

# 局域抽运条件下二维无序介质内偏振模式的特性研究

刘 海<sup>1</sup> 靳 慧<sup>1</sup> 吕健滔<sup>2</sup> 张祥军<sup>1</sup> 任子晖<sup>1</sup>

<sup>1</sup>中国矿业大学信息与电气工程学院, 江苏 徐州 221116  
<sup>2</sup>华中科技大学光电子科学与工程学院, 武汉光电国家实验室, 湖北 武汉 430074

**摘要** 考虑不同偏振态光波模式之间存在反转粒子数共享和竞争的情况, 联立求解麦克斯韦方程组与激光能级方程, 分别获得了局域抽运条件下横电(TE)偏振模式与横磁(TM)偏振模式的光谱时间特性和阈值特性。结果显示, 在合理选择局域抽运范围的情况下, TM偏振模式能够获得比TE偏振模式更低的阈值。TE偏振模式的峰值强度随时间演化逐渐增强后又迅速减小, 这显示TE偏振模式在局域抽运区域较小的情况下被TM偏振模式压制。这些结果均不同于随机介质被全局抽运时的情形。

**关键词** 激光光学; 光波局域化; 局域抽运; 偏振模式

**中图分类号** O436.3 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/LOP48.071407

## Characteristic of Polarized Modes under Local Pumping in Two-Dimensional Random Medium

Liu Hai<sup>1</sup> Jin Hui<sup>1</sup> Lü Jiantao<sup>2</sup> Zhang Xiangjun<sup>1</sup> Ren Zihui<sup>1</sup>

<sup>1</sup> School of Information and Electrical Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou, Jiangsu 221116, China  
<sup>2</sup> Wuhan National Laboratory for Optoelectronics, School of Optoelectronic Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074, China

**Abstract** Considering the share and competition on the inversed population between different polarized lightwaves, the spectral time evolution and the threshold of polarized modes under local pumping are investigated by simultaneously solving Maxwell's equations and rate equations of electronic population for both transverse magnetic (TM) and transverse electric (TE) modes. Results show that the lasing threshold of TM modes can be lower than that of TE modes when the radius of the local pumping region is suitably selected. The intensity peak of TE mode increases and then decreases quickly, which indicates that the TE mode is restrained gradually under local pumping when the local pumping region is quite small. The conclusions are different from the case of whole pumping.

**Key words** laser optics; localization of light wave; local pumping; polarized modes

**OCIS codes** 140.3430; 260.5430; 290.4210; 300.6360

## 1 引言

自从1968年Letokhov<sup>[1]</sup>预测了无序增益介质中可能存在激光辐射现象之后, 随机激光辐射的理论及实验研究得到了较大的发展<sup>[1~24]</sup>。1986年Markushev等<sup>[2]</sup>在用激光抽运低温 $\text{Na}_5\text{La}_{1-x}\text{Nd}_x(\text{MoO}_4)_4$ 粉末时, 发现了受激辐射现象, 这是随机激光器研究的一个标志性阶段。1994年Lawandy等<sup>[3]</sup>用530 nm的激光脉冲抽运 $\text{TiO}_2$ 微粒和若丹明(一种红色荧光染料)形成的胶体悬浮液时, 观测到了放大自发辐射现象, 进一步证明了Letokhov预言的正确性。1996年Wiersma等<sup>[4,5]</sup>利用具有增益项的扩散方程解释了光在随机介质中的散射动力学行为。1997年Wiersma等<sup>[6]</sup>首次在实验中观察到了光波的局域化现象。1999年Cao等<sup>[7]</sup>在ZnO薄膜的光致发光实验中观测到了相干反馈随机辐射现象, 进一步推动了随机激光的研究热潮。

**收稿日期**: 2010-09-29; **收到修改稿日期**: 2011-03-07; **网络出版日期**: 2011-05-09

**基金项目**: 国家自然科学基金(10876010)、国家博士后基金(20100481180)和江苏省博士后基金(1001032B)资助课题。

**作者简介**: 刘 海(1976—), 男, 博士, 讲师, 硕士生导师, 主要从事激光光谱学方面的研究。

E-mail: lhai\_hust@hotmail.com

2000年 Jiang 等<sup>[8]</sup>提出了与时间有关的随机激光半经典理论,将麦克斯韦方程组与反转粒子数速率方程联立起来进行计算,增益介质采用四能级介质。也就是说,用麦克斯韦方程组来表示光场,用激光四能级系统表示物质。利用时域有限差分法(FDTD)求解麦克斯韦方程组,进而获得随机介质中电磁场的空间分布以及辐射光谱。随后,Vanneste 等<sup>[9]</sup>将这一模型扩展到二维,国内也进行了相关的研究<sup>[21~24]</sup>。与传统激光器不同,由于光波具有波动性,随机介质中会产生光波的局域化现象。光波的局域化使光在局域处得到了相干反馈放大,这种局域实际上起到了一个类似传统激光器中光腔的作用,即准态腔。准态,就是光在随机介质中的局域态,它是麦克斯韦方程组在有限介质中电磁波的本征态,其边界条件是介质外部的波不能入射到介质中,介质中的电磁波可以透射到介质外或反射回介质中来,准态之间可以交换光子。准态支持的光学模式就是准态模。当一个随机介质给定后,它内部的准态模模式就已经给定了,不同的外部抽运方式就会激发不同的模式起振。当有外部增益时,不同的抽运方式激励不同的冷腔模起振。这时抽运光、辐射光和它们局域点的介质进行相互作用,产生受激辐射光放大,从而得到激光行为。这种相互作用导致了类光腔结构的准态腔在局域点处的形成。

2002年,Ito 等<sup>[10]</sup>用随机排列的掺杂剂的尼龙光纤组成了一个二维增益散射介质,并从这个随机介质中观察到了不同偏振方向所决定的不同激光现象。选用的增益介质为染料,没有考虑不同偏振态的光波模式之间对反转粒子数的竞争关系。基于此,本课题组分析了两种偏振态光波模式共享反转粒子数的情况,发现此时的横电(TE)偏振模会比横磁(TM)偏振模式的激射阈值小,并且 TM 偏振光波被 TE 偏振光波严重压制<sup>[11]</sup>。为了能够在反转粒子数共享的情况下更有效地直接获得 TM 偏振光波,研究了在局域抽运条件下不同偏振态光波模式的光学特性。选择局域抽运的方法,是因为本课题组<sup>[12~15]</sup>发现每个特定的偏振模式都有它对应的振幅空间分布,这个分布区域所对应的介质相应区域对这个特定的模式影响很大。不同的偏振态光波模式,其分布中心的位置也是不同的。而且,由于这些光波模式的局域化强弱不同,其分布范围也是不同的。若在此对应区域提供局域抽运,这个特定偏振模式将会被优先激发,这样可以改变 TM 偏振光波在共享反转粒子数时的不利情况,同时提供了一个有效获得 TM 偏振光波的方法。

本文考虑了不同偏振态光波模式之间存在的反转粒子数竞争的情况,通过联立求解两种偏振态光波所满足的麦克斯韦方程组与激光能级方程,分析了局域抽运条件下 TE 偏振模式与 TM 偏振模式的光谱时间特性和阈值特性。结果显示,在合理选择局域抽运范围的情况下, TM 偏振模式能够获得比 TE 偏振模式更低的阈值。TE 偏振模式的峰值强度随着时间演化逐渐增强后又迅速减小,这显示 TE 偏振模式在局域抽运区域较小的情况下被 TM 偏振模式压制。这些结果均不同于随机介质被全局抽运时的情形。

## 2 理论模型

在研究问题的过程中,由于三维介质内所有的物理量与  $z$  坐标无关,因此可以简化为二维的情况进行研究。二维随机介质的结构如图 1 所示,随机介质由折射率为  $n_2$  的散射颗粒与散布在散射颗粒周围的折射率为  $n_1$  的均匀介质构成,边长为  $L$ 。圆形散射颗粒的半径为  $r$ ;散射颗粒的表面填充率  $\Phi = N\pi r^2/S$ ,其中  $N$  是散射颗粒的个数, $S$  为随机介质的总面积。对散射颗粒,在数值模型中生成离散的圆形边界,然后对边界内进行填充,即生成了实心圆形散射颗粒的离散数据。整个介质被分成纵横的很多格点,格点与相邻格点之间的电磁场都根据在时间和空间上的递推公式直接数值求解。

在随机介质中,无序介质具有一定的边界和尺寸,对边界内的电磁场施以一定的约束。一切被约束在空间有限范围内的电磁场都只能存在于一系列分立的本征状态之中,场的每一个本征状态具有一定的振荡频率和一定的空间分布。因此采用时域有限差分法数值求解麦克斯韦方程组和速率方程组,可以很好地分析二维随机介质内 TM 与 TE 两组偏振光波模式的阈值特性。在无损耗的各向同性二维随机介质内, TM 模

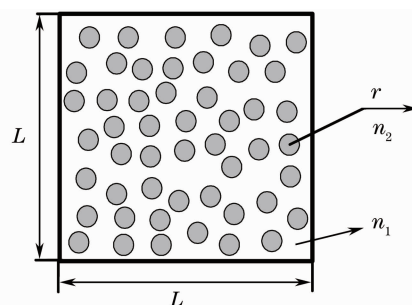


图 1 随机介质结构图

Fig. 1 Sketch of the structure of random medium

光波的电场与磁场分量满足如下麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \epsilon_i \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial P_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{cases}, \quad (1)$$

式中  $E_z$  和  $P_z$  分别为电场强度  $\mathbf{E}$  和极化强度  $\mathbf{P}$  在  $z$  方向上的分量,  $H_x$  和  $H_y$  分别为磁场强度  $\mathbf{H}$  在  $x$  和  $y$  方向上的分量,  $\epsilon_0$  和  $\mu_0$  分别为真空介电常数和真空磁导率,  $\epsilon_i$  为相对介质常数且  $\epsilon_i = n_i^2, i = 1, 2$ 。对于 TE 模光波的电场与磁场分量满足如下麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases} \epsilon_i \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial P_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ \epsilon_i \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial P_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases}, \quad (2)$$

式中  $E_x$  和  $E_y$  分别为电场强度  $\mathbf{E}$  沿  $x$  和  $y$  方向的分量,  $P_x$  和  $P_y$  分别为极化强度  $\mathbf{P}$  沿  $x$  和  $y$  方向的分量,  $H_z$  为磁场强度  $\mathbf{H}$  沿  $z$  方向的分量。为便于研究, 将随机介质能带结构简化为激光四能级系统来进行数值求解

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{N_2}{\tau_{21}} - W_p N_1, \quad (3)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}} - \frac{\mathbf{E}_{st}}{\hbar\omega_l} \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \quad (4)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = \frac{N_4}{\tau_{43}} - \frac{N_3}{\tau_{32}} + \frac{\mathbf{E}_{st}}{\hbar\omega_l} \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \quad (5)$$

$$\frac{dN_4}{dt} = W_p N_1 - \frac{N_4}{\tau_{43}}. \quad (6)$$

极化强度  $\mathbf{P}$  满足<sup>[19,20]</sup>

$$\frac{d^2 \mathbf{P}}{dt^2} + \Delta\omega_l \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \omega_l^2 \mathbf{P} = \kappa \Delta N \mathbf{E}_{st}, \quad (7)$$

式中  $\Delta N = N_2 - N_3$  是单位体积激光上能级与下能级的粒子数差值。(7) 式建立了麦克斯韦方程组与速率方程的联系。通过激光能级方程(3) 式中抽运速率的变化, (4) 和(5) 式中受激辐射场  $\mathbf{E}_{st}$  被改变。即(7) 式中的受激辐射场受到抽运速率的影响。而抽运速率这个参数表征了抽运场的大小。考虑两种不同偏振态光波模式对反转粒子数的共享与竞争, 取  $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{P} = P_x \mathbf{e}_x + P_y \mathbf{e}_y + P_z \mathbf{e}_z$ 。其中  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  分别表示在空间坐标系下, 沿  $x, y, z$  三个方向上的单位矢量。 $\Delta\omega_l = 1/\tau_{32} + 2/T_2$  是能级 2 与 3 之间的跃迁频率的谱线宽度,  $T_2$  为横向弛豫时间,  $\kappa$  为常数,  $\kappa = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3}{(\omega_l^2 \tau_{32})}$ ,  $c$  是真空中光速。设  $N_0$  代表总粒子数, 则  $N_0 = \sum_{i=1}^4 N_i$ 。

为了表征此系统为开放系统, 选择完全匹配层(PML)边界条件。通过在 FDTD 区域边界处设置一种特殊介质层, 它的波阻抗与相邻介质波阻抗完全匹配, 因而入射波将无反射地穿过分界面而进入 PML。并且由于 PML 为有耗介质, 进入 PML 的透射波将迅速衰减为很小的值, 即使 PML 为有限厚度, 它对于入射波仍有很好的吸收效果, 吸收率可达 99%, 几乎无反射波存在。空间步长和时间步长分别为  $\Delta x = \Delta y = 10 \text{ nm}$  和  $\Delta t = \Delta x / (2c) \approx 1.67 \times 10^{-17} \text{ s}$ 。选择氧化锌材料作为研究对象, 其能级 2 寿命  $\tau_{21} = 5 \times 10^{-12} \text{ s}$ , 能级 3 寿命  $\tau_{32} = 10^{-10} \text{ s}$ , 能级 4 寿命  $\tau_{43} = 10^{-13} \text{ s}$ , 碰撞时间  $T_2 = 2 \times 10^{-14} \text{ s}$ , 原子辐射中心频率  $\nu_l = \omega_l / 2\pi = 6.45 \times 10^{14} \text{ Hz}$  (中心波长  $\lambda_l = 464.46 \text{ nm}$ )。

### 3 结果与讨论

氧化锌介质样本的  $L = 5.5 \text{ }\mu\text{m}$ , 表面填充率  $\Phi = 40\%$ , 氧化锌颗粒半径  $r = 60 \text{ nm}$ , 背景介质折射率  $n_1 =$

1, 氧化锌的折射率  $n_2 = 2$ 。对整个介质提供全局抽运, 抽运速率  $W_p = 10^{12} \text{ s}^{-1}$ 。可以分别获得 TM 和 TE 偏振态光波模式在 6 ps 时刻的光谱图, 如图 2 所示。分别选定两种偏振态光波模式的主峰作为研究对象, 其中 TE 偏振模  $\lambda_{\text{TE}} = 462.3 \text{ nm}$  和 TM 偏振模  $\lambda_{\text{TM}} = 462.8 \text{ nm}$ , 这两个模是激射阈值最小的偏振光波模式。从频谱图可以看出, TM 偏振模式的峰值强度比 TE 偏振模式低了大约 6 个数量级。显然在对反转粒子数的竞争过程中, TM 偏振模式处于不利的位置。也就是说, TM 偏振模式的激射阈值比 TE 大很多并且 TM 模式被 TE 模式压制得非常厉害。

再进行局域抽运以获得选定偏振光波模式的振幅空间分布。需要用一个单色脉冲源对选定的偏振模式进行单频激发, 且这个单色脉冲源的中心频率就是这个对应模式的频率, 可以得到这个选定模式所对应的振幅空间分布。由于每个激射模式都在这个二维介质中对应着相应的空间分布区域, 如果对这个特定区域进行局域抽运, 那么这个模式将会优先激发。这是使用局域抽运获得 TM 偏振模式的依据。

为了便于两种偏振态式的对比分析, 使用相同的单频激励脉冲进行实验。选定激励脉冲的中心频率为 462.5 nm, 使之与两种偏振模式的中心频率都非常接近。获得了两个偏振模式  $\lambda_{\text{TM}}$  和  $\lambda_{\text{TE}}$  的振幅空间分布, 如图 3 所示, 两个不同偏振态的偏振模式拥有完全不同的空间分布情况。在图 3(a) 中, 把 TM 偏振模中能量最集中的部分用白色的圆圈标注出, 选择这个圆圈内的区域为局域抽运区域。显然, 从 TE 偏振模和 TM 偏振模的振幅空间分布可以看出, TM 偏振模式的能量非常集中, 当局域抽运区域较小的时候相对于 TE 偏振模有较大的优势被先激发。而当抽运区域足够大时, TE 偏振模将会重新比 TM 偏振模在竞争反转粒子数上有更多的优势, 因为 TM 偏振模式在局域抽运区域的能量集中优势将被削弱。也就是说, 对于 TM 偏振模而言存在一个最佳的局域抽运区域半径。如果抽运区域半径  $R$  小于这个临界值, 那么 TM 偏振模式将会被比较容易地激发, 否则 TE 偏振模式将更容易被激发。由图 3 中 TM 偏振模式的局域化分布判断并选择局域抽运区域的半径  $R = 500 \text{ nm}$ 。在局域抽运条件下, 获得 TM 偏振模式和 TE 偏振模式不同时刻的频谱图, 如图 4 和 5 所示, 可以非常清楚地看出各偏振态光波的频谱时间演化过程。显然在局域抽运条件下, TM 偏振光波模式改变了之前在对反转粒子数竞争中被压制的境况。

为了更清楚地观察两个选定偏振光波模式的时间演化过程, 描出两个主峰光强值随时间的变化情况, 如图 6 所示。显然在局域抽运条件下, TM 偏振态光波与 TE 偏振态光波模式的时间演化过程并不完全不同。特别是 TE 偏振光波有个明显的衰落过程。显然, 在局域抽运条件下, TM 偏振光波模式反而更容易起振。由图 6 可见, TM 光波模式在 6 ps 已经达到了稳态, 而 TE 光波模式在相同抽运条件下不能够达到稳态, 也就是说 TE 光波模式逐渐被 TM 光波模式压制而不能起振。图 7 显示了两种不同偏振态光波模式的阈值曲

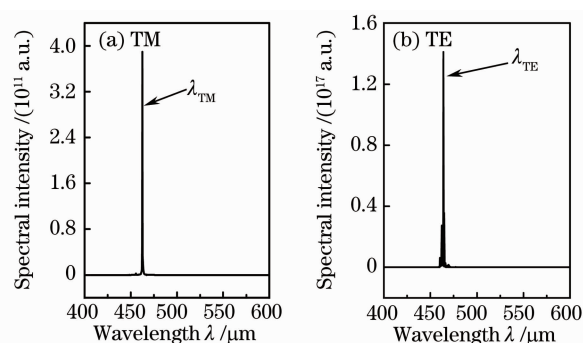


图 2 二维随机介质完全抽运时选定偏振模式的频谱图  
Fig. 2 Spectral intensity versus the wavelength  $\lambda$  in the 2D random medium that is pumped everywhere with selected mode

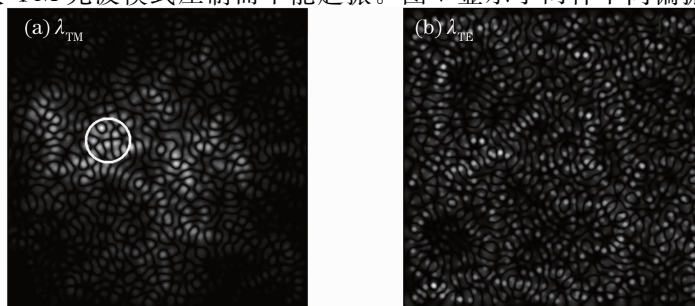


图 3 选定偏振模的振幅空间分布图

Fig. 3 Spatial distribution of the field amplitude corresponding to marked modes

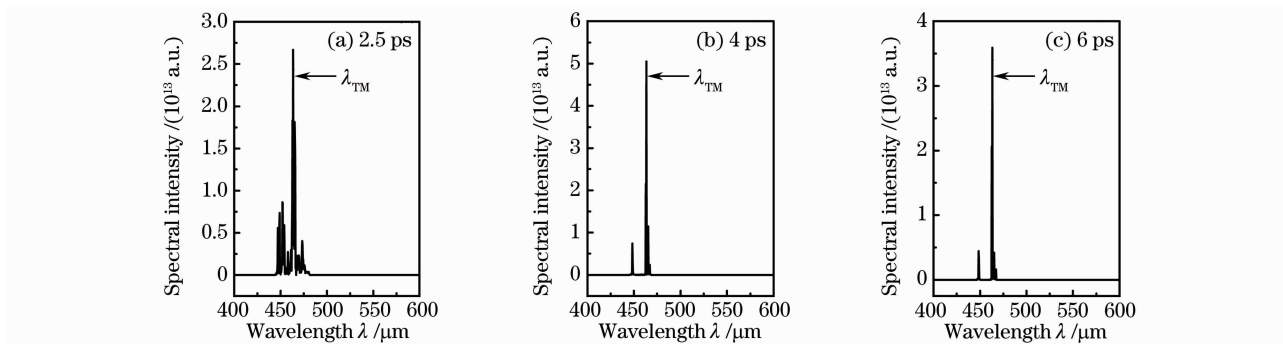


图 4 TM 偏振光波在局域抽运条件下不同时刻的频谱图

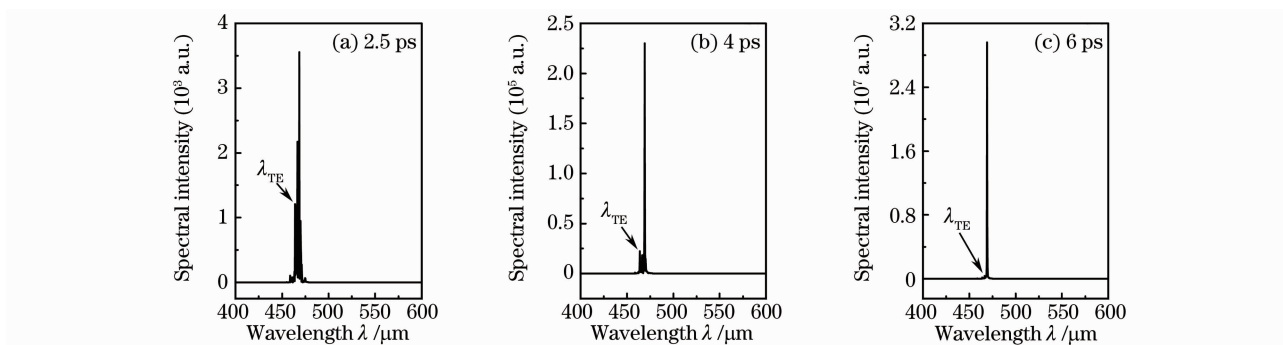
Fig. 4 Spectral intensity of TM polarized light waves versus the wavelength  $\lambda$  at different time with local pumping

图 5 TE 偏振光波在局域抽运条件下不同时刻的频谱图

Fig. 5 spectral intensity of TE polarized light waves versus the wavelength  $\lambda$  at different time with local pumping

线。显然在局域抽运条件下,合理地选择局域抽运的区域和大小,将很有可能导致二维介质内 TM 模式拥有比 TE 模式更小的激光阈值从而使得更容易获得 TM 偏振模。

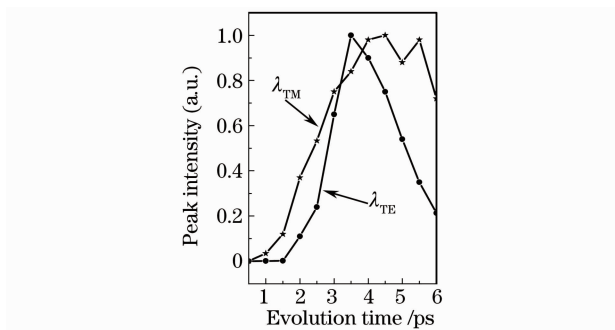


图 6 两种偏振态光波模式的峰值强度随时间的演化曲线

Fig. 6 Normalized peak intensity of polarized modes under local pumping versus the evolution time

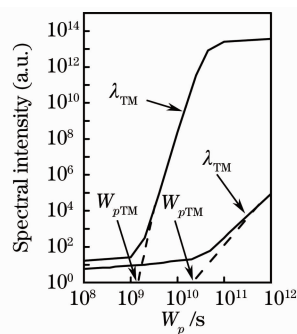


图 7 抽运区域条件下两种不同偏振态光波模式的阈值曲线

Fig. 7 Peak intensity of the mode that has the minimum lasing threshold versus the pump rate for both TE and TM cases

## 4 结 论

研究了局域抽运条件下二维随机介质内不同偏振态光波模式的阈值饱和特性和时间频谱演化特性。在局域抽运条件下,TE 偏振模式与 TM 偏振模式的特性不同于全局抽运的情形。如果对这个二维介质某些特殊区域进行局域抽运,那么与该特殊区域所对应的 TM 偏振模式被优先激发。如果能够选择合适的局域抽运位置和大小,将很有可能导致 TM 模式拥有比 TE 模式更小的激光阈值从而更容易获得 TM 偏振模。研究了不同局域抽运区域下偏振模式的频谱时间演化特性,发现 TE 偏振光波在局域抽运条件下能够被很严重地压制。



## 参 考 文 献

- 1 V. S. Letokhov. Generation of light by a scattering medium with negative resonance absorption[J]. *Sov. Phys. JEPT*, 1968, **26**: 835~840
- 2 V. M. Markushev, V. F. Zolin, C. M. Briskina. Luminescence and stimulated emission of neodymium in sodium lanthanum molybdate powders[J]. *Sov. J. Quantum Electron.*, 1986, **16**(2): 281~283
- 3 N. M. Lawandy, R. M. Salschandran, A. S. Lgomes *et al.*. Laser action in strongly scattering media[J]. *Nature*, 1994, **368**(6470): 436~439
- 4 D. S. Wiersma, A. Lagendijk. Light diffusion with gain and random lasers[J]. *Phys. Rev. E.*, 1996, **54**(4): 4256~4265
- 5 D. S. Wiersma, M. P. Van Albada, A. Lagendijk. Coherent backscattering of light from amplifying random media[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**(9): 1739~1742
- 6 D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk *et al.*. Localization of light in a disordered medium[J]. *Nature*, 1997, **390**(6661): 671~673
- 7 H. Cao, Y. G. Zhao, S. T. Ho *et al.*. Random laser action in semiconductor powder[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1999, **82**(11): 2278~2281
- 8 X. Y. Jiang, C. M. Soukoulis. Time dependent theory for random laser[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, **85**(1): 70~73
- 9 C. Vanneste, P. Sebbah, H. Cao. Lasing with resonant feedback in weakly scattering random systems[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, **98**(14): 143902
- 10 Tetsu Ito, Makoto Tomita. Polarization-dependent laser action in a two-dimensional random medium[J]. *Phys. Rev. E*, 2002, **66**(2): 027601
- 11 H. Liu, J. S. Liu, B. Feng *et al.*. The competition between two polarization states in two-dimensional random medium [J]. *Opt. Commun.*, 2008, **281**(10): 2964~2969
- 12 Liu Jinsong, Liu Hai, Wang Chun. Spectral time evolution of quasistate modes in two-dimensional random media[J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(7): 3116~3122  
刘劲松, 刘 海, 王 春. 二维随机介质中准态模的频谱时间演化特性[J]. *物理学报*, 2005, **54**(7): 3116~3122
- 13 Liu Jinsong, Liu Hai, Wang Chun. Threshold and saturation properties of two-dimensional random lasers and mode selection[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(8): 4123~4131  
刘劲松, 刘 海, 王 春. 二维随机激光器的模式选择及阈值与饱和特性[J]. *物理学报*, 2006, **55**(8): 4123~4131
- 14 J. S. Liu, Z. Xiong, C. Wang. Theoretical investigation on polarization-dependent laser action in two-dimensional random media[J]. *J. Opt. A*, 2007, **9**(7): 658~663
- 15 Wang Hong, Ouyang Zhengbiao, Han Yanling *et al.*. Mode area and amplification of localized modes in two-dimensional active random media[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(7): 1295~1300  
王 宏, 欧阳征标, 韩艳玲 等. 二维随机增益介质中局域模的模面积和放大[J]. *光学学报*, 2007, **27**(7): 1295~1300
- 16 S. John, G. Pang. Theory of lasing in a multiple-scattering medium[J]. *Phys. Rev. A.*, 1996, **54**(4): 3642~3650
- 17 R. M. Balachandran, N. M. Lawandy, J. A. Moon. Theory of laser action in scattering gain media[J]. *Opt. Lett.*, 1997, **22**(5): 319~321
- 18 H. Cao, J. Y. Xu, S.-H. Chang *et al.*. Transition from amplified spontaneous emission to laser action in strongly scattering media[J]. *Phys. Rev. E.*, 2000, **61**(2): 1985~1989
- 19 Y. Ling, H. Cao, A. L. Burin *et al.*. Investigation of random laser with resonant feedback[J]. *Phys. Rev. A.*, 2001, **64**(6): 063808
- 20 A. L. Burin, M. A. Ratner, H. Cao *et al.*. Model for a random laser[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **87**(21): 215503
- 21 Ye Yunxia, Fan Dianyuan. Incoherent radiation of amplifying random media[J]. *Chinese J. Lasers*, 2007, **34**(3): 364~369  
叶云霞, 范滇元. 增益随机散射介质中的非相干辐射[J]. *中国激光*, 2007, **34**(3): 364~369
- 22 He Benqiao, Liao Qing, Huang Yong. Random lasing in a cholesteric liquid crystal polymer solution[J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(10): 1477~1480  
何本桥, 廖 青, 黄 勇. 胆甾型液晶溶液膜中的随机激光[J]. *中国激光*, 2008, **35**(10): 1477~1480
- 23 Jiang Nan, Du Fei, Bai Ran *et al.*. Factor of influencing pumping threshold energy of whispering-gallery-mode laser in a cylindrical micro-cavity[J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(5): 660~663  
江 楠, 杜 飞, 白 然 等. 影响柱形微腔回音廊模激光抽运阈值能量的因素[J]. *中国激光*, 2008, **35**(5): 660~663
- 24 Lü Jiantao, Liu Hai, Wang Kejia *et al.*. The competition and threshold property between two polarization states in two-dimensional random medium[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(7): 1892~1897  
吕健滔, 刘 海, 王可嘉 等. 二维随机介质中偏振模式的竞争和阈值特性[J]. *光学学报*, 2009, **29**(7): 1892~1897