

# 二维改进分形海面微波电磁散射计算模型

陈瑜 胡云安 王宏伟 韦建明

(海军航空工程学院控制工程系, 山东烟台 264001)

**摘要** 针对分形海面模型的功率谱在空间波数小于基波波数时不能满足正幂率的问题, 提出了一种统计模型和归一化带限 Weierstrass-Mandelbrot 分形模型相结合的二维海面模型, 并比较了 3 种模型的海面轮廓。在满足基尔霍夫近似的条件下推导了改进模型电磁散射系数的闭合解。对统计模型、经典分形模型和改进分形模型的非相干散射强度系数的角分布进行了比较, 具体分析了在微波波段内不同入射频率和风速下改进模型非相干散射强度系数的情况。分析结果表明, 相比其它两种经典模型, 改进模型的海面形状具有大尺度涌浪和小尺度张力波的特性, 并且其的电磁散射情况更符合海面的实际情况。

**关键词** 海洋光学; 分形海面模型; 海谱; 统计模型

中图分类号 O451 文献标识码 A doi: 10.3788/LOP49.110101

## Model of Microwave Electromagnetic Scattering at Two-Dimensional Improved Fractal Sea Surface

Chen Yu Hu Yun'an Wang Hongwei Wei Jianming

(Department of Control Engineering, Naval Aeronautic Engineering Institute, Yantai, Shandong 264001, China)

**Abstract** Aimed at the problem that the omnidirectional sea-wave spectrum of fractal sea-wave model could not satisfy the positive power law when spatial wave numbers is smaller than the fundamental wave number, a 2-D sea-wave model is proposed by combining statistical sea model and normalization band-limited Weierstrass-Mandelbrot fractal sea-wave model. Sea surfaces of statistical model, classical fractal model and the improved model are compared. Electromagnetic scattering coefficient of the improved model based on the Kirchhoff approximation is derived. The angular distributions of incoherent scattering intensity coefficient of statistical model, classical fractal model and improved model are compared, and incoherent scattering intensity coefficient of improved model is analyzed based on different frequency and wind direction in microwave band. Analytical results show that sea surface have both characters of large-scale turbulent waves and micro-scale capillary wave and the electromagnetic scattering of improved model can comply better with the practical situation of sea surface.

**Key words** oceanic optics; fractal sea-wave model; sea-wave spectrum; statistical model

**OCIS codes** 010.0280; 010.4458; 010.4450

## 1 引言

“分形”的概念是由 Mandelbrot 首次提出的, 分形最重要的特征是具有自相似性。自相似是指研究对象在所有方向按同一比例扩展或收缩的均匀的线性变换, 分形内部任何一个相对独立的部分, 都是整体的再现和缩影, 在统计意义上具有自相似性。实际海面是一个复杂的粗糙面, 它是在近似周期的大尺度波浪上叠加着小尺度的波纹、泡沫和飞溅的浪花, 即由大尺度结构和微细结构组成, 而分形具有自相似性, 可兼顾大范围

收稿日期: 2012-06-18; 收到修改稿日期: 2012-07-30; 网络出版日期: 2012-09-11

基金项目: 军队科研基金(61004002)资助课题。

作者简介: 陈瑜(1982—), 女, 博士研究生, 主要从事目标与环境建模及电磁散射等方面的研究。

E-mail: chenyu8879@sohu.com

导师简介: 胡云安(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事模式识别和智能系统等方面的研究。

E-mail: hy507@sina.com

有序和小范围无序的特点。研究分形海面建模及其电磁散射对海洋遥感、环境监测及海上目标跟踪与识别等领域具有极其重要的意义<sup>[1~5]</sup>。文献[6,7]首次提出了利用 Weierstrass 带限分形函数描述海面的思想,并使用分形函数使粗糙表面散射模式化,证明了分形表面在 Kirchhoff 近似下允许散射系数的闭合式表达。

实际海浪的功率谱既包含正幂率部分也包含负幂率部分,而传统分形模型只能模拟负幂率部分。针对这一问题,王运华等<sup>[8]</sup>对 Weierstrass 带限分形函数进行了改进,给出了方向海谱的形式,并与经典文献进行了比较,两者吻合较好,但该模型无法给出改进部分具体的物理含义。Berizzi 等<sup>[9]</sup>在 Weierstrass 带限分形函数的自相关函数中加入高斯分布的相关函数以实现分形海谱的改进,得到的海谱与经典文献吻合较好,但从海谱得不到改进分形模型的表达式。

根据以上问题对分形模型进行了改进。将 Longuet-Higgins 模型(统计模型)和经典的分形模型相结合,提出了一种改进的归一化带限 Weierstrass 分形海面模型,并比较了三种模型海面的起伏情况。利用 Kirchhoff 近似对该模型的散射系数和散射强度系数进行了推导,对统计模型、传统分形模型和改进模型的非相干散射强度系数进行了比较,讨论了在微波波段下,改进模型后向非相干散射强度系数随入射频率和风速变化的规律。结果表明,改进模型更符合海浪产生的物理机理,具有更强的通用性和实用性。

## 2 改进二维分形海面模型

经典带限 Weierstrass 分形海面模型可表示为

$$f(x, y, t) = \sigma \eta \sum_{n=0}^{N_f-1} b^{(D-3)n} \sin \{ k_0 b^n [(x + v_x t) \cos \beta_n(t) + (y + v_y t) \sin \beta_n(t)] - \omega_n t + \Phi_n \}, \quad (1)$$

式中  $\sigma$  为海面高度起伏均方根;  $b > 1$  为尺度因子;  $N_f > 400$  为模型中含有正弦分量的个数;  $\eta$  为归一化因子,可表示为  $\eta = \sqrt{2[1 - b^{2(D-3)}]/1 - b^{2N_f(D-3)}}$ ;  $D$  为分形维数,  $D$  越大,海面越粗糙;  $k_0$  为基波波数,与波数  $k_n$  之间的关系为  $k_n = k_0 b^n$ ;  $\omega_n$  为角频率;  $v_x$  和  $v_y$  分别为遥感平台延在  $x$  轴和  $y$  轴的速度分量; 当传感器观察的时间很短时(大约几秒),  $\beta_n(t)$  和  $\Phi_n$  可视为常量,  $\Phi_n$  是  $[-\pi, \pi]$  上均匀分布的随机相位,  $\beta_n$  和  $\Phi_n$  是相互独立的。

(1)式的功率谱为负幂率谱,正好对应于实际海谱中的一段,并不能反映真实海面的功率谱。在以往的海浪模拟中都涉及到海浪谱的选择,而这些谱大多是根据大量实验数据,在半经验、半理论的基础上运用数学分析方法得到的。目前在国际上应用比较广泛的有 Pierson-Moscowitz 谱(PM 谱)和 JONSWAP 谱,而在我国海域一般应用“海港水文规范”所依据的文圣常谱。这些谱都有一个峰值,对应的波数为  $k_m$ ,风速越大,  $k_m$  越小。这表明,海表面受两种波共同影响,当  $k < k_m$  时,表面长重力波起主要作用,功率谱满足正幂率谱;而当  $k > k_m$  时,短重力波及张力波起主要作用,功率谱满足负幂率谱,这就表明了应用改进二维分形模型来模拟实际海面,形式上为

$$\xi(x, y, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M a_{ij} \cos[\omega_i t - k_i(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j) + \epsilon_{ij}] + \sigma \eta \sum_{n=0}^{N_f-1} b^{(D-3)n} \sin \{ k_0 b^n [(x + v_x t) \cos \beta_n(t) + (y + v_y t) \sin \beta_n(t)] - \omega_n t + \Phi_n \}, \quad (2)$$

式中第一部分为 Longuet-Higgins 模型,通常被称为线性海浪,用  $\eta(x, y, t)$  表示,其中  $a_{ij}$ 、 $\omega_i$ 、 $k_i$ 、 $\theta_j$  和  $\epsilon_{ij}$  分别为组成波的振幅、角频率、波数、方向角和初相位。波面位移  $\eta(x, y, t)$  服从均值为零的正态分布,而全体  $\{\eta(x, y, t)\}$  构成一个平稳的正态过程。在实践中,这种正态又平稳的特性已为分析许多实测海浪记录所证实,并得到合理的工程应用,其中平稳性要求在短时间内的海面风场以及由风生成的浪的统计特性是不会改变的。因为各组成波在单位面积海域上提供的平均能量与其振幅的平方成正比,这就导致海浪能量谱  $S(\omega, \theta)$  的定义与波面用谱表示的展式

$$S(\omega, \theta) \Delta \omega \Delta \theta = \overset{\Delta}{=} \sum_{\omega \leq \omega_i < \omega + \Delta \omega; \theta \leq \theta_j < \theta + \Delta \theta} \frac{1}{2} a_{ij}^2, \quad (3)$$

这时  $\eta(x, y, t)$  变为

$$\eta(x, y, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sqrt{2s(\omega_i, \theta_j)} d\omega d\theta \cos[\omega_i t - k_i(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j) + \varepsilon_{ij}]. \quad (4)$$

上述波面表达式对应于风向是在较大范围内变动时所生成的海浪,它的谱  $S(\omega, \theta)$  是频率与方向的函数,通常称为方向谱,方向海谱可写为

$$S(\omega, \theta) = S(\omega)G(\omega, \theta), \quad (5)$$

式中  $S(\omega)$  为功率谱,  $G(\omega, \theta)$  为方向分布函数。在海浪模拟中涉及到功率谱  $S(\omega)$  的选择,目前可供选择的海浪谱较多,如 Pierson-Moscowitz 谱、文圣常谱及 JONSWAP 谱等。方向分布函数  $G(\omega, \theta)$  一般采用实际观测获得的方向分布函数。在本文中采用 Berizzi 提出的方向分布<sup>[9]</sup>函数,方向分布函数的频率划分一般采用等分法。在模拟海浪的过程中功率谱的频率分隔采用频率等分法或者能量等分法,前者虽然简单,但得到的频率序列是一个等差序列而不是一个随机序列,不符合海浪的随机性,而且波浪会以  $2\pi/\Delta\omega$  的周期重复出现,其中  $\Delta\omega$  为采用等分法的采样间隔,而后者得到的频率序列是随机的,更符合海浪的实际情况,能量等分法是基于海浪功率谱建立的,选定的频率使各频率间隔的能量相等,即谱密度曲线下的子面积相等。

因此 Longuet-Higgins 模型是基于稳态海谱建立的,能很好的反映长重力波的情况,在经典分形模型中加入 Longuet-Higgins 模型解决了分形模型不能反映涌浪的情况,在求解时,Longuet-Higgins 模型中海谱波数的取值要小于谱峰值  $k_m$ 。

### 3 Kirchhoff 近似改进模型下非相干散射强度系数的求解

去评价分形表面电场散射的特性,必须得到散射系数  $\gamma(t)$  的闭式解,这个结果对散射信号统计特性的研究意义重大。Kirchhoff 近似是将粗糙曲面用局部切平面代替,利用菲涅尔反射定律获得切平面的总场,从而近似计算远区散射场,以下据此计算散射场。图 1 为二维海面散射参考图。如图 1 中的几何关系,  $\theta_1$  为入射角,在 XZ 平面内,  $\theta_2$  为反射角,  $\theta_3$  为反射角的相位角,设被照亮部分为  $2X \times 2Y$ ,面积为  $4XY$ ,散射系数定义为远区散射场  $E_s(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  与远区平滑表面镜像散射场  $E_{s0}$  的比值,表达式为

$$\gamma(t) = \frac{E_s(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{E_{s0}}, \quad (6)$$

$$E_s(P) = \frac{ik \exp(jkR_0)}{4\pi R_0} \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y \left[ a \frac{\partial \eta(x, y, t)}{\partial x} + c \frac{\partial \eta(x, y, t)}{\partial y} - b \right] \exp(iv\gamma) dx dy, \quad (7)$$

式中

$$a = (1 - \Gamma) \sin \theta_1 + (1 + \Gamma) \sin \theta_2 \cos \theta_3, \quad (8)$$

$$b = (1 + \Gamma) \cos \theta_2 - (1 - \Gamma) \cos \theta_1, \quad (9)$$

$$c = (1 + \Gamma) \sin \theta_2 \sin \theta_3, \quad (10)$$

$$v = k[(\sin \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_3)x_0 - \sin \theta_2 \sin \theta_3 y_0 - (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)z_0], \quad (11)$$

式中  $\Gamma$  为反射系数,它为表面介电特性、入射角和入射波极化状态的函数,  $R_0$  为观察点的位置,  $r$  为表面上点的向量,  $x_0, y_0, z_0$  为笛卡儿坐标系的单位矢量,利用(7)式计算的镜向反射场为

$$E_{s0}(P) = \frac{i2kXY \cos \theta_1 \exp(jkR_0)}{\pi R_0}, \quad (12)$$

对于一个完全导体的表面,当为垂直极化时,  $\Gamma=1$ ,把(2)代入(6)式忽略边缘效应可得

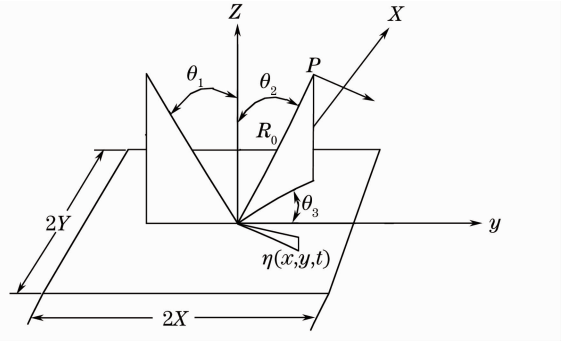


图 1 二维海面散射参考图

Fig. 1 Reference system of scattering of 2-D sea surface

$$\begin{aligned}
\gamma(\theta, t) = & F(\theta_1; \theta_2, \theta_3) \sum_{m_{11}, m_{12}, m_{13}, \dots, m_{ij} = -\infty}^{+\infty} \sum_{C_0, C_1, C_2, \dots, C_{N_f-1} = -\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^M \prod_{n=0}^{N_f-1} J_{m_{ij}}(v_z a_{ij})(i)^{m_{ij}} \cdot J_{C_n} [v_z \delta \eta b^{(D-3)n}] \cdot \\
& \exp \left[ i \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M m_{ij} (\omega_i t + \varepsilon_{ij}) \right] \exp \left\{ i \sum_{n=0}^{N_f-1} C_n [k_0 b^n t (v_x \cos \beta_n + v_y \sin \beta_n) - \omega_n t + \Phi_n] \right\} \cdot \\
& \text{sinc} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M m_{ij} (-k_i \cos \theta_j X) \right] + \left( \sum_{n=0}^{N_f-1} C_n k_0 b^n \cos \beta_n X \right) + v_x X \right\} \cdot \\
& \text{sinc} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M m_{ij} (-k_i \sin \theta_j Y) \right] + \left( \sum_{n=0}^{N_f-1} C_n k_0 b^n \sin \beta_n Y \right) + v_y Y \right\}. \quad (13)
\end{aligned}$$

因此可得非相干散射强度系数为

$$\begin{aligned}
\delta_1 = & \langle \gamma(\theta, t) \cdot \gamma^*(\theta, t) \rangle_\varphi - \overline{\gamma}(\theta, t) \overline{\gamma}^*(\theta, t) = F^2(\theta_1; \theta_2, \theta_3) \cdot \\
& \left[ \frac{-v_z^2}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M a_{ij}^2 \text{sinc}^2(-k_i \cos \theta_j X + v_x X) \text{sinc}^2(-k_i \sin \theta_j Y + v_y Y) + \right. \\
& \frac{v_z^2 \delta^2 \eta^2}{4} \sum_{n=0}^{N_f-1} b^{2(D-3)n} \text{sinc}^2(k_0 b^n \cos \beta_n X + v_x X) \text{sinc}^2(k_0 b^n \sin \beta_n Y + v_y Y) - \\
& \frac{v_z^2}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M a_{ij}^2 \text{sinc}^2(k_i \cos \theta_j X + v_x X) \text{sinc}^2(k_i \sin \theta_j Y + v_y Y) + \\
& \left. \frac{v_z^2 \delta^2 \eta^2}{4} \sum_{n=0}^{N_f-1} b^{2(D-3)n} \text{sinc}^2(-k_0 b^n \cos \beta_n X + v_x X) \text{sinc}^2(-k_0 b^n \sin \beta_n Y + v_y Y) \right], \quad (14)
\end{aligned}$$

式中的第一项和第三项为 Longuet-Higgins 模型产生的非相干散射强度系数,第二项和第四项为经典分形模型产生的非相干散射强度系数。

## 4 数值计算与分析

图 2 为统计模型、经典分形模型和改进模型的非相干散射强度系数角分布情况图,其中海面上 19.5 m 处的风速为 10 m/s,尺度因子  $b=1.1$ ,分形维数  $D=2.1$ ,迭代次数  $N_f=400$ ,  $M=N=50$ ,入射角为  $30^\circ$ ,入射频率为 1 GHz,方位角为  $150^\circ$ ,反射角的变化范围为  $-90^\circ \sim 90^\circ$ ,主风向  $\bar{\beta}_0$  设为  $0^\circ$ ,波的传播方向  $\beta_n$  和  $\theta_j$  在  $[0, \pi]$  内取值,并且其概率密度函数参考文献[9],  $\beta_n$  在  $[0, \pi]$  内取 50 个值,  $\theta_j$  在  $[0, \pi]$  内取 400 个值,取 100 组  $\beta_n$  和  $\theta_j$ ,然后对 100 组数据取平均的结果,如图 2 所示。

由图 2 可知,当入射角为  $30^\circ$ ,方位角为  $150^\circ$  时,反射角在  $-30^\circ$  和  $0^\circ$  左右时波峰出现,在  $0^\circ$  时的峰值比在  $-30^\circ$  时小;当方位角在后向散射范围内时,反射角在镜向方向附近散射强度最大。比较波峰值可知,改进模型比统计模型和经典分形模型的都低,这是由于改进模型的波长正处在统计模型和经典分形模型之间,会使在产生峰值的极限情况下,相比其它两种模型的散射场不那么明显,而在其它方向的散射场贡献增大。在其它散射方向,改进模型的双站散射强度系数与统计模型相比变化剧烈,比经典分形模型起伏要大。这是由于在经典分形模型中加入涌浪部分,会使改进模型长重力波的成分增加,海面起伏增大,同理,统计模型中加入张力波成分,会使改进模型张力波的成分增加,海面粗糙度增大。

图 3 为统计模型、经典分形模型和改进模型的非相干后向散射强度系数随频率的变化情况比较图,其中

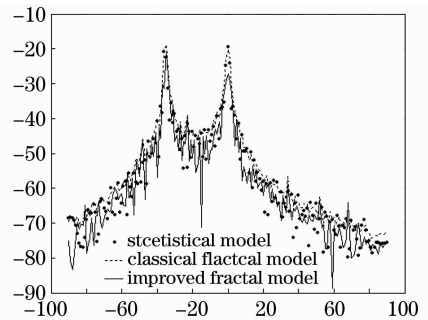


图 2 统计模型、经典分形模型和改进模型的非相干散射强度系数的角分布

Fig. 2 Angular distributions of the incoherent scattering intensity coefficient of statistical model, classical fractal model and improved fractal model

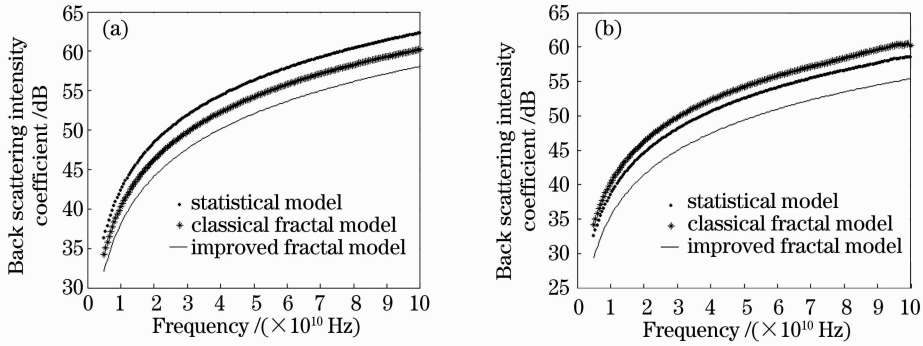


图3 不同频率下统计模型、经典分形模型和改进分形模型的后向散射强度系数的比较

Fig. 3 Comparison of back scattering intensity coefficient of statistical model, classical fractal model and improved fractal model with different frequency

海面 19.5 m 高处的风速为 10 m/s, 尺度因子  $b = 1.1$ , 分形维数  $D = 2.1$ , 迭代次数  $N_f = 400$ ,  $M = N = 50$ , 入射角为  $30^\circ$ , 入射频率选择为微波阶段, 范围为 5~100 GHz, 主风向  $\bar{\beta}_0$  设为  $0^\circ$ , 波的传播方向  $\beta_n$  和  $\theta_j$  在  $[0, \pi]$  内取值, 并且概率密度函数参考文献[9],  $\beta_n$  在  $[0, \pi]$  内取 50 个值,  $\theta_j$  在  $[0, \pi]$  内取 400 个值, 取 100 组  $\beta_n$  和  $\theta_j$ , 然后对 100 组数据的结果取平均, 重复取值过程 10 次, 得到 10 组平均值, 经总结得到下面的两组结果。

由图 3 可知, 3 种模型都随入射频率的增大而增大, 这是由于随着入射频率的增大, 入射波长减小, 会使海面更多的波长范围内的波和入射波产生谐振效应, 从而使后向散射系数越来越大。对改进模型, 会出现两种状态, 一种是改进模型中的统计部分波的传播方向  $\theta_j$  的取值和主风向方向相近, 改进模型中的分形部分波的传播方向  $\beta_n$  的取值和主风向方向相背离, 导致改进模型中统计模型部分比分形部分对后向散射的贡献大, 对散射占主导地位, 如图 3(a) 中的结果出现统计模型部分的值大于经典分形模型的值。改进模型中分形部分会削弱统计模型的后向散射强度系数, 出现改进模型的值都整体小于统计模型的值; 另一种情况与图 3(a) 的过程相反, 如图 3(b) 所示, 在此不再重述。

图 4 为 Longuet-Higgins 模型、经典分形模型和改进模型二维海面轮廓比较, 图 4(a) 为 Longuet-Higgins 模型在风速为 8 m/s, 主风向为  $0^\circ$  时二维海面轮廓; 图 4(b) 为经典分形模型在风速为 8 m/s,  $D = 2.2$ ,  $b = 1.3$ , 主风向为  $0^\circ$  时二维海面轮廓; 图 4(c) 为改进模型在风速为 8 m/s,  $D = 2.2$ ,  $b = 1.3$ , 主风向为  $0^\circ$  时二维海面轮廓。

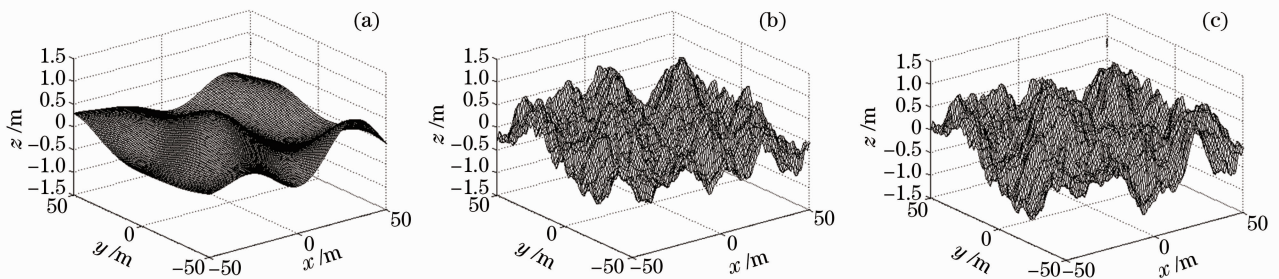


图 4 Longuet-Higgins 模型、经典分形模型和改进分形模型的二维海面轮廓的比较。(a) Longuet-Higgins 模型; (b) 经典分形模型; (c) 改进分形模型

Fig. 4 Comparison of 2D sea surface of Longuet-Higgins model, classical fractal model and improved fractal model.

(a) Longuet-Higgins model; (b) classical fractal model; (c) improved fractal model

图 5 为不同风速下改进模型的非相干后向散射强度系数的比较, 其中海面 19.5 m 高处的风速分别为 5、10、和 15 m/s, 尺度因子  $b = 1.2$ , 分形维数  $D$  分别为 2.2, 迭代次数  $N_f = 400$ ,  $M = N = 50$ , 入射频率为 1 GHz, 入射角在  $0^\circ \sim 90^\circ$  内变化。图 4 和 5 的  $\beta_n$  和  $\theta_j$  的取值方法和对数据的处理与图 2 相同。

比较 4(a)、4(b) 和 4(c) 可知, 改进海面轮廓中大尺度的涌浪同 Longuet-Higgins 二维海面轮廓基本是

一致的,但改进模型海面轮廓中的小尺度张力波更为明显。由图 5 可知,风速越大,后向散射强度系数越大,这是由于,风速越大,海面起伏越大造成的。这些结果和文献[10]中的结果是一致的,进一步验证了改进模型的正确性。图 2、图 3 和图 5 中涌浪的谱都选为 PM 谱,并且是垂直极化下的情况。

## 5 结 论

对于分形海面模型的功率谱在空间波数小于基波波数时不能满足正幂率的问题,提出了一种统计模型和归一化带限 Weierstrass 分形模型相结合的二维海面模型,通过比较统计模型、经典分形模型和改进模型的海面轮廓可以看出,文中提出的改进的分形模型更符合海面的实际情况,既具有涌浪特性,又保留了经典分形模型描述海面张力波的特性。从三种模型电磁散射系数的比较可以看出,重力波和张力波的电磁散射特性在改进模型中得到很好的体现,并且改进模型的电磁散射特性能很好的体现海面的动态变化情况。

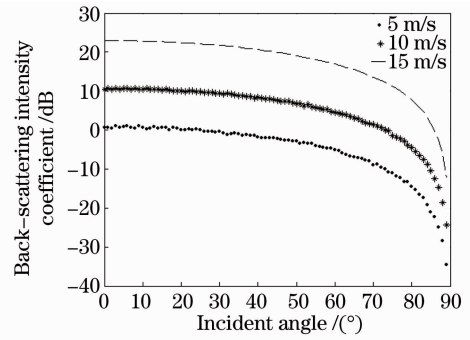


图 5 不同风速下改进分形模型后向散射强度系数的比较  
Fig. 5 Comparison of back scattering intensity coefficient of improved fractal model in different wind speed

## 参 考 文 献

- 1 Sun Mei, Xu Degang, Guo Peiyuan *et al.*. Transmission properties of cross dipole fractal slits for infrared wavelength[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2010, **47**(9): 091301  
孙梅, 徐德刚, 郭培源等. 正交偶极分形槽红外波段光学特性研究[J]. 激光与光电子学进展, 2010, **47**(9): 091301
- 2 Peng Gang, Lai Xiaoming, Yan Zhenggang. Fractal characteristic of statistic parameter of particles scattering pulse signal [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(6): 1694~1696  
彭刚, 赖小明, 闫振纲. 颗粒群光散射脉冲信号统计参数分形特征[J]. 光学学报, 2010, **30**(6): 1694~1696
- 3 Liu Lingyu, Tian Huiping, Xu Pan *et al.*. Study on characteristics of quasi-fractal photonic crystal based on Sierpinski gasket structure[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(3): 0316003  
刘凌宇, 田慧平, 许攀等. 基于 Sierpinski 地毯结构的类分形光子晶体特性研究[J]. 光学学报, 2011, **31**(3): 0316003
- 4 Zhang Qinqin, Zhu Siwei, Yuan Xiacong. Focal depth properties of modified fractal zone plate[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(8): 0823001  
张芹芹, 朱思伟, 袁小聪. 改进型分形波带片的焦深特性研究[J]. 光学学报, 2011, **31**(8): 0823001
- 5 Wang Hongxia, Ma Jin, Song Zibiao *et al.*. Light scattering properties of fractal aggregates[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **30**(3): 0329001  
王红霞, 马进, 宋仔标等. 分形凝聚粒子的光散射特性研究[J]. 光学学报, 2011, **31**(3): 0329001
- 6 D. L. Jaggard, X. Sun. Scattering from fractal surfaces[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1990, **7**(6): 1131~1139
- 7 G. Franceschetti, M. Migliaccio, D. Riccio. An electromagnetic fractal-based model for the study of fading[J]. *Radio Sci.*, 1996, **31**(6): 1749~1759
- 8 Wang Yunhua, Guo Lixin, Wu Zhensen. The application of an improved 2D fractal model for electromagnetic scattering from the sea surface[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(10): 5192~5194  
王运华, 郭立新, 吴振森. 改进的二维分形模型在海面电磁散射中的应用[J]. 物理学报, 2006, **55**(10): 5192~5194
- 9 F. Berizzi, E. D. Mese. Sea-wave fractal spectrum for SAR remote sensing[J]. *IEE Pro-Radar Sonar Navig*, 2001, **148**(2): 56~65
- 10 J. A. Ogilvy. *Theory of Wave Scattering from Random Rough Surface*[M]. New York: Adam Hilger, 1991. 83~99