

# SU(1,1)场与 $\Xi$ 型三能级原子相互作用的光场非经典特性

郑乃清

(宁德师范学院, 福建 宁德 352100)

**摘要** 采用数值计算方法,研究了初始处于双模 SU(1,1)相干态的双模腔场与一个 $\Xi$ 型三能级原子共振相互作用的光场非经典特性,讨论了初始光场强度、耦合系数和原子态的选择性测量对光场和压缩、光子亚泊松(Poisson)分布、模间相干性以及柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式的影响。结果表明, $b$ 模总是呈现和压缩,初始光场强度增强或直接对原子进行态选择测量, $b$ 模的和压缩明显地增强;当初始光场强度较弱且直接对原子进行态选择测量,两个模的光子都呈现亚泊松分布;光场两模间总是呈现正相关,而且是非经典关联;柯西-施瓦茨不等式不成立。

**关键词** 量子光学;SU(1,1)相干态场; $\Xi$ 型三能级原子;选择原子测量;非经典特性

**中图分类号** O431      **文献标识码** A      **doi**: 10.3788/LOP48.032701

## Nonclassical Properties of SU(1,1) Field Interacting with $\Xi$ -Type Three-Level Atom

Zheng Naiqing

(Department of Physics and Electrical Engineering, Ningde Normal University, Ningde, Fujian 352100, China)

**Abstract** Nonclassical properties of a two-mode field initially in a SU(1,1) coherent state resonantly interacting with a  $\Xi$ -type three-level atom are investigated numerically. The influences of the initial intensity of the light field, the coupling constant and the selective atomic measurement on the sum squeezing of the light field, the sub-Poisson distribution of photon, the mode-correlation properties and the Cauchy-Schwarz inequality are discussed. The results indicate when the initial intensity of the light field is increased or the direct state-selective measurement is performed on the atom, the sum squeezing of mode  $b$  is distinctly enhanced, and mode  $b$  always exhibits the sum squeezing. When the initial intensity of the light field is small and the direct state-selective measurement is performed on the atom, the two modes always exhibit the sub-Poisson distribution. The correlation of the two-mode light is both positive and non classical, and the Cauchy-Schwarz inequality is violated.

**Key words** quantum optics; SU(1,1) coherent states;  $\Xi$ -types three-level atom; selective atomic measurement; nonclassical properties

**OCIS codes** 270.0270; 270.1670; 270.5290

## 1 引言

关联双模辐射场的非经典特性<sup>[1]</sup>及其与原子体系的相互作用的研究是量子光学研究的热点之一。重要的非经典效应,如原子布居的崩塌与复苏、光场的压缩、光子的亚泊松(Poisson)分布、光子的反聚束效应、违背柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式等<sup>[2~6]</sup>,不断被揭示出来。双模 SU(1,1)相干态场是一种典型的关联双模场,两个模的光子数之差为定值,模之间存在很强的关联,在量子测量、光通信及探测物理新现象等方面有着潜在的应用前景。最近, Ji 等<sup>[7,8]</sup>发现在光学微腔阵列中可以有效地实现量子铁磁相和反铁磁,在激光冷却的原子波色-爱因斯坦凝聚中可以产生一种新颖的量子相-分数量子涡旋和涡旋晶格。Gerry 等<sup>[9~13]</sup>分别研究了在单模场与二能级原子相互作用系统和双模场与三能级原子相互作用系统中,原子态的选择性测量对光场非经典特性的影响。本文研究了双模 SU(1,1)相干态场与一个 $\Xi$ 型三能级原子共振相

**收稿日期**: 2010-10-21; **收到修改稿日期**: 2010-11-26

**基金项目**: 宁德师范学院科研基金(2009J002)资助课题。

**作者简介**: 郑乃清(1963—),男,副教授,主要从事量子光学方面的研究。E-mail: fjndtc\_znq@sina.com

互作用系统的光场非经典特性,通过数值计算讨论了初始光场强度、耦合系数和原子态的选择性测量对光场非经典特性的影响。

## 2 系统模型和态矢

考虑一个双模 SU(1,1) 相干态场与一个  $\Xi$  型三能级原子共振相互作用的系统。原子的高能级、中间能级和低能级分别用  $|i\rangle$ 、 $|e\rangle$  和  $|g\rangle$  表示,能级  $|i\rangle$  和  $|g\rangle$  之间的跃迁是电偶极禁戒的。假设能级  $|i\rangle$  和  $|e\rangle$  之间的跃迁只与第一个场模耦合,能级  $|e\rangle$  和  $|g\rangle$  之间的跃迁只与第二个场模耦合。在相互作用绘景中,在旋转波近似下,系统的哈密顿量为(令  $\hbar = 1$ )

$$H_I = g_1(a^+ |i\rangle \langle e| + a^+ |e\rangle \langle i|) + g_2(b |e\rangle \langle g| + b^+ |g\rangle \langle e|), \quad (1)$$

式中  $a^+$  ( $b^+$ ) 和  $a$  ( $b$ ) 表示两个光场的产生和消灭算符, $g_1$  和  $g_2$  (令  $g_1, g_2$  为实数) 是原子与相应场模的耦合常数。 $\Xi$  型和  $\Lambda$  型三能级原子在与双模光场共振相互作用时系统相互作用哈密顿量的区别是:前者,中间与低能级之间的跃迁是允许的,而高与低能级之间的跃迁是电偶极禁戒的;后者,高与低能级之间的跃迁是允许的,而两个低能级之间的跃迁是电偶极禁戒的。

考虑  $\{|i, n_1, n_2\rangle, |e, n_1 + 1, n_2\rangle, |g, n_1 + 1, n_2 + 1\rangle\}$  的子空间,则  $H_I$  的矩阵为

$$\mathbf{H}_I = \begin{pmatrix} 0 & g_1 \sqrt{n_1 + 1} & 0 \\ g_1 \sqrt{n_1 + 1} & 0 & g_2 \sqrt{n_2 + 1} \\ 0 & g_2 \sqrt{n_2 + 1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

由久期方程,得出  $\mathbf{H}_I$  的本征值为

$$E_0 = 0, \quad (3)$$

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{g_1^2 (n_1 + 1) + g_2^2 (n_2 + 1)}, \quad (4)$$

对应的本征态为

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 (n_1 + 1) + g_2^2 (n_2 + 1)}} (-g_2 \sqrt{n_2 + 1} |i, n_1, n_2\rangle + g_1 \sqrt{n_1 + 1} |g, n_1 + 1, n_2 + 1\rangle), \quad (5)$$

$$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{g_1^2 (n_1 + 1) + g_2^2 (n_2 + 1)}} [\pm g_1 \sqrt{n_1 + 1} |i, n_1, n_2\rangle + \sqrt{g_1^2 (n_1 + 1) + g_2^2 (n_2 + 1)} |e, n_1 + 1, n_2\rangle \pm g_2 \sqrt{n_2 + 1} |g, n_1 + 1, n_2 + 1\rangle], \quad (6)$$

令  $|\psi(0)\rangle = |i, n_1, n_2\rangle =$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{g_1^2 (n_1 + 1) + g_2^2 (n_2 + 1)}} [-g_2 \sqrt{2(n_2 + 1)} |\psi_0\rangle + g_1 \sqrt{n_1 + 1} (|\psi_+\rangle - |\psi_-\rangle)], \quad (7)$$

初态随时间的演化为

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \exp(-iH_I t) |\psi(0)\rangle = \\ & \frac{1}{g_1^2 (n_1 + 1) + g_2^2 (n_2 + 1)} \{g_2^2 (n_2 + 1) + g_1^2 (n_1 + 1) \cos[\sqrt{g_1^2 (n_1 + 1) + g_2^2 (n_2 + 1)} t]\} |i, n_1, n_2\rangle - \\ & i \frac{g_1 \sqrt{n_1 + 1}}{\sqrt{g_1^2 (n_1 + 1) + g_2^2 (n_2 + 1)}} \sin[\sqrt{g_1^2 (n_1 + 1) + g_2^2 (n_2 + 1)} t] |e, n_1 + 1, n_2\rangle - \\ & \frac{g_1 g_2 \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)}}{g_1^2 (n_1 + 1) + g_2^2 (n_2 + 1)} \{1 - \cos[\sqrt{g_1^2 (n_1 + 1) + g_2^2 (n_2 + 1)} t]\} |g, n_1 + 1, n_2 + 1\rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

假设原子初始处于高能级  $|i\rangle$ ,而光场初始处于叠加态,即

$$|\psi_f(0)\rangle = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} F_{n_1, n_2} |n_1, n_2\rangle, \quad (9)$$

式中  $|n_1, n_2\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$ ,  $|F_{n_1, n_2}|^2 = \rho_f(n_1, n_2)$  表示态  $|\psi_f(0)\rangle$  中第一场模有  $n_1$  个光子,第二场模有  $n_2$  个光子的概率。在相互作用绘景中,系统初始时刻( $t = 0$ ) 的态矢量为

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} F_{n_1, n_2} |i, n_1, n_2\rangle, \quad (10)$$

经过相互作用时间  $t$  后,系统的态矢量演化为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} F_{n_1, n_2} [(\cos^2 \theta_{n_1, n_2} + \sin^2 \theta_{n_1, n_2} \cos \Omega_{n_1, n_2} t) |i, n_1, n_2\rangle - i \sin \theta_{n_1, n_2} \sin \Omega_{n_1, n_2} t |e, n_1 + 1, n_2\rangle - \sin \theta_{n_1, n_2} \cos \theta_{n_1, n_2} (1 - \cos \Omega_{n_1, n_2} t) |g, n_1 + 1, n_2 + 1\rangle]. \quad (11)$$

式中  $\Omega_{n_1, n_2} = \sqrt{g_1^2(n_1 + 1) + g_2^2(n_2 + 1)}$ ,  $\sin \theta_{n_1, n_2} = \frac{g_1 \sqrt{n_1 + 1}}{\Omega_{n_1, n_2}}$ ,  $\cos \theta_{n_1, n_2} = \frac{g_2 \sqrt{n_2 + 1}}{\Omega_{n_1, n_2}}$ . 若光场初始处于双模 SU(1, 1) 相干态, 它可表示为<sup>[14]</sup>

$$|\xi, q\rangle = (1 - |\xi|^2)^{(1+q)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(n+q)!}{n!q!} \right]^{1/2} \xi^n |n+q, n\rangle, \quad (12)$$

式中  $q$  为两个模之间的光子数差, 复参量  $\xi = |\xi| \exp(-i\theta)$ ,  $|\xi|$  与双模压缩参量有关, 它反映初始场强的强弱,  $\theta$  为相位角, 参数  $\xi$  和  $q$  可以用实验来控制, 取  $\theta = 0$ . 比较(9)和(12)式, 可得

$$F_{n+q, n} = (1 - |\xi|^2)^{(1+q)/2} \left[ \frac{(n+q)!}{n!q!} \right]^{1/2} \xi^n, \quad (13)$$

当  $n_1 \neq n_2 + q$  时,  $F_{n_1, n_2} = 0$ .

若直接对原子进行态选择性测量, 假设探测到原子处于低能级  $|g\rangle$ , 光场将坍缩为

$$|\psi_f(t)\rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+q, n} \sin \theta_{n+q, n} \cos \theta_{n+q, n} (1 - \cos \Omega_{n+q, n} t) |n+q+1, n+1\rangle, \quad (14)$$

式中  $N = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+q, n}^2 \sin^2 \theta_{n+q, n} \cos^2 \theta_{n+q, n} (1 - \cos \Omega_{n+q, n} t)^2 \right]^{1/2}$ , 为归一化因子.

假设把原子注入到一个经典微波场, 经过和微波场相互作用后离开, 那么原子经历的变换为

$$|g\rangle \rightarrow \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) |g\rangle + i \exp(-i\phi) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) |i\rangle, \quad (15)$$

$$|i\rangle \rightarrow \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) |i\rangle + i \exp(i\phi) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) |g\rangle, \quad (16)$$

式中参数  $\varphi$  和  $\phi$  可通过调节经典场的幅度和相位加以控制, 在此, 取  $\varphi = \pi/2$ ,  $\phi = \pi/2$ . 那么系统的态演化为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+q, n} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos^2 \theta_{n+q, n} + \sin^2 \theta_{n+q, n} \cos \Omega_{n+q, n} t) (|i, n+q, n\rangle - |g, n+q, n\rangle) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta_{n+q, n} \cos \theta_{n+q, n} (1 - \cos \Omega_{n+q, n} t) (|g, n+q+1, n+1\rangle + |i, n+q+1, n+1\rangle) - i \sin \theta_{n+q, n} \sin \Omega_{n+q, n} t |e, n+q+1, n\rangle \right]. \quad (17)$$

然后, 对原子也进行态选择性测量, 假设探测到原子处于低能级  $|g\rangle$ , 光场将坍缩为

$$|\psi_f(t)\rangle = \frac{1}{N'} \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+q, n} [(\cos^2 \theta_{n+q, n} + \sin^2 \theta_{n+q, n} \cos \Omega_{n+q, n} t) |n+q, n\rangle + \sin \theta_{n+q, n} \cos \theta_{n+q, n} (1 - \cos \Omega_{n+q, n} t) |n+q+1, n+1\rangle], \quad (18)$$

式中  $N'$  为归一化因子, 可表示为

$$N' = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [F_{n+q, n}^2 (\cos^2 \theta_{n+q, n} + \sin^2 \theta_{n+q, n} \cos \Omega_{n+q, n} t)^2 + F_{n+q, n}^2 \sin^2 \theta_{n+q, n} \cos^2 \theta_{n+q, n} (1 - \cos \Omega_{n+q, n} t)^2 + 2F_{n+q, n} F_{n+q+1, n+1} \sin \theta_{n+q, n} \cos \theta_{n+q, n} (1 - \cos \Omega_{n+q, n} t) (\cos^2 \theta_{n+q+1, n+1} + \sin^2 \theta_{n+q+1, n+1} \cos \Omega_{n+q+1, n+1} t)] \right\}^{1/2}. \quad (19)$$

### 3 光场的非经典性质

#### 3.1 光场的双模和压缩

对于双模 SU(1, 1) 相干态场仅讨论双模和压缩, 定义两厄密算符<sup>[15]</sup>

$$W_a = \frac{1}{2} (a^+ b^+ + ab), \quad (20)$$

$$W_b = \frac{i}{2}(a^+ b^+ - ab), \quad (21)$$

如果双模光场的两正交变量的任一分量  $W_i$  的量子涨落满足

$$(\Delta W_i)^2 < \frac{1}{4}\langle a^+ a + b^+ b + 1 \rangle, \quad (i = a \text{ or } b), \quad (22)$$

或者

$$r_i = \frac{4[\langle (W_i)^2 \rangle - \langle W_i \rangle^2] - \langle a^+ a + b^+ b + 1 \rangle}{\langle a^+ a + b^+ b + 1 \rangle} < 0, \quad (i = a \text{ or } b), \quad (23)$$

则称双模光场的第  $i$  个模呈现差压缩。

图 1~3 给出了通过数值计算得到的  $r_a$  和  $r_b$  随相互作用时间  $T = gt$  的演化规律(仅考虑  $0 < T < 30$  的情况)。对于  $a$  模,只有当参数  $\xi$  和  $q$  的值较小(即光场较弱)时,才在一些离散的演化时间区域内存在很小的和压缩,因此,仅讨论  $b$  模的和压缩。首先讨论没有对原子进行态选择测量的情况,如图 1 所示,在  $t = 0$  时刻,双模 SU(1,1) 相干态场尚未与三能级原子相互作用,比较图 1(b) 和(a),参数  $\xi$  和  $q$  的值越大(即光场越强), $b$  模的和压缩越强。随着演化时间的增加, $r_b$  出现起伏,但  $r_b$  总是小于零,即  $b$  模总是呈现和压缩态,光场较强时  $r_b$  起伏变化趋于缓慢。比较图 1(c) 和(a),当两个耦合系数不相等时,在  $t = 0$  时刻, $b$  模的和压缩量不变,随着演化时间的增加, $r_b$  的起伏幅度略有减小,振荡频率增大, $b$  模的和压缩的平均程度有受影响但不明显。当直接对原子进行态选择测量时(如图 2 所示),与没有对原子进行态选择测量时的对应情况相比较, $b$  模的和压缩明显地增强了, $\xi$  和  $q$  的值较大时, $T < 3$  的时间区域起伏较大, $T > 3$  之后  $r_b$  起伏变化也趋于缓慢。当应用经典微波场并对原子进行态选择测量时(如图 3 所示),与没有对原子进行态选择测量和直接对原子进行态选择测量时的对应情况相比较, $b$  模和压缩的程度比前者略有增强,但小于后者。

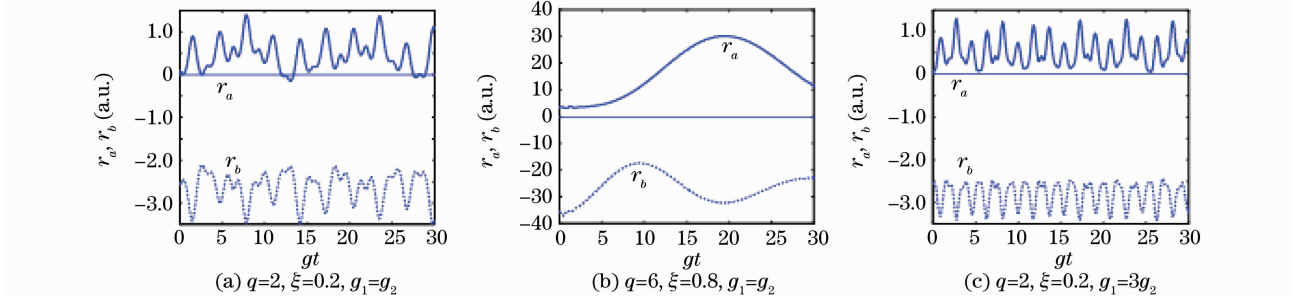


图 1 没有对原子进行态选择测量时  $r_a$  和  $r_b$  的时间演化曲线

Fig. 1 Time evolutions of  $r_a$  and  $r_b$  when no state-selective measurement is performed on the atom

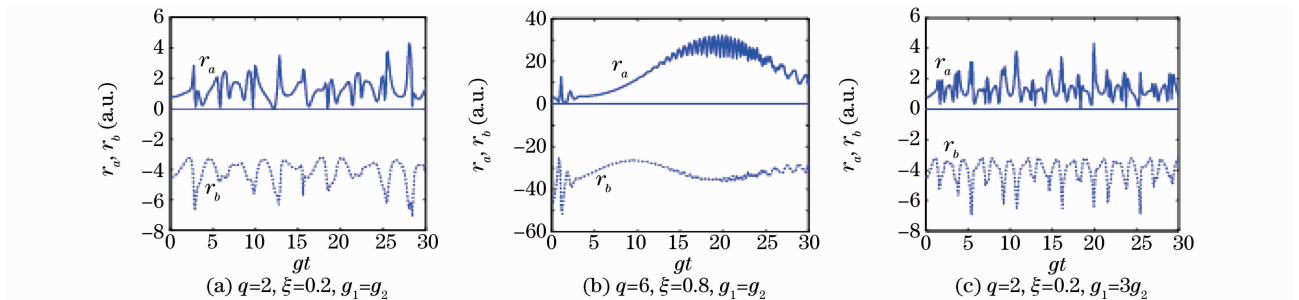


图 2 直接对处于  $|g\rangle$  态的原子进行态选择测量时  $r_a$  和  $r_b$  的时间演化曲线

Fig. 2 Time evolutions of  $r_a$  and  $r_b$  when direct state-measurement is performed on the atom, which is detected in the state  $|g\rangle$

### 3.2 亚泊松光子统计分布

光场的曼德尔(Mandel)  $Q$  参量反映了光子数分布对泊松分布的偏离,其定义为<sup>[16]</sup>

$$Q = \frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle}, \quad (24)$$

令

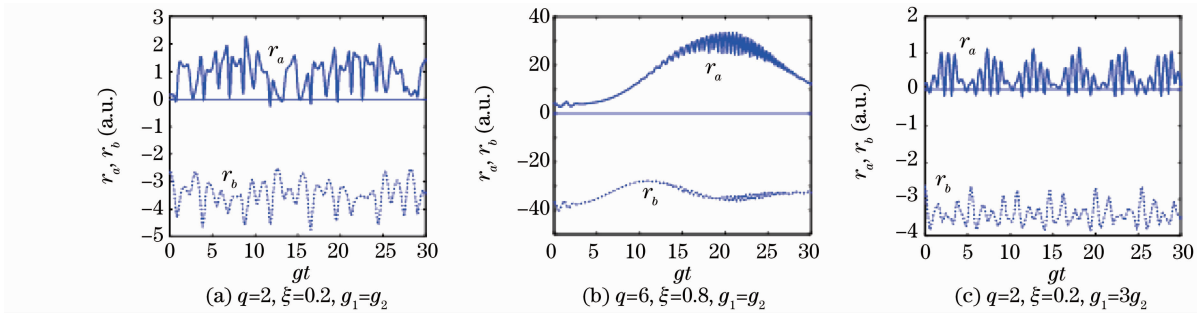


图3 应用参数  $\varphi = \pi/2, \phi = \pi/2$  的经典场并且探测原子处于  $|g\rangle$  态时  $r_a$  和  $r_b$  的时间演化曲线

Fig. 3 Time evolutions of  $r_a$  and  $r_b$  when the classical field with parameters  $\varphi = \pi/2$  and  $\phi = \pi/2$  is applied and the atom is detected in state  $|g\rangle$

$$Q_a = \frac{\langle (a^+ a)^2 \rangle - \langle a^+ a \rangle^2 - \langle a^+ a \rangle}{\langle a^+ a \rangle} = \frac{\langle (a^+ a)^2 \rangle - \langle a^+ a \rangle^2}{\langle a^+ a \rangle} - 1, \quad (25)$$

$$Q_b = \frac{\langle (b^+ b)^2 \rangle - \langle b^+ b \rangle^2 - \langle b^+ b \rangle}{\langle b^+ b \rangle} = \frac{\langle (b^+ b)^2 \rangle - \langle b^+ b \rangle^2}{\langle b^+ b \rangle} - 1, \quad (26)$$

当  $-1 \leq Q_i < 0 (i = a, b)$ , 第  $i$  个模的光子呈现亚泊松分布; 当  $Q_i > 0$ , 第  $i$  个模的光子呈现超泊松分布。

图4~6给出了通过数值计算得到的  $Q_a$  和  $Q_b$  随相互作用时间的演化规律。当没有对原子进行态选择测量, 参数  $\xi$  和  $q$  较小时[如图4(a)所示],  $Q_a < 0$ , 光场  $a$  模的光子数分布呈现亚泊松分布, 而  $b$  模为超泊松分布和亚泊松分布交替出现。 $\xi$  和  $q$  较大时[如图4(b)所示],  $Q_a > 0, Q_b > 0$ ,  $a$  和  $b$  模均呈现超泊松分布且  $Q_a$  和  $Q_b$  的振荡呈现崩溃和复原现象。 $g_1 \neq g_2$  时[如图4(c)所示],  $a$  模仍然呈现亚泊松分布, 随着时间的演化,  $Q_a$  起伏变化的幅度略有减小;  $b$  模仍然两种分布交替出现, 只是使  $b$  模呈现超泊松分布的几率增大。当直接对原子进行态选择测量时(如图5所示),  $\xi$  和  $q$  较小时,  $a$  和  $b$  模均呈现亚泊松分布, 但  $Q_b$  的起伏比  $Q_a$  大( $g_1 \neq g_2$  时, 情况也一样);  $\xi$  和  $q$  较大时,  $a$  和  $b$  模仅在  $T < 2$  的时间区域内出现亚泊松分布,  $T > 2$  之后, 均呈现超泊松分布。当应用经典微波场并对原子进行态选择测量时(如图6所示),  $Q_a$  和  $Q_b$  随相互作用时

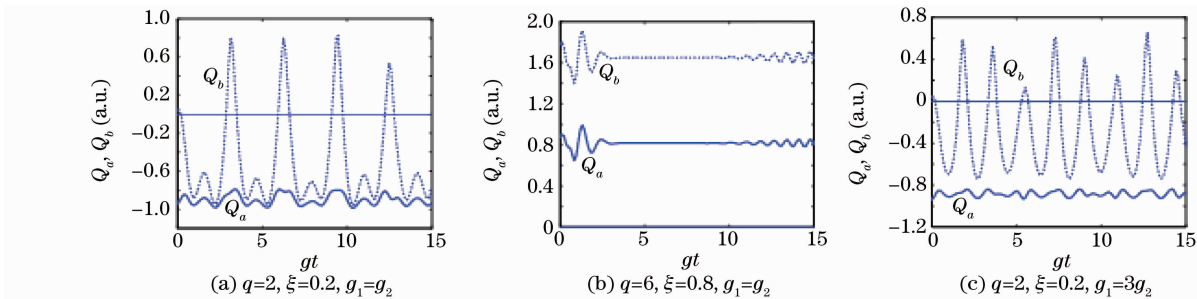


图4 没有对原子进行态选择测量时  $Q_a$  和  $Q_b$  的时间演化曲线

Fig. 4 Time evolutions of  $Q_a$  and  $Q_b$  when no state-selective measurement is performed on the atom

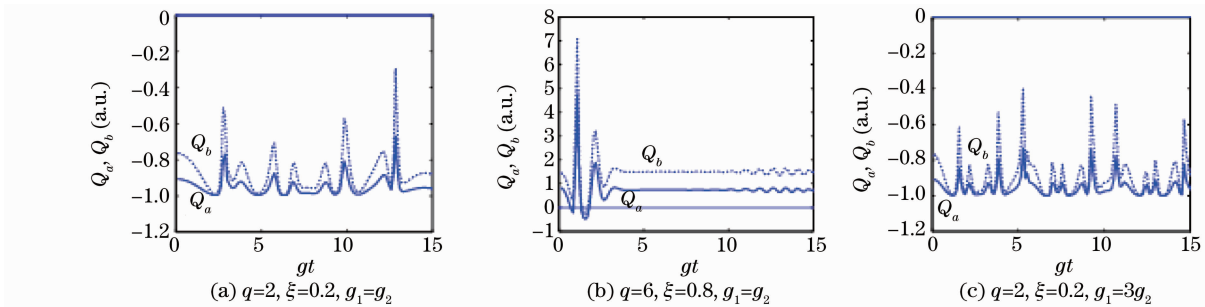


图5 直接对处于  $|g\rangle$  态的原子进行态选择测量时  $Q_a$  和  $Q_b$  的时间演化曲线

Fig. 5 Time evolutions of  $Q_a$  and  $Q_b$  when direct state-selective measurement is performed on the atom.

The atom is detected in the state  $|g\rangle$

间的演化与没有对原子进行态选择测量的对应情况相类似。

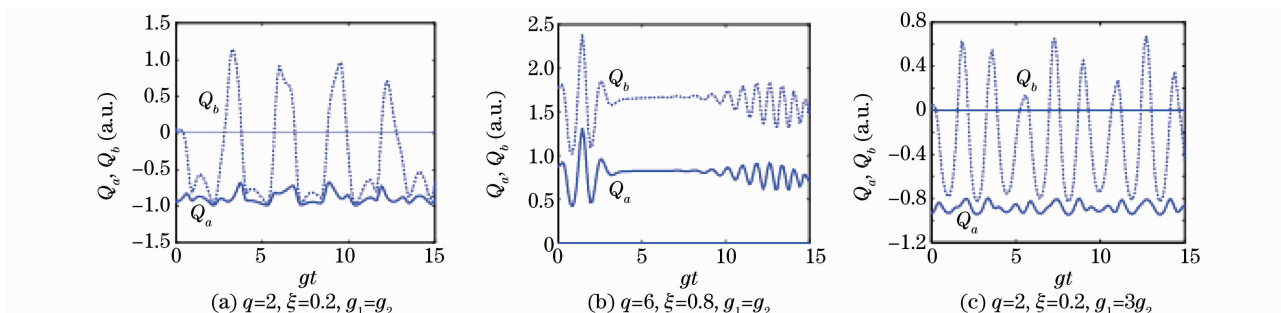


图 6 应用参数  $\varphi=\pi/2, \phi=\pi/2$  的经典场并且探测原子处于  $|g\rangle$  态时  $Q_a$  和  $Q_b$  的时间演化曲线  
Fig. 6 Time evolutions of  $Q_a$  and  $Q_b$  when the classical field with parameters  $\varphi=\pi/2$  and  $\phi=\pi/2$  is applied and the atom is detected in state  $|g\rangle$

### 3.3 模间相干性

双模场的模间二阶相干度定义为<sup>[17]</sup>

$$g_{ab}^{(2)}(t) = \frac{\langle a^+ b^+ ab \rangle}{\langle a^+ a \rangle \langle b^+ b \rangle}, \quad (27)$$

令

$$G_{ab}(t) = g_{ab}^{(2)}(t) - 1. \quad (28)$$

若  $G_{ab}(t) > 0$ , 则光场两模间呈正相关; 若  $G_{ab}(t) < 0$ , 则光场两模间呈反相关。

图 7~9 给出了通过数值计算得到的  $G_{ab}$  随相互作用时间的演化规律。当没有对原子进行态选择测量时(如图 7 所示), 在  $t=0$  时刻, 双模 SU(1,1) 相干态场尚未与三能级原子相互作用, 参数  $\xi$  和  $q$  的值越小, 两个场模间的关联越强, 随着时间的演化, 关联程度出现起伏, 但  $G_{ab}$  总是大于零, 即正关联总是存在。对于较弱的场, 如图 7(a) 和 (c) 关联程度随时间起伏较大, 这说明对于两模间的关联程度而言, 原子与场的相互作用对弱场的影响要大得多。对于较强的场[如图 7(b) 所示],  $G_{ab}$  的振荡呈现崩溃和复原现象。两个耦合系数不同时[如图 7(c) 所示], 初始时刻关联不受影响, 但随着时间的演化, 关联起伏的程度略有减小且振荡频率增大。当直接对原子进行态选择测量时(如图 8 所示), 与没有对原子进行态选择测量的对应情况相比较, 正关联的平均程度均明显地减弱。当应用经典微波场并对原子进行态选择测量时(如图 9 所示), 与没有对原子进行态选择测量的对应情况相比较, 起伏变化的规律不变, 起伏幅度略有增大, 正关联程度有受影响但不明显; 与直接对原子进行态选择的对应情况相比较, 正关联的平均程度均明显地增强了。

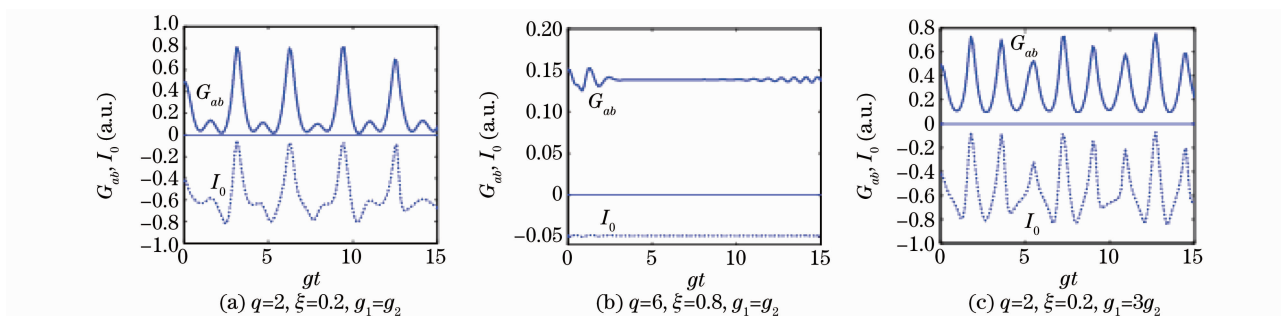


图 7 没有对原子进行态选择测量时  $I_0$  和  $G_{ab}$  的时间演化曲线

Fig. 7 Time evolutions of  $I_0$  and  $G_{ab}$  when no state-selective measurement is performed on the atom

### 3.4 柯西-施瓦茨不等式

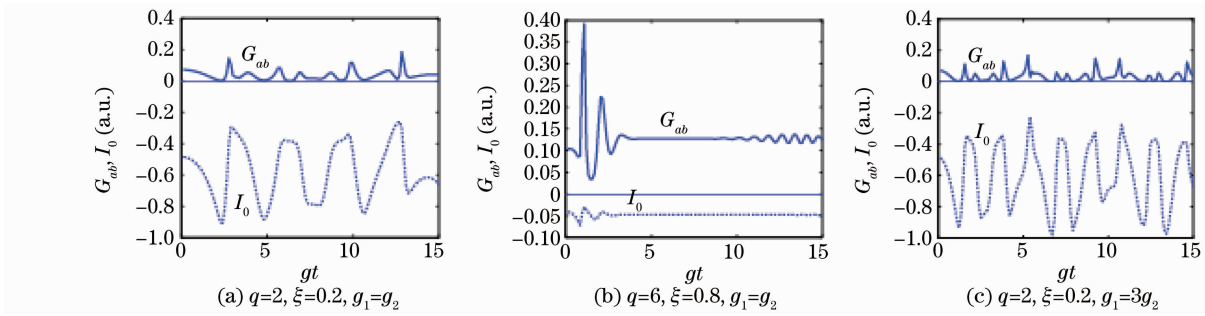
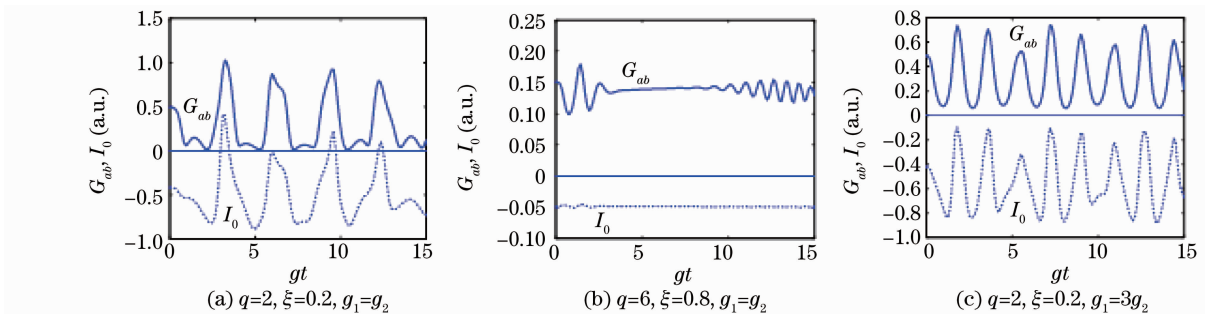
双模场的柯西-施瓦茨不等式定义为<sup>[18]</sup>

$$\langle a^{+2} a^2 \rangle \langle b^{+2} b^2 \rangle \geq \langle a^+ ab^+ b \rangle^2. \quad (29)$$

引入  $I_0$  参量

$$I_0 = \frac{|\langle a^+ a^+ aa \rangle \langle b^+ b^+ bb \rangle|^{1/2}}{\langle a^+ ab^+ b \rangle} - 1 = \frac{|[\langle (a^+ a)^2 \rangle - \langle a^+ a \rangle^2][\langle (b^+ b)^2 \rangle - \langle b^+ b \rangle^2]|^{1/2}}{\langle a^+ ab^+ b \rangle} - 1. \quad (30)$$



图 8 直接对处于  $|g\rangle$  态的原子进行态选择测量时  $I_0$  和  $G_{ab}$  的时间演化曲线Fig. 8 Time evolutions of  $I_0$  and  $G_{ab}$  when direct state-selective measurement is performed on the atom which is detected in the state  $|g\rangle$ 图 9 应用参数  $\varphi=\pi/2, \phi=\pi/2$  的经典场并且探测原子处于  $|g\rangle$  态时  $I_0$  和  $G_{ab}$  的时间演化曲线Fig. 9 Time evolutions of  $I_0$  and  $G_{ab}$  when the classical field with parameters  $\varphi=\pi/2$  and  $\phi=\pi/2$  is applied and the atom is detected in state  $|g\rangle$ 

若  $I_0 > 0$ , 则表明柯西-施瓦茨不等式成立, 光场两模之间的相关为经典相关; 反之, 若  $I_0 < 0$ , 则表明柯西-施瓦茨不等式不成立, 为非经典相关。

图 7~9 给出了通过数值计算得到的  $I_0$  随相互作用时间的演化规律。当没有对原子进行态选择测量时(如图 7 所示),  $I_0$  的值总是小于零, 即柯西-施瓦茨不等式总是不成立, 这表明双模  $SU(1,1)$  相干态场是非经典场。初始时刻参数  $\xi$  和  $q$  越小,  $I_0$  的值越小, 表明在弱场时非经典关联更强。当初始光场较弱时, 原子与光场的相互作用使  $I_0$  产生较大的起伏。当初始光场较强时,  $I_0$  起伏减小且趋于稳定, 表明两模间的非经典相关性质随光场的增强而趋于稳定。将图 7(c) 与 (a) 比较, 当两个耦合系数不相等时,  $I_0$  的初始值不变, 随着时间的演化,  $I_0$  起伏变化的频率增大, 但对非经典关联的平均程度影响不大。当直接对原子进行态选择测量时(如图 8 所示),  $I_0$  的值仍然总是小于零, 柯西-施瓦茨不等式总不成立, 与没有对原子进行态选择测量的对应情况比较, 初始光场较弱时, 非经典关联略有增强; 初始光场较强时,  $I_0$  的起伏相对增大。当应用经典微波场并对原子进行态选择测量时(如图 9 所示), 初始光场较弱[如图 9(a)所示],  $I_0$  随时间演化起伏较大, 两模间经典相关和非经典相关交替出现, 但经典相关出现的次数较少, 且维持时间较短; 初始光场较强或两个耦合系数不相等时,  $I_0$  随时间的演化与没有对原子进行态选择的对应情况相类似。

## 4 结 论

考虑一个双模  $SU(1,1)$  相干态场与一个  $\Xi$  型三能级原子共振相互的情况, 采用数值计算方法研究了在没有对原子进行态选择测量、直接对原子进行态选择测量和应用经典微波场并对原子进行态选择测量的三种情况下, 初始光场强度、耦合系数对光场压缩特性, 光子的亚泊松分布、模间相干性和柯西-施瓦茨不等式违背程度的影响。数值计算结果表明: 光场的非经典特性依赖于光场初始强度和原子态的选择性测量;  $b$  模总是呈现和压缩, 初始光场强度增强或直接对原子进行态选择测量,  $b$  模的和压缩明显地增强; 当初始光场强度较弱时,  $a$  模总是呈现亚泊松分布, 直接对原子进行态选择测量后,  $b$  模的光子也呈现亚泊松分布; 光场两模间总是呈现正关联, 而且是非经典关联, 初始光场强度越弱, 正关联越强, 但直接对原子进行态选择测量

后,正关联程度反而减弱;没有对原子进行态选择测量和直接对原子进行态选择测量的情况下,柯西-施瓦茨不等式总不成立。

### 参 考 文 献

- 1 C. C. Gerry. Correlated wo-mode SU(1,1) coherent states; nonclassical properties[J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1991, **8**(3): 685~690
- 2 C. C. Gerry, R. F. Welch. Dynamics of a two-mode two-photon Jaynes-Cummings model interacting with correlated SU(1,1) coherent states[J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1992, **9**(2): 290~297
- 3 Lai Yunzhong, Liang Jiuqing. Interaction of two-mode SU(1,1) coherent states with V-type three-level atom in a Kerr-like-medium[J]. *Acta Physica Sinica*, 1997, **46**(9): 1710~1717  
赖云忠, 梁久卿. Kerr 介质中双模 SU(1,1) 相干态场与 V 型三能级原子的相互作用[J]. 物理学报, 1997, **46**(9): 1710~1717
- 4 Xie Fangsen, Liu Xiaoqing, Chen Mingyu. Properties of the SU(1,1) coherent states interacting non-resonantly with  $\Lambda$ -type three-level atom[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2002, **31**(12): 1439~1443  
谢芳森, 刘小青, 陈明玉. 与  $\Lambda$  型三能级原子非共振相互作用的 SU(1,1) 场的性质[J]. 光子学报, 2002, **31**(12): 1439~1443
- 5 Hu Yaohua, Fang Maofa, Jiang Chunlei. Quantum properties of the binomial states field interacting with a cascade three-level atom[J]. *Chinese J. Quantum Electronics*, 2006, **23**(6): 843~847  
胡要花, 方卯发, 姜春蕾. 与级联型三能级原子相互作用的二项式光场的量子特性[J]. 量子电子学报, 2006, **23**(6): 843~847
- 6 Zheng Naiqing. Nonclassical properties of a two-mode SU(2) coherent field resonantly with a three-level  $\Lambda$ -type atom[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, **59**(4): 2485~2492  
郑乃清. 双模 SU(2) 相干态场与一个  $\Lambda$  型三能级原子共振相互作用的光场非经典性质[J]. 物理学报, 2010, **59**(4): 2485~2492
- 7 A. C. Ji, X. C. Xie, W. M. Liu. Quantum magnetic dynamics of polarized light in arrays of microcavities[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, **99**(18): 183602
- 8 A. C. Ji, W. M. Liu, J. L. Song *et al.*. Dynamical creation of fractionalized vortices and vortex lattices[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, **101**(1): 010402
- 9 C. Christopher. Gerry, Himel Ghosh. Squeezing enhancement in the Jaynes-Cummings model via selective atomic measurements[J]. *Phys. Lett. A*, 1997, **229**(1): 17~22
- 10 Wu Huaizhi, Su Wanjun. Nonclassical properties in the resonant interaction of a three level  $\Lambda$ -type atom with two-mode field in coherent states[J]. *Chin. Phys.*, 2007, **16**(1): 106~110
- 11 Zheng Naiqing. The squeezing properties of a two-mode cavity field resonantly interacting with a three-level V-Type atom [J]. *Acta Optica Sinia*, 2010, **30**(1): 257~261  
郑乃清. 双模腔场与一个 V 型三能级原子共振相互作用的压缩特性[J]. 光学学报, 2010, **30**(1): 257~261
- 12 Lu Daoming. Effect of selective atomic measurement on quantum properties of light field[J]. *Acta Optica Sinia*, 2010, **30**(6): 1804~1808  
卢道明. 选择原子测量对光场量子特性的影响[J]. 光学学报, 2010, **30**(6): 1804~1808
- 13 Zheng Xiaolan, Chen Zihong. Nonclassical properties of fields in pair coherent states interacting with two-level atoms[J]. *Acta Optica Sinia*, 2010, **30**(10): 3054~3058  
郑小兰, 陈子翊. 对相干态与原子作用后非经典性质的演化[J]. 光学学报, 2010, **30**(10): 3054~3058
- 14 Lu Hong, Peng Jinxiang, Li Gaoxiang. Dynamics of two-mode SU(1,1) coherent states interacting with the V-type three-level atom[J]. *Acta Physica Sinica*, 1995, **44**(5): 708~714  
路洪, 彭金香, 李高翔. 双模 SU(1,1) 相干态场与 V 型三能级原子相互作用的动力学[J]. 物理学报, 1995, **44**(5): 708~714
- 15 M. Hillery. Sum and difference squeezing of the electromagnetic field[J]. *Phys. Rev. A*, 1989, **40**(6): 3147~3155
- 16 B. W. Shore, P. L. Knight. The Jaynes-Cummings mode[J]. *J. Mod. Opt.*, 1993, **40**(7): 1195~1238
- 17 W. K. Lai, V. Buke, P. L. Knight. Dynamics of a three-level atom in a two-mode squeezed vacuum[J]. *Phys. Rev. A*, 1991, **44**(10): 6043~6056
- 18 M. D. Reid, D. F. Walls. Violations of classical inequalities in quantum optics[J]. *Phys. Rev. A*, 1986, **34**(2): 1260~1276