

圆环衍射效应下涡旋光束的偏振度传输

杨先才 丁攀峰

(华侨大学信息学院与工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要 利用部分相干光的相干与偏振的统一理论和 2×2 交叉谱密度矩阵传输规律, 推导出随机电磁涡旋光束经圆环衍射后偏振度的计算公式。在这些理论基础上, 研究了随机拉盖尔-高斯光束在传播过程中偏振度的变化。分析表明, 部分相干涡旋光束经圆环衍射后偏振度将发生变化, 在衍射场中光束的偏振度分布情况与入射光的相干度、入射光束的拓扑电荷数、衍射孔径的大小等因素有关。

关键词 偏振度; 斯托克斯矢量; 部分相干涡旋光束; 圆环衍射

中图分类号 O436.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/LOP48.060501

Polarization Degree of Vortex Beams Diffracted by Circular Ring and Its Propagation

Yang Xiancai Ding Panfeng

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Quanzhou, Fujian 362021, China)

Abstract With the help of the unified theory and polarization of partially coherent beams, and the propagation law of the 2×2 cross-spectral density matrix, the general formula was derived to calculate the degree of polarization for a class of stochastic electromagnetic vortex beam transmitted through a circular ring. Based on these theories, the changes of degree of polarization of the Laguerre-Gaussian beam and its propagation characterization have been investigated. It is shown that the degree of polarization will change after the beam transmitted through the circular ring, and the degree of polarization of the diffractive beam is related with the coherence, the topological charges of the source, and the size of the circular ring.

Key words degree of polarization; Stokes parameters; partially coherent vortex beams; circular ring diffraction

OCIS codes 050.1940; 050.4865; 260.5430

1 引言

偏振特性是光束的一个重要特性之一, 近年来, 光束的偏振度在传输过程中的变化逐渐引起人们的兴趣^[1~3]。由于部分相干光在大气中传输时发散程度要比完全相干光小得多; 同时涡旋光束所带有的轨道角动量可作为信息的载体, 因此部分相干涡旋光束得到了人们的关注^[4,5]。众所周知, 随机电磁光束在传播的过程中, 光强分布以及偏振度会发生改变, 拉盖尔-高斯模型光束经常作为研究此类问题的光源, 而研究的主要工具则是交叉谱密度矩阵, 这是因为无论是在线性介质还是在真空中, 2×2 的交叉谱密度矩阵都具有传播特性^[1]。然而, 圆环衍射条件下光束的偏振度分布及其变化情况尚不清楚, 值得探讨和研究。本文从相干和偏振的统一理论出发^[6,7], 在交叉谱密度矩阵传输特性的基础上研究了部分相干涡旋光束的偏振度在通过圆环后的变化情况。同时, 可以研究涡旋光束通过圆环衍射后偏振度的变化情况来推算入射光束的一些特性, 这对于涡旋光束的研究具有指导意义。

收稿日期: 2010-08-10; **收到修改稿日期**: 2010-10-30; **网络出版日期**: 2011-04-25

基金项目: 福建省自然科学基金(A0810012)资助课题。

作者简介: 杨先才(1985—), 男, 硕士研究生, 主要从事光束传输方面的研究。E-mail: yangxiancai08@hqu.edu.cn

导师简介: 丁攀峰(1980—), 博士, 硕士生导师, 主要从事偏振光学及光束传输方面的研究。

E-mail: dingpanfeng@163.com(通信联系人)

2 理论分析及公式推导

假设一随机电磁涡旋光束经圆环衍射后沿着 z 轴正方向传输,如图 1 所示,其中圆环的内半径为 a ,外半径为 b , \mathbf{r} 表示圆环处横向位置矢量, $\boldsymbol{\rho}$ 表示衍射场中观察平面上的横向位置矢量。

此时源平面上随机电磁光束的二阶相关参数用 2×2 交叉谱密度矩阵表示为

$$\mathbf{W}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \begin{bmatrix} W_{xx}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) & W_{xy}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \\ W_{yx}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) & W_{yy}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

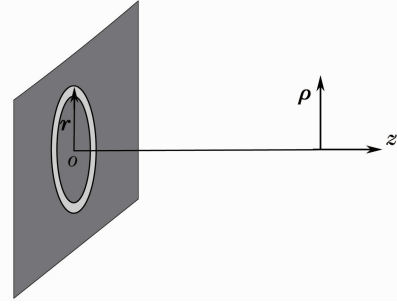


图 1 光束经圆环衍射示意

Fig. 1 Illustration of circular ring-induced diffraction

式中矩阵元表示为

$$W_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \langle E_i^*(\mathbf{r}_1, \omega) E_j(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle, \quad (i = x, y, \quad j = x, y) \quad (2)$$

式中 $E_i(\mathbf{r}, \omega)$ 为源平面 \mathbf{r} 处圆频率 ω , i 方向的平均场分量,星号 * 表示复共轭,角括号 $\langle \rangle$ 表示系综平均。同时知道,光束的偏振度与矩阵元之间的关系为

$$P(\mathbf{r}) = \sqrt{1 - \frac{4\text{Det } \mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r})}{[\text{Tr } \mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r})]^2}}, \quad (3)$$

式中 $\mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ 是交叉谱密度矩阵, Tr , Det 分别是对交叉谱密度矩阵的求迹运算和求行列式运算。

根据广义惠更斯-菲涅耳衍射积分,在近轴近似情况下,传输一段距离后,可以得到衍射光束在观察平面上的交叉谱密度矩阵元为^[8]

$$W_{ij}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) = \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^2 \iint_{z=0} W_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z=0) \exp\left\{ -\frac{ik}{2z} [(\boldsymbol{\rho}_1 - \mathbf{r}_1)^2 - (\boldsymbol{\rho}_2 - \mathbf{r}_2)^2] \right\} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (4)$$

式中 $k = 2\pi/\lambda$, λ 为入射光的波长, $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2$ 为观察平面的二维位置矢量, z 是传播距离。

通常选择入射的部分相干涡旋光束振幅统计平均为拉盖尔-高斯型^[8]

$$A_i(\mathbf{r}, z) = E_{i0} \left(\frac{\mathbf{r}}{\sigma_{i0}} \right)^{m_i} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{\sigma_{i0}^2}\right) \exp(i\beta_i), \quad (i = x, y) \quad (5)$$

式中 E_{i0} 和 σ_{i0} 分别为源平面上光束的场辐射和光斑大小, m_i 为涡旋光束的拓扑电荷数, β_i 是光束的初相位。同时,入射部分相干光的相干系数是高斯型

$$\mu_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B_{ij} \exp\left[-\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}{\delta_{ij}^2}\right], \quad (6)$$

式中 δ_{ij} 是光束的相干长度,满足 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, 而 B_{ij} 应满足参考文献[9]中的(10)式。

把(5),(6)式代入(2)式便可以得到源平面处入射部分相干涡旋光束的交叉谱密度矩阵主对角元为

$$W_{ii}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z=0) = E_i E_i \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\sigma_{i0}} \right)^{m_i} \left(\frac{\mathbf{r}_2}{\sigma_{i0}} \right)^{m_i} \exp[-im_i(\phi_1 - \phi_2)] \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2}{\sigma_{i0}^2}\right) \times \exp\left[-\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 - 2\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}{\delta_{ii}^2}\right], \quad (i = x, y) \quad (7)$$

非对角元为

$$W_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z=0) = E_i E_j B_{ij} \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\sigma_{i0}} \right)^{m_i} \left(\frac{\mathbf{r}_2}{\sigma_{j0}} \right)^{m_j} \exp[-i(m_i \phi_1 - m_j \phi_2)] \exp\left[-\left(\frac{\mathbf{r}_1^2}{\sigma_{i0}^2} + \frac{\mathbf{r}_2^2}{\sigma_{j0}^2}\right)\right] \times \exp\left[-\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 - 2\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}{\delta_{ij}^2}\right], \quad (i, j = x, y; i \neq j) \quad (8)$$

把(7),(8)式分别代入(4)式,并结合参考文献[9]中的(14)~(16)式,则经过一系列的简化计算后可以得到在观察平面处,经圆环衍射后的部分相干涡旋光束的交叉谱密度矩阵主对角元为

$$W_{ii}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \theta_1, \theta_2, z) = E_i^2 \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^2 \exp\left[-\frac{ik}{2z}(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)^2\right] \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_a^b \int_a^b \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\sigma_{i0}} \right)^{m_i} \left(\frac{\mathbf{r}_2}{\sigma_{j0}} \right)^{m_i} \times$$

$$\exp\left[-\left(\frac{1}{\sigma_{i0}^2} + \frac{1}{\delta_{ii}^2}\right)(r_1^2 + r_2^2)\right] \exp\left[-\frac{ik}{2z}(r_1^2 - r_2^2)\right] J_l\left(\frac{kr_1 \rho_1}{z}\right) J_l\left(\frac{kr_2 \rho_2}{z}\right) \times \\ I_{l+m_i}\left(\frac{2r_1 r_2}{\delta_{ii}^2}\right) \exp[-il(\theta_1 - \theta_2)] r_1 r_2 dr_1 dr_2, \quad (i = x, y) \quad (9)$$

非对角元为

$$W_{ij}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \theta_1, \theta_2, z) = E_i E_j B_{ij} \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \exp\left[-\frac{ik}{2z}(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)^2\right] \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_a^b \int_a^b \left(\frac{r_1}{\sigma_{i0}}\right)^{m_i} \left(\frac{r_2}{\sigma_{j0}}\right)^{m_j} \times \\ \exp\left[-\left(\frac{r_1^2}{\sigma_{i0}^2} + \frac{r_2^2}{\sigma_{j0}^2}\right)\right] \exp\left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{\delta_{ij}^2}\right) \exp\left[-\frac{ik}{2z}(r_1^2 - r_2^2)\right] J_l\left(\frac{kr_1 \boldsymbol{\rho}_1}{z}\right) J_l\left(\frac{kr_2 \boldsymbol{\rho}_2}{z}\right) \times \\ I_{l+m_i}\left(\frac{2r_1 r_2}{\delta_{ij}^2}\right) \exp[-il(\theta_1 - \theta_2)] r_1 r_2 dr_1 dr_2, \quad (i, j = x, y; i \neq j) \quad (10)$$

令(9)和(10)式中的 $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}, \theta_1 = \theta_2 = \theta$, 在交叉谱密度矩阵元的基础上, 根据斯托克斯矢量元与矩阵元的关系得到

$$\begin{cases} I(\boldsymbol{\rho}, \theta, z) = S_0(\boldsymbol{\rho}, \theta, z) = W_{xx}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, \theta, \theta, z) + W_{yy}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, \theta, \theta, z) \\ S_1(\boldsymbol{\rho}, \theta, z) = W_{xx}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, \theta, \theta, z) - W_{yy}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, \theta, \theta, z) \\ S_2(\boldsymbol{\rho}, \theta, z) = W_{xy}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, \theta, \theta, z) + W_{yx}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, \theta, \theta, z) \\ S_3(\boldsymbol{\rho}, \theta, z) = i[W_{yx}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, \theta, \theta, z) - W_{xy}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, \theta, \theta, z)] \end{cases}, \quad (11)$$

再结合(3)和(11)式可以计算出衍射光束在观察平面上的偏振度用斯托克斯矢量元来表达的式为

$$P(\boldsymbol{\rho}, \theta, z) = \frac{\sqrt{[S_1(\boldsymbol{\rho}, \theta, z)]^2 + [S_2(\boldsymbol{\rho}, \theta, z)]^2 + [S_3(\boldsymbol{\rho}, \theta, z)]^2}}{S_0(\boldsymbol{\rho}, \theta, z)}. \quad (12)$$

由(9)~(12)式可计算出衍射光束的偏振度, 同时可知圆环衍射效应将对入射光束的偏振度产生影响, 不同的入射光束受到衍射效应的影响不同, 随着入射光束自身参量的改变或衍射系统的改变, 衍射光束的偏

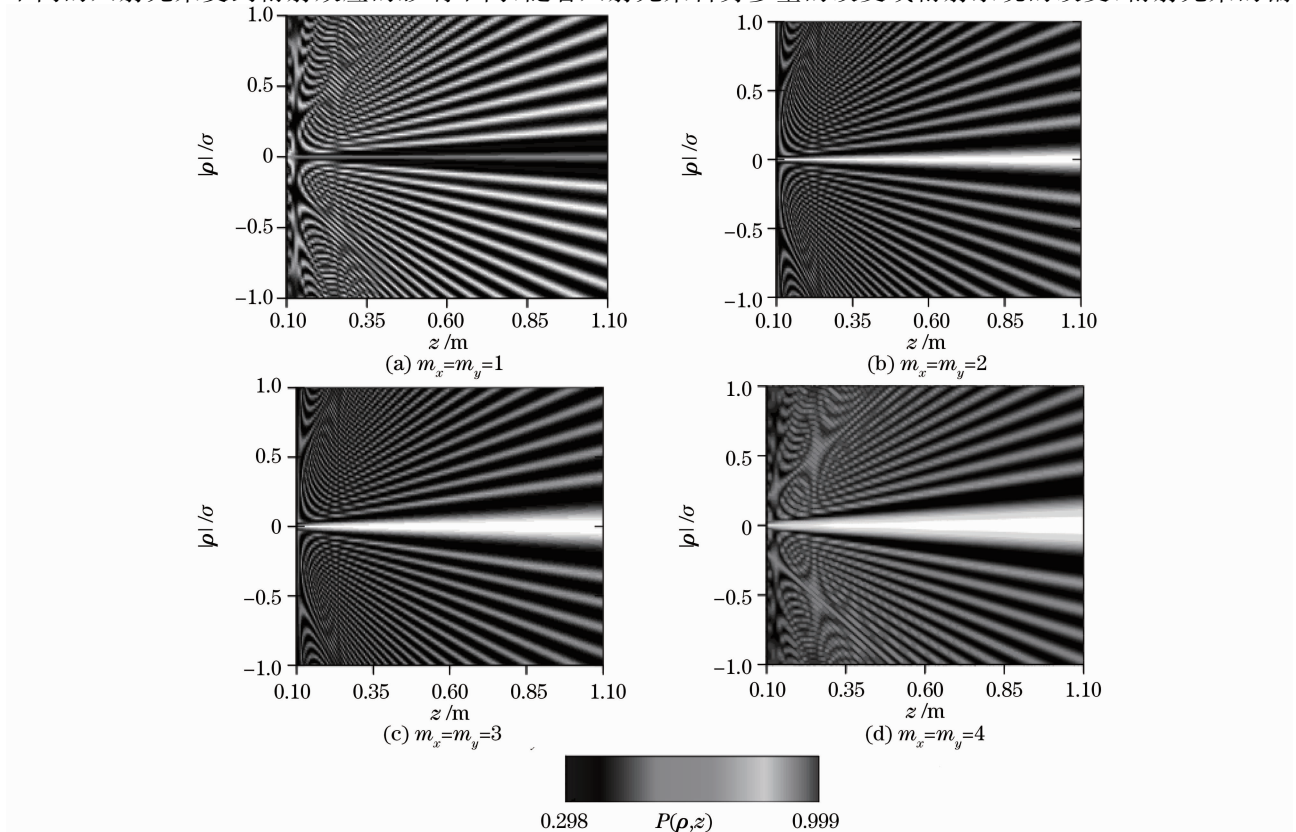


图2 不同拓扑电荷数下衍射光束的偏振度分布

Fig. 2 Plots of polarization degree distribution in the diffraction field for different topological charges

振度分布将随之发生改变。

3 模拟数值计算

对衍射光束的偏振度进行数值计算时所用重要参数入射光斑的大小和入射光波的波长为 $\sigma_0 = \sigma = 5 \text{ mm}$, $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ 。

3.1 不同拓扑电荷数下衍射光束的偏振度分布

图 2 是部分相干涡旋光束在不同的拓扑电荷数下经过圆环衍射之后偏振度的分布情况,其模拟参量为: $a = 2 \text{ mm}$, $b = 2.02 \text{ mm}$, $\delta_{xx} = 2 \text{ mm}$, $\delta_{yy} = 6 \text{ mm}$, $\delta_{xy} = 8 \text{ mm}$, $E_x = 1$, $E_y = 0.8$, $|B_{xy}| = 0.3$ 。由图 2 可知,随着拓扑电荷数的增加, z 轴上的偏振度逐渐增大;而在四种不同的情况下,衍射光束的偏振度都沿着径向有起伏的振荡变化,衍射光束的偏振度分布相对于光轴具有轴对称性;就整体来看,衍射光束在空间呈现出辐射状,随着拓扑电荷数的增加,辐射条纹有向轴外扩展的变化,条纹也逐渐变宽。图 3 是横截面上衍射光束的偏振度沿着径向的分布曲线,其模拟参量 $z = 0.5 \text{ m}$,其余与图 2 相同。从图 3 可以看出衍射光束的偏振度在近轴处沿着径向的变化比非近轴处要大,并且图 2 和图 3 都显示出衍射光束的偏振度具有轴对称性,沿着径向有起伏变化,随着拓扑电荷数的增加,轴上的偏振度越来越大,而偏振度的对称中心范围也越来越宽。中心点在 $z = 0.5 \text{ m}$ 处的偏振度随着拓扑电荷数的增加而增大,并且偏振度的大小

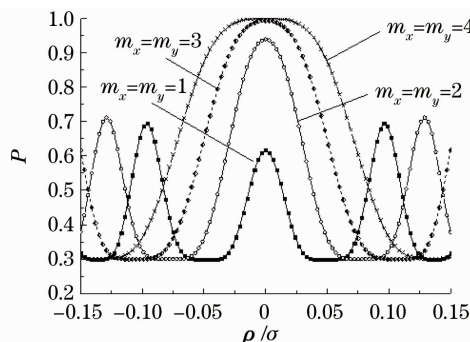


图 3 横截面上不同拓扑电荷数下衍射光束偏振度的分布曲线

Fig. 3 Curves of the degree of polarization distribution in cross section of the diffraction field for different topological charges

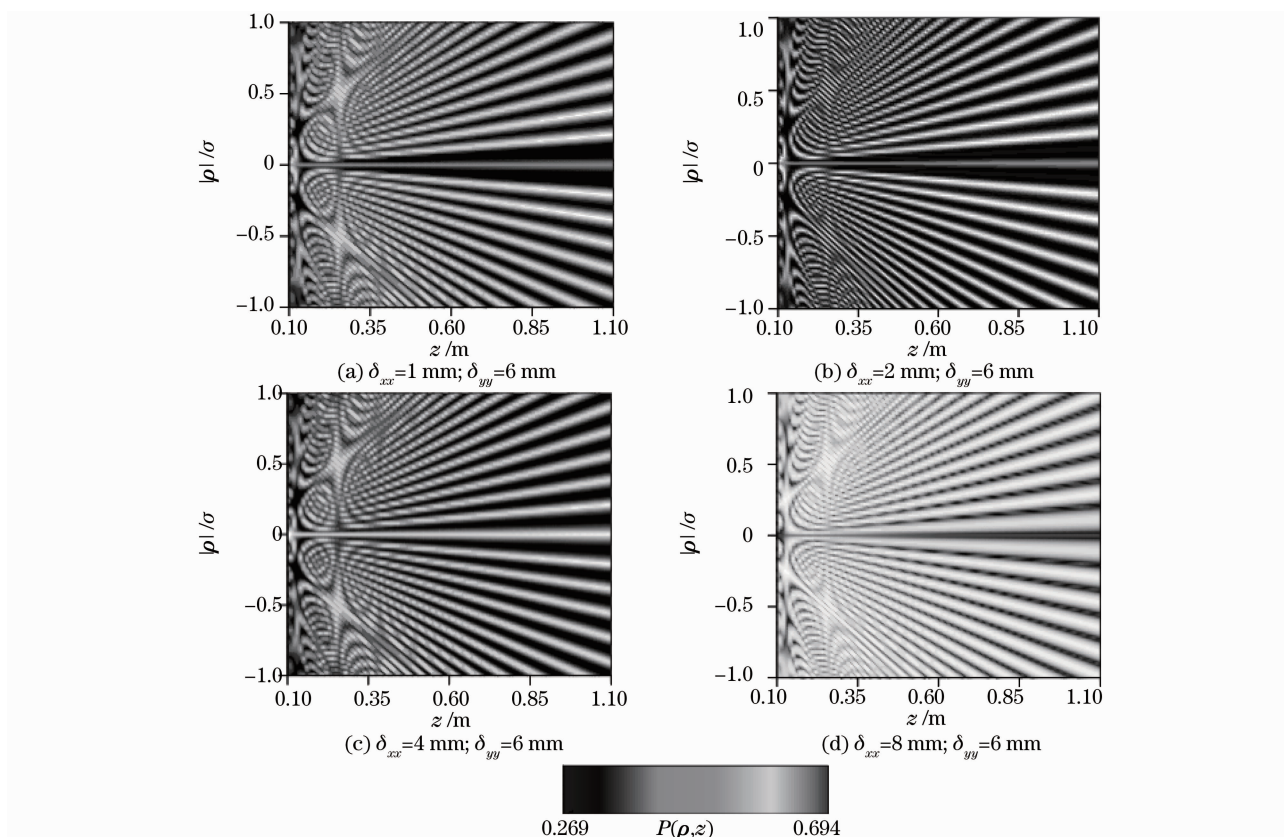


图 4 不同相干长度下衍射光束的偏振度分布

Fig. 4 Plots of polarization degree distribution in the diffraction field for different coherent lengths

接近于 1。

3.2 不同的相干长度下衍射光束的偏振度分布

图 4 是部分相干涡旋光束在不同的相干长度下经过圆环衍射之后偏振度的分布情况,其模拟参量为 $a=2\text{ mm}$, $b=2.02\text{ mm}$, $\delta_{xy}=8\text{ mm}$, $m_x=m_y=1$, $E_x=1$, $E_y=0.8$, $|B_{xy}|=0.3$ 。图 4 衍射光束的偏振度分布在空间呈现出辐射状;但是对四个图进行比较之后可知:当 x 向的相干长度变大但小于 y 方向的相干长度时,偏振度的分布并无明显的变化;当 x 方向的相干长度大于 y 方向的相干长度时,偏振度的分布出现逆转,原来偏振度大的地方变小,原来偏振度小的地方变大;而对比四种不同的情况,衍射光束的偏振度都沿着径向有起伏的变化,偏振度分布相对于光轴具有轴对称性。图 5 是横截面上衍射光束的偏振度沿着径向的分布曲线,其模拟参量 $z=0.5\text{ m}$,其余与图 4 相同。从图 4,5 都显示出衍射光束的偏振度具有轴对称性,沿着径向有起伏变化,图 5 可以看出在 $z=0.5\text{ m}$ 处,随着 x 方向相干长度逐渐增大并超过 y 方向相干长度,衍射光束中心点的偏振度先增大后减小。

3.3 不同的衍射孔径下衍射光束的偏振度分布

图 6 是部分相干涡旋光束在不同的衍射孔径下经过圆环衍射之后偏振度的分布情况,其模拟参量为: $\delta_{xx}=2\text{ mm}$, $\delta_{yy}=6\text{ mm}$, $\delta_{xy}=8\text{ mm}$, $m_x=m_y=1$, $E_x=1$, $E_y=0.8$, $|B_{xy}|=0.3$ 。就整体来看,衍射光束在空间呈现出辐射状,随着衍射孔径的增大,辐射条纹有向轴内压缩的变化,条纹也逐渐变窄,也就是说随着孔径

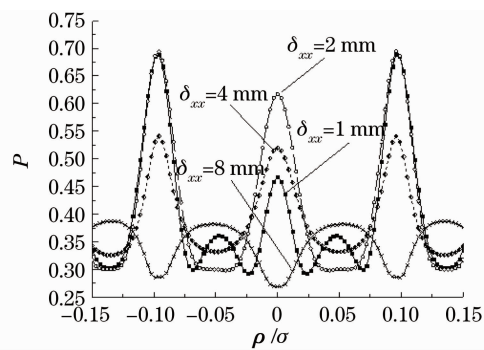


图 5 横截面上不同相干长度下衍射光束偏振度的分布曲线

Fig. 5 Curves of the degree of polarization distribution in cross section of the diffraction field for different coherent lengths

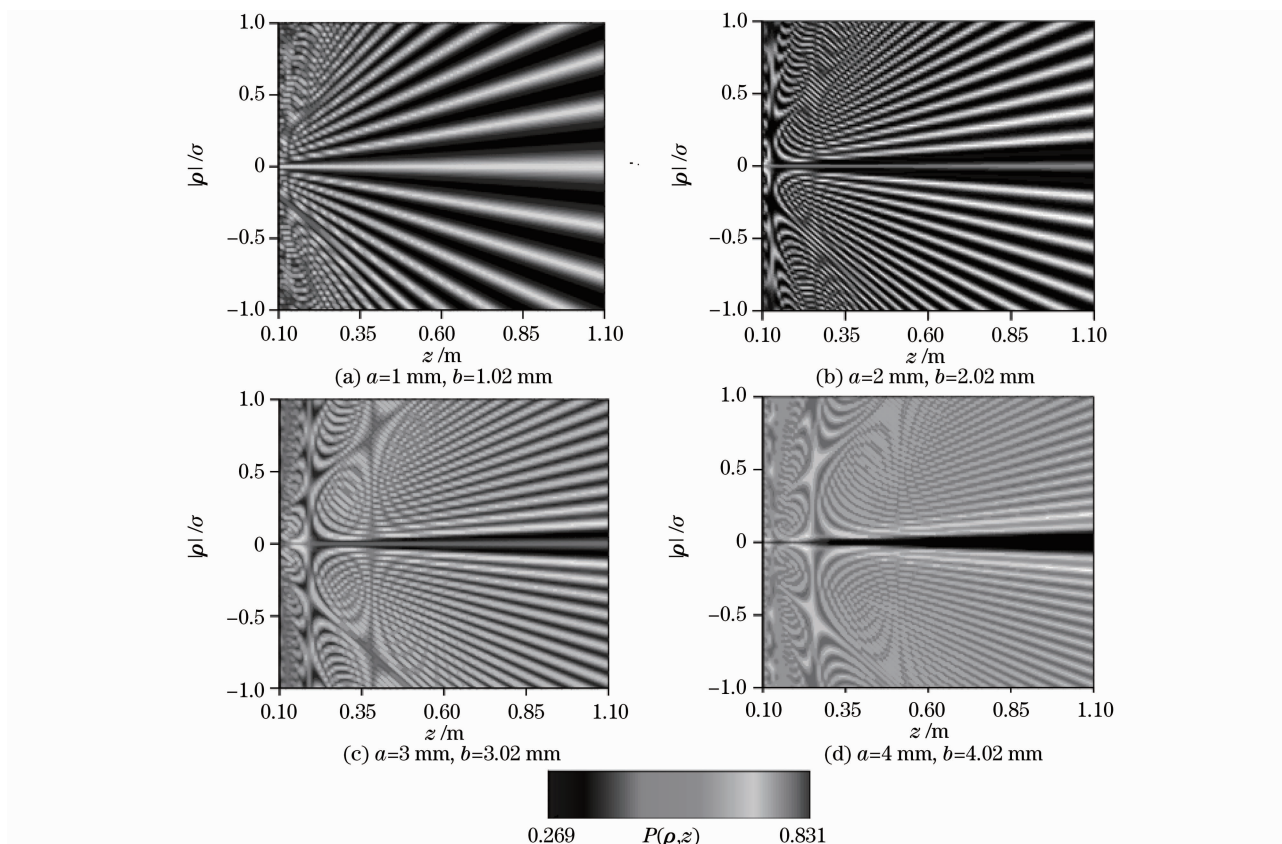


图 6 不同衍射孔径下衍射光束的偏振度分布

Fig. 6 Plots of polarization degree distribution in the diffraction field for different sizes of circular ring

的增大近场的范围越来越大。同样地,在四种不同的情况下,衍射光束的偏振度都沿着径向有起伏的振荡变化,衍射光束的偏振度分布相对于光轴具有轴对称性。图7是横截面上衍射光束的偏振度沿着径向的分布曲线,其模拟参量 $z=0.5$ m,其余与图6相同。从图7可见衍射光束的偏振度具有轴对称性,沿着径向有起伏变化,随着衍射孔径的增大,轴上的偏振度在减小。

4 结 论

采用相干性与偏振的统一理论,研究了衍射效应诱导光束偏振度的变化。结果表明,经圆环衍射后光束的偏振度分布相对于轴即光的传播方向有轴对称性,而沿着光束横向截面的径向,衍射光束的偏振度有着起伏的振荡变化,这种对称性体现了整个光学系统相对于光轴具有轴对称性,而偏振度的起伏振荡变化正是衍射所起的作用。同时,从衍射光束的偏振度的分布情况可知,不同的入射光束所受到的衍射诱导作用是不同的,同样的衍射孔径下不同相干长度的入射光束在衍射场中偏振度的分布情况是不同的,不同的拓扑电荷数下衍射光束的偏振度分布也是不相同,而同一束入射光在不同的衍射孔径下的偏振度分布也不一样。

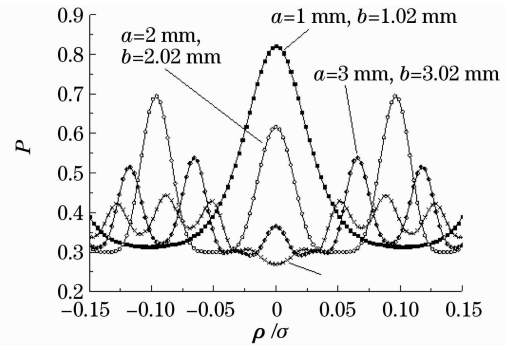


图7 横截面上不同衍射孔径下衍射光束偏振度的分布曲线

Fig. 7 Curves of polarization degree distribution in cross section of the diffraction field for different sizes of circular ring

参 考 文 献

- 1 D. James. Change of polarization of light beams on propagation in free space[J]. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 1994, **11**(5): 1641~1643
- 2 O. Korotkova, E. Wolf. Change in the state polarization of a random electromagnetic beam on propagation[J]. *Opt. Commun.*, 2005, **246**: 35~43
- 3 J. Ellis, A. Dogariu, S. Ponomarenko. Degree of polarization of statistically electromagnetic fields[J]. *Opt. Commun.*, 2005, **248**: 333~337
- 4 G. Gibson, A. J. Courtia, M. J. Padgett. Free space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum[J]. *Opt. Express*, 2004, **12**(22): 5448~5456
- 5 R. Celechovsky, Z. Bouchal. Optical implementation of the vortex information channel[J]. *New J. Phys.*, 2007, **9**(9): 328
- 6 E. Wolf. Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams[J]. *Phys. Lett. A*, 2003, **312**: 263~267
- 7 S. Tomohiro, E. Wolf. Correlations between intensity fluctuations in stochastic electromagnetic beams of any state of coherence and polarization[J]. *Opt. Commun.*, 2007, **272**: 289~292
- 8 M. Salem, O. Korotkova, A. Dogariu. Polarization changes in partially coherent electromagnetic beams propagating through turbulent atmosphere[J]. *Waves in Random Media*, 2004, **14**: 513~523
- 9 Z. Chen, J. Pu. Stochastic electromagnetic vortex beam and its propagation[J]. *Phys. Lett. A*, 2008, **372**: 2734~2736