时的参考光波  $R(x, y) = 1$ , 则 CCD 探测面上记录到的光强分布为

$$I(x, y) = |U(x_c, y_c) + R(x_c, y_c)|^2 = |U(x_c, y_c)|^2 + |R(x_c, y_c)|^2 + U^*(x_c, y_c)R(x_c, y_c) + U(x_c, y_c)R^*(x_c, y_c),$$

式中第一项、第二项为背景光, 第三项为原物体的共轭像, 第四项为物体的像。同轴全息图对光源的相干性要求不高, 对系统的稳定性要求也不高, 其再现像的横向色差趋于零<sup>[3~6]</sup>。但同轴全息图再现时, 原始像和共轭像在空间无法分开, 形成干扰。

### 3 同轴菲涅耳全息图的记录条件分析

如图 1 所示, CCD 中心和物体中心都位于光轴上, CCD 面阵的长和宽都为  $L_c$ , 像素间隔  $\Delta x_c = \Delta y_c = \Delta L_c$ , 抽样频率  $f_c = \frac{1}{\Delta L_c}$ , 物体的长和宽都为  $L_o$ , 参考光平行于  $z$  轴。利用快速傅里叶变换 (FFT) 进行衍射计算时, 取物面抽样间隔  $\Delta x_o = \Delta y_o = \Delta L_o$ , 抽样点数为  $N \times N$ 。

(1) 式可写为

$$U(m\Delta x_c, n\Delta y_c) = \frac{\exp(jkd_o)}{j\lambda d_o} \exp\left\{j \frac{k}{2d_o} [(m\Delta x_c)^2 + (n\Delta y_c)^2]\right\} \times \mathcal{F}\left\{U(p\Delta x_o, l\Delta y_o) \exp\left\{j \frac{k}{2d_o} [(p\Delta x_o)^2 + (l\Delta y_o)^2]\right\}\right\}, \quad (2)$$

$(m, n, p, l = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1)$ ,  $\mathcal{F}$  为 FFT。

根据抽样定理, 式中二次相位因子  $\exp\left\{j \frac{k}{2d_o} [(m\Delta x_c)^2 + (n\Delta y_c)^2]\right\}$  的相位每变化一个周期  $2\pi$  至少有两个采样点时, 即认为 FFT 计算满足耐奎斯特抽样定理<sup>[7]</sup>

$$\frac{k}{2d_o} \{[(m+1)\Delta x_c]^2 + [(n+1)\Delta y_c]^2\} - \frac{k}{2d_o} [(m\Delta x_c)^2 + (n\Delta y_c)^2] \Big|_{m, n = N/2} \leq \pi, \quad (3)$$

即

$$d_o \geq \frac{N\Delta L_c^2}{\lambda} = \frac{N}{f_c^2 \lambda}. \quad (4)$$

由于 FFT 算法只是离散傅里叶变换的一种快速算法, 只有当被变换函数是在频域有限区域内的“带限函数”时, 连续函数的傅里叶变换才能由离散傅里叶变换表述<sup>[8]</sup>。所以, 计算时须对连续函数  $U_o(x_o, y_o) \exp\left\{j \frac{k}{2d_o} (x_o^2 + y_o^2)\right\}$  进行离散。要充分描述衍射场分布, 应选择计算区域  $L_j \geq L_o$ 。为便于和衍射物体的几何投影尺寸进行比较, 取

$$L_j = L_o = N\Delta x_o = N\Delta y_o = N\Delta L_o. \quad (5)$$

根据抽样定理, 由 (2) 式得物面抽样间隔为

$$\Delta L_j = \Delta L_o. \quad (6)$$

对应离散物光波的最高空间频率为

$$\frac{1}{\Delta L_o} = \frac{N\Delta L_c}{\lambda d_o}. \quad (7)$$

当  $\frac{1}{\Delta L_o} > \frac{1}{\Delta L_c}$  (CCD 的采样频率) 时, 就不能完整地记录下物体全部信息。可以采用增大记录距离的办法来减小  $\frac{1}{\Delta L_o}$ , 但  $\Delta L_o$  的增大将造成对物光波的离散化描述丢失细节信息。因此, 在保证 CCD 能用于全息图记录的前提下, 记录距离只能限制在一定范围内。

根据光传播的角谱理论, 满足菲涅耳近似时, 到达记录面物光的最高空间频率为

$$\epsilon_{\max} = \frac{\sin \alpha_{\max}}{\lambda} \approx \frac{L_o/2 + L_c/2}{\lambda d_o}. \quad (8)$$

带宽为

$$2B = 2\epsilon_{\max} = \frac{L_o + L_c}{\lambda d_o}. \quad (9)$$

根据耐奎斯特抽样定理  $\Delta L_c \leq \frac{1}{2B}$  得

$$L_o \leq \frac{\lambda d_o}{\Delta L_c} - L_c. \quad (10)$$

用  $L_c$  和  $\Delta L_c$  为固定值的 CCD 记录一幅同轴菲涅耳全息图, 所对应的物体尺寸与记录距离成正比, 随着距离的增加, 能记录的最大物体尺寸也增大。由于  $\Delta L_j = \Delta L_o$ , 物体尺寸的增大就意味着抽样点数的急剧增加, 使物光波重构的计算量极大增加, 甚至导致数值计算失败。

## 4 模拟计算与实验

下面以同轴菲涅耳全息图的再现模拟为例, 验证上述分析。

已知 CCD 记录面尺寸为  $5.12 \text{ mm} \times 5.12 \text{ mm}$ , 物体尺寸也为  $5.12 \text{ mm} \times 5.12 \text{ mm}$ 。像素间隔为  $0.01 \text{ mm} \times 0.01 \text{ mm}$ , 抽样频率为  $100 \text{ lp/mm}$ , 用与  $z$  轴平行的平面光波照明物体, 波长为  $632.8 \text{ nm}$ , 参考光为与物光同轴的平行光, 记录距离由(4)式给出  $d_o = 0.1 \text{ m}$ 。图 2 为当镂空的“光”字尺寸分别为  $1 \text{ mm}$ [图 2(a1)~(a3)]、 $1.5 \text{ mm}$ [图 2(b1)~(b3)]、 $3 \text{ mm}$ [图 2(c)~(c3)]的模拟记录的全息图和再现像。

由图 2 可知, 同轴全息再现的原物像与共轭像无法分开, 经去直透成分处理后, 共轭像形成一片很微弱的背景光, 所以可以看到原物像。当记录距离固定时, 随着物体尺寸的增大, 再现像中的高频成分损失严重, 甚至再现像的轮廓都变得越来越模糊, 相位提取变得很困难。

物体的尺寸固定为  $5.12 \text{ mm} \times 5.12 \text{ mm}$ , 工作波长及 CCD 的参数不变, 记录距离由(4)式给出, 当距离分别为  $0.2$ 、 $0.5$ 、 $1.0 \text{ m}$ , 模拟记录的全息图和再现像如图 3 所示。

由图 3 可知随着距离的增大, 物体高频信息丢失较多, 共轭像干扰严重。

图 4 是大小为  $5.12 \text{ mm} \times 5.12 \text{ mm}$  的物体在距离  $d_o = 0.1 \text{ m}$  处所记录的全息图及再现像, 实验记录的 CCD 为  $512 \text{ pixel} \times 512 \text{ pixel}$ , 抽样频率为  $100 \text{ lp/mm}$ , 照明光波长为  $632.8 \text{ nm}$ 。当记录距离满足(4)式所给条件时, 能得到清晰的再现像。

## 5 结 论

从抽样定理出发, 结合角谱和数字全息相关理论, 分析了给定 CCD 参数条件下的同轴菲涅耳全息图的记录条件, 并通过 Matlab 软件进行模拟验证。模拟结果表明, 对于同轴菲涅耳全息图, 记录距离和物体尺寸之间存在一定的约束关系, 在计算机容量允许的条件下, 适当增大记录距离, 可以用有限分辨率的 CCD 完整记录下物体的三维信息。

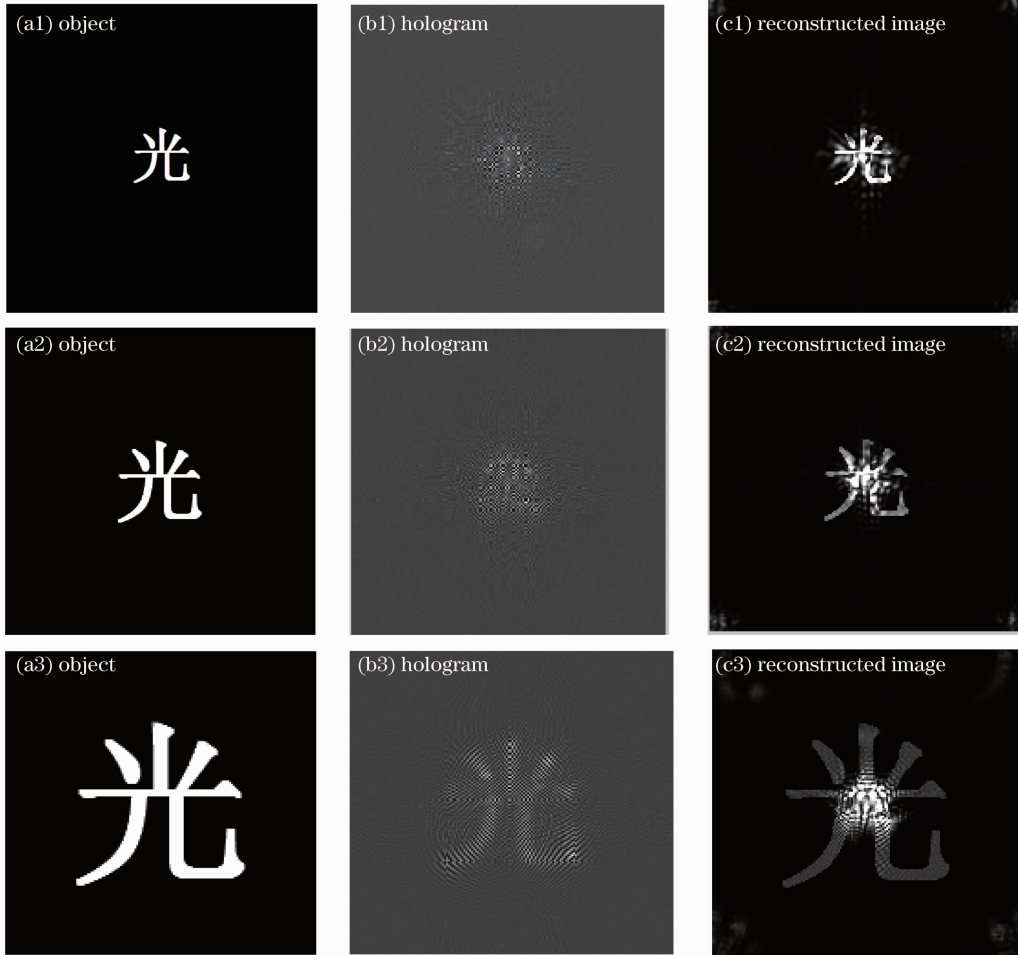
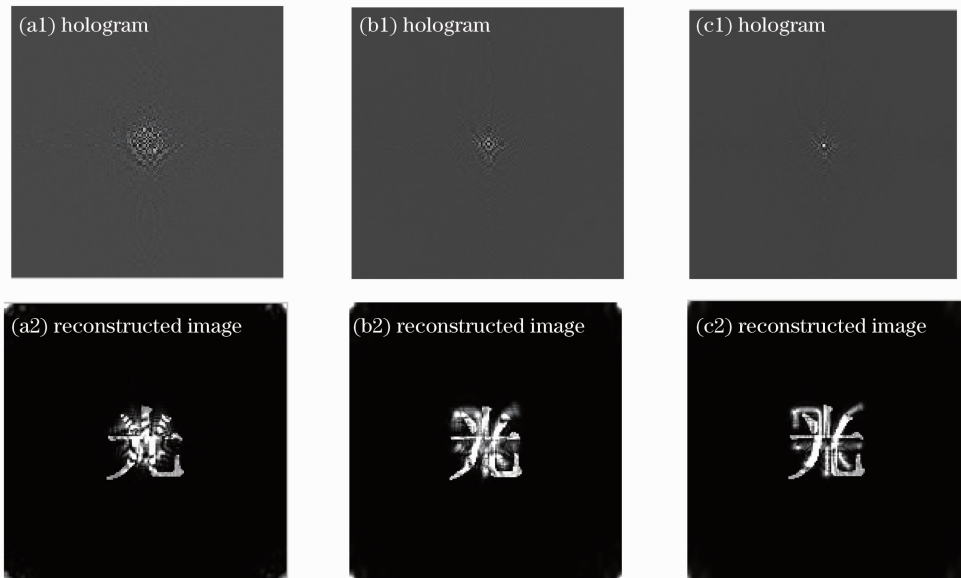


图 2 不同尺寸物体的同轴全息图模拟及再现

Fig. 2 Simulation and reconstruction of in-line digital hologram recording with different size of object

图 3 不同记录距离的同轴全息图模拟及再现。(a1),(a2)  $d_o=0.2$  m; (b1),(b2)  $d_o=0.5$  m; (c1),(c2)  $d_o=1$  mFig. 3 Simulation and reconstruction of in-line digital hologram recording with different distance. (a1),(a2)  $d_o=0.2$  m;(b1),(b2)  $d_o=0.5$  m; (c1),(c2)  $d_o=1$  m

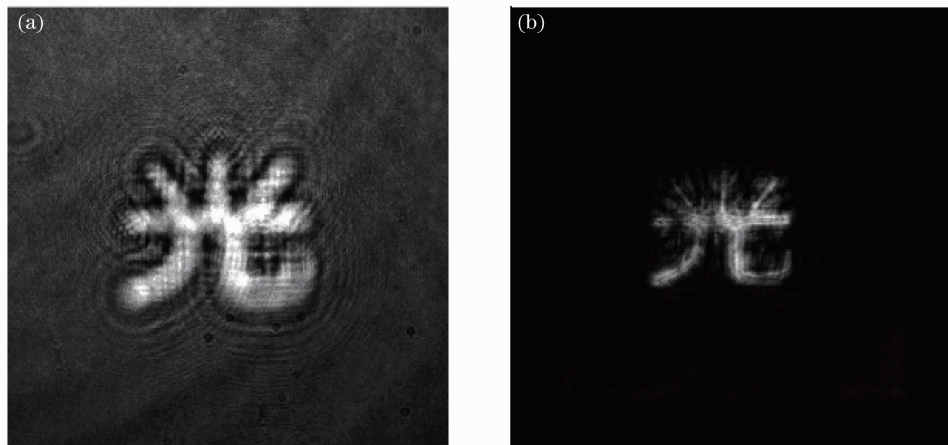


图4  $d_o=1$  m 实验记录的全息图及再现像。(a)全息图；(b)再现像

Fig. 4 Reconstruction of in-line digital hologram recorded in the experiment under the condition that  $d_o=1$  m.

(a) Hologram; (b) reconstructed image

### 参 考 文 献

- 1 P. Lobaz. Reference calculation of light propagation between parallel planes of different sizes and sampling rates[J]. *Opt. Express*, 2011, **19**(1): 32~39
- 2 R. P. Muffoletto, J. M. Tyler, J. E. Tohline. Shifted Fresnel diffraction for computational holography[J]. *Opt. Express*, 2007, **15**(9): 5631~5640
- 3 Zhong Liyun, Zhang Yimo, Lü Xiaoxu *et al.*. Analysis of some fundamental issue about digital hologram[J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(4): 465~471  
钟丽云, 张以谟, 吕晓旭 等. 数字全息中一些基本问题分析[J]. *光学学报*, 2004, **24**(4): 465~471
- 4 Luo Peng, Lü Xiaoxu, Zhong Liyun. Recording and reconstruction of near-distance digital holography[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(10): 1735~1739  
罗 鹏, 吕晓旭, 钟丽云. 近距离数字全息术记录和再现问题[J]. *光学学报*, 2007, **27**(10): 1735~1739
- 5 Yuan Caojin, Zhong Liyun, Wang Yanping *et al.*. The analysis of off-axis digital holographic recording conditions [J]. *Laser Technology*, 2004, **28**(5): 482~484  
袁操今, 钟丽云, 王艳萍 等. 离轴数字全息记录条件的研究[J]. *激光技术*, 2004, **28**(5): 482~484
- 6 Li Junchang. FFT computation of angular spectrum diffraction formula and its application in wavefront reconstruction of digital holography[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(5): 1163~1167  
李俊昌. 角谱衍射公式的快速傅里叶变换计算及在数字全息波面重建中的应用[J]. *光学学报*, 2009, **29**(5): 1163~1167
- 7 Li Junchang, Xiong Bingheng. *Information Optics Theory and Calculation* [M]. Beijing: Science Press, 2009  
李俊昌, 熊秉衡. *信息光学理论与计算*[M]. 北京: 科学出版社, 2009
- 8 J. W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. Third edition[M]. Qin Kecheng, Liu Peiseng, Chen Jiabi *et al.*. Transl., Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2011  
古德曼. *傅里叶光学导论*[M]. 秦克诚, 刘培森, 陈家璧 等. 译. 北京: 电子工业出版社, 2011