

非傍轴高斯激光束电磁场研究

李亚东¹ 栗建兴^{1*} 臧维平^{1,2} 田建国^{1,2}

¹ 南开大学物理科学学院, 天津 300071
² 南开大学泰达应用物理学院弱光非线性光子学教育部重点实验室, 天津 300457

摘要 采用 Weniger 变换法消除了 Lax 级数场的发散性, 获得收敛的 Weniger 变换场(WTF)。通过与严格满足麦克斯韦方程组的数值电磁场相比较, 比较了不同聚焦尺寸下 Weniger 变换场和复源点球面波场(CSPSWF)的准确性。计算结果表明, 当光束聚焦半径大于 2.23 倍波长时, 两者是一致的, 而当光束聚焦到更小尺寸时, Weniger 变换场更为准确。

关键词 衍射光学; 非傍轴高斯光束电磁场; Weniger 变换; 麦克斯韦方程组

中图分类号 O431.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/LOP48.032601

Study on Nonparaxial Gaussian Laser Beam

Li Yadong¹ Li Jianxing¹ Zang Weiping^{1,2} Tian Jianguo^{1,2}

¹ School of Physics, Nankai University, Tianjin 300071, China
² Key Laboratory of Weak Light Nonlinear Photonics, Ministry of Education, Teda Applied Physics School, Nankai University, Tianjin 300457, China

Abstract The divergence of Lax series field is eliminated by using Weniger transformation. The Weniger transformation field (WTF) is compared with the complex-source-point spherical wave field (CSPSWF) obtained by numerical simulation, which strictly satisfies the Maxwell equations. The results show that WTF accords with CSPSWF as the beam waist radius $w_0 > 2.23 \lambda$ (beam wavelength), while WTF is more accurate than CSWF as $w_0 < 2.23 \lambda$.

Key words diffraction optics; nonparaxial Gaussian laser beam; Weniger transformation; Maxwell equations

OCIS codes 260.1960; 260.2110; 350.5500

1 引言

由于在光通信、光存储和光俘获粒子等领域的重要应用, 高斯光束一直是光学领域研究的热点之一。近年来, 在实验中为了获得高峰值光强光束, 人们往往采用将光束聚焦到很小尺寸(微米量级)的方法。此时, 在理论模拟中, 传统的高斯光束傍轴解不再准确。因此, 求解高斯光束非傍轴解引起了科研人员越来越多的关注^[1~8]。1975年, Lax等^[9]提出了一种以光束衍射角为参量的级数展开方法。利用这种方法, 一些科研人员^[10~12]陆续求解了傍轴高斯光束电磁场的高阶修正项。然而, 在光束聚焦到波长量级时, Lax级数方法求解的电磁场表现出了发散的特性, 只适用于光束焦点区域研究^[13,14]。此外, Salamin^[15]利用复源点球面波法同样求解了非傍轴高斯光束电磁场, 并且证明了获得的电磁场除了存在奇异点外要比Lax级数场更为准确。

本文为了获得非傍轴高斯光束电磁场的准确解, 首先给出了Lax级数电磁场解析解, 并且利用Weniger变换方法^[16,17]消除了Lax级数场的发散性, 获得了收敛的Weniger变换场(WTF)。此外, 分别采用复源点球面波法^[18]和平面波谱法^[19,20]求解了非傍轴高斯光束电磁场, 其中平面波谱法求解的电磁场数值解严格满

收稿日期: 2010-06-08; **收到修改稿日期**: 2010-08-23

基金项目: 国家自然科学基金(60678025)资助项目和国家重点基础研究专用基金(2006CB921703)资助课题。

作者简介: 李亚东(1986—), 男, 硕士研究生, 主要从事光束传播理论方面的研究。

导师简介: 臧维平(1964—), 男, 博士, 教授, 主要从事非线性光学方面的研究。

* **通信联系人**。E-mail: lijianxing@mail.nankai.edu.cn

足麦克斯韦方程组。通过与数值电磁场比较,比较了不同聚焦尺寸下 Weniger 变换场和复源点球面波场(CSPSWF)的准确性。

2 非傍轴高斯光束电磁场

2.1 Lax 级数电磁场和 Weniger 变换电磁场

采用的高斯激光束沿 x 方向偏振,沿 z 方向传播,其电磁场的矢势 \mathbf{A} 可以表示为

$$\mathbf{A} = \hat{x}A_0\psi(x, y, z)\exp(i\eta), \quad (1)$$

式中 A_0 为振幅, $\eta = \omega t - kz$ 。矢势满足波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式,得到

$$\nabla^2 \psi - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

为了计算方便,定义新的参数: $x = \xi\omega_0$, $y = \nu\omega_0$, $z = \zeta z_r$, 其中 ω_0 为光束束腰半径,瑞利长度 $z_r = k\omega_0^2/2$ 。因此,(3)式可以转化为

$$\nabla_{\perp}^2 \psi - 4i \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (4)$$

式中 $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \nu^2$, 衍射角 $\epsilon = \omega_0/z_r$ 。由于 ϵ^2 很小, ψ 可以按 ϵ 的偶次幂展开^[9]

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^{2n} \psi_{2n}. \quad (5)$$

将(5)式代入(4)式可得

$$\nabla_{\perp}^2 \psi_0 - 4i \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} = 0, \quad (6)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \psi_{2n+2} - 4i \frac{\partial \psi_{2n+2}}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 \psi_{2n}}{\partial \zeta^2} = 0, \quad n \geq 0 \quad (7)$$

(6)式为傍轴方程,其解为

$$\psi_0 = f \exp(-f\rho^2), \quad (8)$$

式中 $f = i/(\zeta + i)$, $\rho^2 = \xi^2 + \nu^2$ 。为了求解高阶修正项 ψ_{2n} , 采用 Davis^[10] 的方法。考虑一个从原点出发沿 z 方向传播的球面波。该球面波包含一个指数项

$$\exp[-ik(z^2 + r^2)^{1/2}] = \exp[-ikz - i(z_r/z)\rho^2] \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^{2n} a_{2n}(\rho, z_r/z), \quad (9)$$

当 $z \gg z_r$, 条件 $f \rightarrow iz_r/z$ 成立,可以得到

$$\psi_{2n} = [C_{2n}(f) + a_{2n}(\rho, f)]\psi_0, \quad (10)$$

将(10)式代入(7)式,经过计算可以得到系数 C_{2n} 。也可以采用一种简单的递推方法^[2]

$$\psi_{2n} = D_{2n}\psi_0, \quad (11)$$

式中 $D_{2n} = a_{2n}(\rho, f) + (n+1)fD_{2n-2}/4$, $D_0 = 1$, 其中 $a_{2n}(\rho, f)$ 可以通过(9)式求得。因此,可以求解任意高阶修正项,如

$$\psi_2 = \left(\frac{f}{2} - \frac{f^3 \rho^4}{4} \right) \psi_0, \quad (12)$$

$$\psi_4 = \left(\frac{3f^2}{8} - \frac{3f^4 \rho^4}{16} - \frac{f^5 \rho^6}{8} + \frac{f^6 \rho^8}{32} \right) \psi_0, \quad (13)$$

$$\psi_6 = \left(\frac{3f^3}{8} - \frac{3f^5 \rho^4}{16} - \frac{f^6 \rho^6}{8} - \frac{3f^7 \rho^8}{64} + \frac{f^8 \rho^{10}}{32} - \frac{f^9 \rho^{12}}{384} \right) \psi_0 \dots \quad (14)$$

得到矢势后,利用洛伦兹条件,可以得到标量势 $\phi = i\nabla \mathbf{A}/k$ 。将 \mathbf{A} 和 ϕ 代入麦克斯韦方程组 $\mathbf{E} = -ik\mathbf{A} - \nabla\phi$ 和 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 可以获得非傍轴高斯光束电磁场解析解^[13,14]

$$E_x = -iE\psi_0 \sum_{n=0}^m \epsilon^{2n} E_n^x(f, \rho, \xi), \quad (15)$$

$$E_y = -iE\psi_0 \xi \sum_{n=0}^m \epsilon^{2n} E_n^y(f, \rho), \quad (16)$$

$$E_z = E\psi_0 \xi \sum_{n=0}^m \epsilon^{2n+1} E_n^z(f, \rho), \quad (17)$$

$$B_x = 0, \quad (18)$$

$$B_y = -iE\psi_0 \sum_{n=0}^m \epsilon^{2n} B_n^y(f, \rho), \quad (19)$$

$$B_z = E\psi_0 \sum_{n=0}^m \epsilon^{2n+1} B_n^z(f, \rho), \quad (20)$$

式中 $m \geq 0$, $E = E_0 \exp[i(\omega t - kz + \phi_0)]$, $E_0 = kA_0$, ϕ_0 为常相位。

之前的工作^[13,14]已经得到:随着衍射角 ϵ 的增大, Lax 级数场的收敛性会变得越来越差,也就是说当 ϵ 比较大时 Lax 级数场具有很强的发散性。为了克服 Lax 级数场的发散性,使用 Weniger 变换方法对 Lax 级数解进行处理。以电场 x 方向分量为例,

$$E_x = -iE\psi_0 \frac{\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (1+j)^{n-1} \frac{S_j}{\epsilon^{2(j+1)} E_{j+1}^x}}{\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (1+j)^{n-1} \frac{1}{\epsilon^{2(j+1)} E_{j+1}^x}}, \quad (21)$$

式中 $s_j = \sum_{l=0}^j \epsilon^{2l} E_l^x(f, \rho, \xi)$ 。其他分量可以通过相同的办法得到。

2.2 复源点球面波电磁场

球面波和 Lax 级数场之间存在密切的关系,利用复源点球面波方法^[18]同样可以处理非傍轴场的求解问题^[19]。取矢势为

$$\mathbf{A} = \hat{x}A_0 \frac{\exp(-ikR_c)}{R_c}, \quad (22)$$

式中 $R_c = \sqrt{r^2 + (z + iz_r)^2}$ 。利用(22)式,同样可以得到非傍轴高斯光束电磁场解析解

$$E_x = -iE \frac{\exp(-ikR_c)}{R_c} + \frac{iE}{k^2} \exp(-ikR_c) \left(\frac{ik}{R_c^2} + \frac{1+k^2x^2}{R_c^3} - \frac{3ikx^2}{R_c^4} - \frac{3x^2}{R_c^5} \right), \quad (23)$$

$$E_y = \frac{iE}{k^2} xy \exp(-ikR_c) \left(\frac{k^2}{R_c^3} - \frac{3ik}{R_c^4} - \frac{3}{R_c^5} \right), \quad (24)$$

$$E_z = \frac{iE}{k^2} x(z + iz_r) \exp(-ikR_c) \left(\frac{k^2}{R_c^3} - \frac{3ik}{R_c^4} - \frac{3}{R_c^5} \right), \quad (25)$$

$$B_y = -E(z + iz_r) \exp(-ikR_c) \left(\frac{ik}{R_c^2} + \frac{1}{R_c^3} \right), \quad (26)$$

$$B_z = -E_y \exp(-ikR_c) \left(\frac{ik}{R_c^2} + \frac{1}{R_c^3} \right), \quad (27)$$

式中 $E = iE_0 z_r \exp(-kz_r)$ 。在采用复源点球面波方法求解电磁场过程中,可以看到存在一个的缺点,就是在 $r = \pm i(z + iz_r)$ 的位置 $R_c = 0$, 此时场的所有分量都将是发散的。

3 结果与讨论

为验证 Weniger 变换场和复源点球面波场的准确性和适用范围,通过平面波谱法^[19,20]引入了非傍轴高斯光束电磁场的数值解

$$\mathbf{E} = \frac{iE_0}{2\pi k^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} g(k_x, k_y) F(k_x, k_y) \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)] dk_x dk_y, \quad (28)$$

$$B = \frac{iE_0}{2\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m(k_x, k_y) F(k_x, k_y) \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)] dk_x dk_y, \quad (29)$$

式中 $F(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y, 0) \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy$, $g(k_x, k_y) = \hat{x}(k^2 - k_x^2) - \hat{y}k_x k_y - \hat{z}k_x k_z$, $m(k_x, k_y) = \hat{y}k_z - \hat{z}k_y$ 。

只要给出在 $z=0$ 平面边界值 $\psi(x, y, 0)$, 可由(28)和(29)式得到麦克斯韦方程的精确解。通常把高斯型函数 $\exp(-\rho^2)$ 选作边界值, 然而, 根据 Lax 级数理论, 对于非傍轴高斯光束, 必须引入高阶修正项。因此, 根据(5)式, 定义边界场为

$$\psi(x, y, 0) = \sum_{n=0}^m \epsilon^{2n} \psi_{2n}(x, y, 0), \quad m \geq 0 \quad (30)$$

当光束束腰半径为波长量级时, $m=4$ 足够获得精确的边界场^[13,14]。

图 1 给出了在不同聚焦尺寸下, Weniger 变换场和复源点球面波场分量。可以明显地看到, 当束腰半径 $w_0 = 3\lambda$ 时, Weniger 变换场和复源点球面波场都与数值场(NF)吻合。当束腰半径减小到 $w_0 = 0.8\lambda$ 时, Weniger 变换依然准确, 而复源点球面波场与数值场出现明显偏差。对于超聚焦情况, $w_0 = 0.4\lambda$, Weniger 变换场也不再准确。

图 2 给出了 Weniger 变换场和复源点球面波场与数值场的相对误差随束腰半径的变化。图中实线代表 Weniger 变换场的相对误差曲线, 短划线代表复源点球面波场的相对误差曲线。可以明显看出, 对于电场 x 方向分量, 当束腰半径 $w_0 > 0.4\lambda$ 时, Weniger 变换场与数值场的相对误差小于 1%; 当束腰半径 $w_0 > 1.57\lambda$ 时, 复源点球面波场与数值场的相对误差小于 1%。对于电场 z 方向分量, 当束腰半径 $w_0 > 0.6\lambda$ 时, Weniger 变换场与数值场的相对误差小于 1%; 当束腰半径 $w_0 > 2.23\lambda$ 时, 复源点球面波场与数值场的相对误差小于 1%。因此, Weniger 变换场的适用范围比复源点球面波场更大。

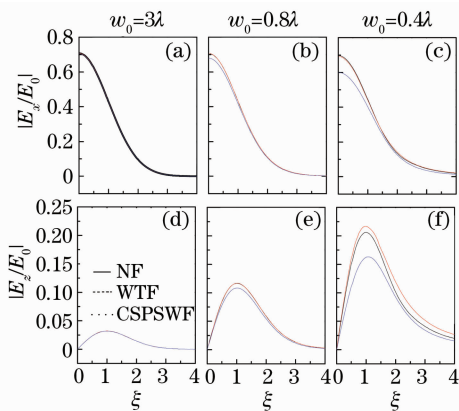


图 1 对于不同束腰半径, 在 $y = 0, z = z_r$ 处, 电场分量随 ξ 的变化曲线

Fig. 1 Variations of the electric field components with ξ at the site of $(y, z) = (0, z_r)$ for different w_0

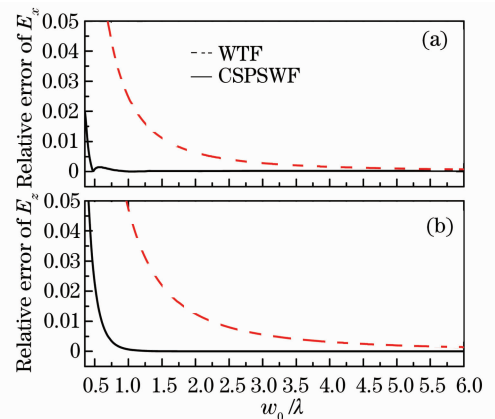


图 2 $(w_0, 0, z_r)$ 处电场分量相对误差随束腰半径的变化

Fig. 2 Variations of the relative errors of the electric field components with w_0 at $(w_0, 0, z_r)$

4 结 论

利用 Weniger 变换方法消除 Lax 级数场的发散性, 并获得了收敛的 Weniger 变换场; 利用平面波谱法求解的电磁场数值解研究了 Weniger 变换场和复源点球面波场的适用范围。结果显示, 当 $w_0 > 2.23\lambda$ 时, Weniger 变换场和复源点球面波场都是准确的; 而当光束聚焦到更小尺寸时, 即当 $2.23\lambda > w_0 > 0.6\lambda$, Weniger 变换场更为准确。

参 考 文 献

- 1 Y. I. Salamin, Fields of a radially polarized Gaussian laser beam beyond the paraxial approximation[J]. *Opt. Lett.*, 2006, **31**(17): 2619~2621

- 2 H. Luo, S. Y. Liu, Z. F. Lin *et al.*. Method for accurate description of a radially polarized Gaussian laser beam beyond the paraxial approximation[J]. *Opt. Lett.*, 2007, **32**(12): 1692~1694
- 3 R. Borghi, A. Ciattoni, M. Santarsiero. Exact axial electromagnetic field for vectorial Gaussian and flattened Gaussian boundary distributions[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2002, **19**(6): 1207~1211
- 4 S. Nemoto. Nonparaxial Gaussian beams [J]. *Appl. Opt.*, 1990, **29**(13): 1940~1946
- 5 A. Ciattoni, B. Crosignani, P. D. Porto. Vectorial analytical description of propagation of a highly nonparaxial beam [J]. *Opt. Commun.*, 2002, **202**(1-3): 17~20
- 6 B. Lü, K. Duan. Nonparaxial propagation of vectorial Gaussian beams diffracted at a circular aperture [J]. *Opt. Lett.*, 2003, **28**(24): 2440~2442
- 7 K. Duan, B. Lü. Polarization properties of vectorial nonparaxial Gaussian beams in the far field [J]. *Opt. Lett.*, 2005, **30**(3): 308~310
- 8 G. Zhou. The analytical vectorial structure of a nonparaxial Gaussian beam close to the source [J]. *Opt. Express*, 2008, **16**(6): 3504~3514
- 9 M. Lax, W. H. Louisell, W. B. McKnight. From Maxwell to paraxial wave optics[J]. *Phys. Rev. A*, 1975, **11**(4): 1365~1370
- 10 L. W. Davis. Theory of electromagnetic beams[J]. *Phys. Rev. A*, 1979, **19**(3): 1177~1179
- 11 J. P. Barton, D. R. Alexander. Fifth-order corrected electromagnetic field components for a fundamental Gaussian beam [J]. *J. Appl. Phys.*, 1989, **66**(7): 2800~2802
- 12 Y. I. Salamin. Fields of a Gaussian beam beyond the paraxial approximation[J]. *Appl. Phys. B*, 2007, **86**(2): 319~326
- 13 J. X. Li, W. P. Zang, J. G. Tian. Simulation of Gaussian laser beams and electron dynamics by Weniger transformation method[J]. *Opt. Express*, 2009, **17**(7): 4959~4969
- 14 J. X. Li, W. P. Zang, Y. D. Li *et al.*. Acceleration of electrons by a tightly focused intense laser beam[J]. *Opt. Express*, 2009, **17**(14): 11850~11859
- 15 Y. I. Salamin. Fields of a focused linearly polarized Gaussian beam; truncated series versus the complex-source-point spherical-wave representation[J]. *Opt. Lett.*, 2009, **34**(5): 683~685
- 16 E. J. Weniger. Nonlinear sequence transformations for the acceleration of convergence and the summation of divergent series[J]. *Comput. Phys. Rep.*, 1989, **10**: 189~371
- 17 R. Borghi, M. Santarsiero. Summing Lax series for nonparaxial beam propagation[J]. *Opt. Lett.*, 2003, **28**(10): 774~776
- 18 M. Couture, Pierre-A. Belanger. From Gaussian beam to complex-source-point spherical wave[J]. *Phys. Rev. A*, 1981, **24**(1): 355~359
- 19 A. Doicu, T. Wriedt. Plane wave spectrum of electromagnetic beams[J]. *Optics. Commun.*, 1997, **136**(1-2): 114~124
- 20 P. Varga, P. Török. The Gaussian wave solution of Maxwell's equations and the validity of scalar wav approximation[J]. *Opt. Commun.*, 1998, **152**(1-3): 108~118