

# 辐射传输方程中的单次散射参数计算

王海华 孙贤明\* 刘万强 申晋 刘伟

(山东理工大学电气与电子工程学院, 山东 淄博 255049)

**摘要** 根据米氏(Mie)理论,计算了多分散球形气溶胶粒子的单次散射特性。粒子的尺寸分布为伽马分布,有效半径分别为 5.56, 7 和 11  $\mu\text{m}$ ,分析了 0.4~100  $\mu\text{m}$  光谱范围内气溶胶粒子的平均消光系数、平均散射系数、单次散射反照率、不对称因子以及相矩阵与粒子的尺寸参数以及折射率的关系。结果表明,在可见光波段,粒子的有效半径对粒子的散射特性影响较小,在更长的波段上其影响较大;单次散射反照率在可见光范围内近似为 1,随波长的变化和水滴折射率虚部随波长的变化曲线正好相反,这说明影响其大小的主要因素为粒子的折射率,即虚部越大则反照率越小;且极化率对粒子的尺寸比相函数更敏感。

**关键词** 散射; 相矩阵; 气溶胶; 米氏理论

中图分类号 TN011.3

OCIS 290.1090 290.4210

文献标识码 A

## Calculation of Single Scattering Parameters in Vector Radiative Transfer Equation

Wang Haihua Sun Xianming Liu Wanqiang Shen Jin Liu Wei

(School of Electrical and Electronic Engineering, Shandong University of Technology, Zibo, Shandong 255049, China)

**Abstract** Based on Mie theory, the single scattering characteristics of a cluster of polydisperse spherical aerosols are calculated. The size distribution of particles is Gamma distribution and effective radii are 5.56, 7, 11  $\mu\text{m}$ , respectively. The average extinction coefficients, average scattering coefficients, single scattering albedos, asymmetry parameters and elements of single scattering phase matrix in the spectral range of 0.4~100  $\mu\text{m}$  are analyzed. The numerical results show that the single scattering properties of aerosols are seldom affected by particle effective radius in visual light waveband, but greater at higher waveband. The single scattering albedo approximately equals 1 at visual light waveband and the characteristics of single scattering albedo are opposite to the imagery part of refraction index. The polarization ratios of single scattering phase matrix are more sensitive to particle size than phase functions.

**Key words** scattering; phase matrix; aerosol; Mie theory

## 1 引言

研究粒子散射的数值计算问题,具有重要的实际意义。自然界中的很多粒子都具有复杂的形状,如大气中的气溶胶、雨滴以及冰晶粒子等。研究这些粒子的光散射特性可以更好地解释大气遥感过程中的一些重要现象;另外在目标识别与成像、遥测遥感、地下目标探测、生物体皮下组织的无创伤诊断、环境监测方面都需要研究粒子的光散射特性,对于小粒子光散射特性的研究已经非常系统,从球形到非球形,从无耗到有耗,从各向同性到各向异性,从平面波入射到波束入射,以及波束的离轴、在轴入射等,并且研究成果已被广泛应用于各种光学测量中<sup>[1, 2]</sup>。

当光波在离散随机介质中传输时,如果介质的光学厚度较小,散射光强及其极化特性可直接由单次散射

收稿日期: 2010-08-21; 收到修改稿日期: 2010-10-29

基金项目: 山东省自然科学基金(ZR2009AQ013)资助课题。

作者简介: 王海华(1978—),女,硕士,讲师,主要从事粒子光散射和大气辐射传输等方面的研究。

E-mail: hhwang1978@163.com

\* 通信联系人。E-mail: xianming\_sun@yahoo.com.cn

参数获得;如果介质的光学厚度较大,则需要考虑多次散射,散射光的特性可以通过求解矢量辐射传输方程得到。要求解矢量辐射传输方程,首先需求得离散随机介质的单次散射相矩阵和单次散射反照率,因此计算离散随机介质的单次散射参数具有重要的意义。大气中的云层对大气中的辐射传输有重要的影响,作为大气成分常年覆盖着地球,它是地气系统的主要调制者,可以造成能见度减小,也可以减弱探测器、遥感装置的探测能力。研究水云的光学特性对低层大气的辐射传输和遥感、气候模式计算等方面具有重要的意义<sup>[3,4]</sup>。

对于大气中的云、雾以及气溶胶粒子其单次散射特性可以通过各种测试设备进行间接的测量反演得到,比如应用 MODIS 卫星图像数据反演云、雾的反照率等<sup>[5,6]</sup>。本文利用米氏(Mie)理论计算了具有一定尺寸分布的球形粒子的单次散射参数,包括平均散射系数、消光系数、单次散射反照率、不对称因子以及单次散射相矩阵中的元素,并分析了这些参数与粒子的尺寸参数以及折射率的关系。

## 2 理论分析

在研究中假设离散随机介质中的粒子为球形粒子。当平面波入射到单个球形粒子时,设垂直和平行于散射面的电场分量分别为  $E_r$  和  $E_t$ ,则散射远场可以表示为<sup>[7~9]</sup>

$$\begin{bmatrix} E'_r \\ E'_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1(\theta) & 0 \\ 0 & S_2(\theta) \end{bmatrix} \frac{\exp(-ikR + ikz)}{ikR} \begin{bmatrix} E_r \\ E_t \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中  $\theta$  为散射角,  $S_1(\theta)$  和  $S_2(\theta)$  均为散射函数,可表示为

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \psi_n \cos \theta + b_n \tau_n \cos \theta), \quad (2)$$

$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (b_n \psi_n \cos \theta + a_n \tau_n \cos \theta), \quad (3)$$

式中  $a_n$  和  $b_n$  为散射系数,  $\psi_n \cos \theta$ ,  $\tau_n \cos \theta$  为角函数,可表示为

$$\psi_n \cos \theta = \frac{1}{\sin \theta} P_n^1 \cos \theta, \quad \tau_n \cos \theta = \frac{d}{d\theta} P_n^1 \cos \theta, \quad (4)$$

由此可以得到散射的斯托克斯参量,即

$$\begin{bmatrix} I_s \\ Q_s \\ U_s \\ V_s \end{bmatrix} = \frac{1}{k^2 R^2} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_i \\ Q_i \\ U_i \\ V_i \end{bmatrix}, \quad (5)$$

对于球形粒子来说,非零的元素只有 8 个,而独立的只有 4 个,即

$$\begin{aligned} T_{11} &= T_{22} = \frac{1}{2} (S_1 S_1^* + S_2 S_2^*), & T_{12} &= T_{21} = -\frac{1}{2} (S_1 S_1^* - S_2 S_2^*), \\ T_{33} &= T_{44} = \frac{1}{2} (S_1 S_2^* + S_2 S_1^*), & T_{34} &= -T_{43} = \frac{i}{2} (S_1 S_2^* - S_2 S_1^*), \end{aligned} \quad (6)$$

式中 \* 表示共轭。散射和消光截面分别表示为

$$C_{\text{sca}} = \frac{1}{k^2} \int_{4\pi} T_{11}(\theta) d\Omega = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2), \quad (7)$$

$$C_{\text{ext}} = \frac{4\pi}{k^2} \text{Re}\{S_1(0)\} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \text{Re}(a_n + b_n), \quad (8)$$

单次散射反照率定义为

$$\omega_0 = C_{\text{sca}}/C_{\text{ext}}, \quad (9)$$

粒子的散射相矩阵  $\mathbf{P}(\theta)$  正比于转换矩阵  $\mathbf{T}(\theta)$

$$\mathbf{P}(\theta) = \frac{4\pi}{k^2 C_{\text{ext}}} \mathbf{T}(\theta). \quad (10)$$

离散随机介质中的粒子通常是多分散的,即具有一定尺寸分布,而且都可以通过一些典型的分布来表

示,如伽玛分布、修正的伽玛分布、对数正态分布、指数分布等;消光系数  $\beta_e$  和散射系数  $\beta_s$  定义为

$$\beta_e = \int_{a_1}^{a_2} C_{\text{ext}}(r) f(r) dr, \quad (11)$$

$$\beta_s = \int_{a_1}^{a_2} C_{\text{sca}}(r) f(r) dr, \quad (12)$$

式中  $f(r)$  为粒子的尺寸分布,粒子总数为

$$N = \int_{a_1}^{a_2} f(r) dr. \quad (13)$$

由于散射相矩阵是表示粒子群在半径范围  $(a_1, a_2)$  内的散射强度和偏振态的无量纲物理参数,因此它与粒子的尺寸分布  $f(r)$  无关,

$$P_{11} = \frac{2\pi}{k^2 \beta_s} \int_{a_1}^{a_2} [m_1(r) + m_2(r)] f(r) dr, \quad (14)$$

$$P_{12} = \frac{2\pi}{k^2 \beta_s} \int_{a_1}^{a_2} [m_2(r) - m_1(r)] f(r) dr, \quad (15)$$

$$P_{33} = \frac{2\pi}{k^2 \beta_s} \int_{a_1}^{a_2} [m_3(r) + m_4(r)] f(r) dr, \quad (16)$$

$$P_{34} = -\frac{2\pi i}{k^2 \beta_s} \int_{a_1}^{a_2} [m_4(r) + m_3(r)] f(r) dr, \quad (17)$$

式中  $m_j (j = 1, 2, 3, 4)$  是半径为  $a$  的粒子的散射强度函数,定义为

$$\begin{cases} m_j = S_j S_j^* = |S_j|^2, & j = 1, 2 \\ m_3 = S_2 S_1^*, & m_4 = S_1 S_2^*, \end{cases} \quad (18)$$

$P_{11}$  为相函数,它代表散射能量的角度分布,是一个归一化的无量纲量。

相函数的一阶矩为

$$g = \langle \cos \theta \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_{11} \cos \theta \cos \theta d \cos \theta, \quad (19)$$

称为不对称因子,是辐射传输中的一个重要参数。对各向同性散射而言,  $g=0$ 。当相函数的衍射峰变尖锐时,不对称因子变大;如果相函数峰值出现在朝后的方向 ( $90^\circ \sim 180^\circ$ ),则不对称因子可为负值。对洛伦兹-米类型的粒子,它的相函数在  $0^\circ$  散射角普遍有尖峰,所以不对称因子一般在  $0 \sim 1$  之间。

### 3 数值计算及分析

由于随机介质中的粒子为多分散的,假设随机介质中粒子尺寸分布为伽马分布<sup>[10]</sup>

$$f(r) = C \times r^{(1-3b)/b} \exp[-r/(ab)], \quad (20)$$

式中  $C$  为归一化常数,  $a = r_{\text{ef}}$ ,  $b = v_{\text{ef}} \cdot r_{\text{ef}}$  为有效半径,  $v_{\text{ef}}$  为有效方差,即

$$r_{\text{ef}} = \frac{\int_0^\infty r \pi r^2 f(r) dr}{\left[ \int_0^\infty \pi r^2 f(r) dr \right]}, \quad (21)$$

$$v_{\text{ef}} = \frac{\int_0^\infty (r - r_{\text{ef}})^2 \pi r^2 f(r) dr}{\left[ r_{\text{ef}}^2 \int_0^\infty \pi r^2 f(r) dr \right]}. \quad (22)$$

Hansen 等<sup>[10]</sup>的研究发现,具有相同有效半径尺寸分布不同的粒子层具有相近的散射特性。

图 1 给出了平均消光系数随波长的变化关系。假设随机介质中的粒子构成为水粒子,粒子的有效半径

$r_{ef}$ 分别为 5.56, 7 和 11  $\mu\text{m}$ (分别为积云、高层云和层云的有效半径),有效方差  $v_{ef}=1/9$ ,为了表明粒子的体积浓度,采用液态水含量(LWC)的概念,即

$$C_w = \rho N \langle V \rangle, \quad (23)$$

式中  $\rho=1 \text{ g/cm}^3$ ,  $N$  为粒子的数密度,  $\langle V \rangle$  为随机介质的平均体积。取  $C_w=0.188 \text{ g/m}^3$ 。从图 1 可以看出,随着有效半径的变大,消光系数也增大。

在可见光范围内,大粒子的消光效率因子近似为 2,因此  $C_{ext} = \Sigma/2$  是一个很好的近似,其中  $\Sigma = 4\pi r^2$  为粒子的表面积<sup>[7]</sup>。因此  $\beta_e = N\Sigma/2$ 。根据有效半径以及  $C_w$  的定义,

$$\beta_e = 3C_w / (2\rho r_{ef}), \quad (24)$$

可知  $\beta_e$  与粒子的尺寸分布类型无关,而仅与粒子的有效半径和液态水含量有关,这就是为什么利用卫星遥感云层的微观特性时,关心的主要是有效半径和液态水含量而不是尺寸分布的原因。

图 2 给出了单次散射反照率的谱分布。从图中可以看出,单次散射反照率随波长的变化和水滴折射率虚部随波长的变化曲线正好相反,这说明影响其大小的主要因素为粒子的折射率,即虚部越大则反照率越小。在可见光波段,所有云层的单次散射反照率接近于 1,在 3, 6, 和 10  $\mu\text{m}$  处有 3 个极小值,这 3 处位于水的吸收线上,且单次散射反照率总特点为随着波长的增大而减小。

图 3 给出了不对称因子随波长变化的曲线。对于小于 10  $\mu\text{m}$  的波长,不对称因子几乎不变,约为 0.82~0.85。因此在云层散射的计算中经常假设  $g=0.85$  是可行的<sup>[11]</sup>,在这些波长上,衍射起了主要作用,并产生了很强的单次散射。对于大于 10  $\mu\text{m}$  的波段,由于尺寸参数的减小,不对称因子急剧减小。此外从图中还可以看出粒子的有效半径越大,其不对称因子越大,散射的各向异性越强。

图 4 给出了根据米氏理论计算的不同有效半径水滴相矩阵元素,  $P_{11}$ ,  $-100P_{12}/P_{11}$ ,  $100P_{33}/P_{11}$ ,  $100P_{34}/P_{11}$ , 入射波长为 0.6328  $\mu\text{m}$ 。从图 4 可以总结出云滴散射的几个特征分别是:1) 强前向衍射;2) 在约  $100^\circ$  散射角处有极小值;3) 在约  $130^\circ$  散射角处有峰值,即众所周知虹的特征;4) 在与宝光环图案有关的后向散射中有峰值;5) 在  $20^\circ \sim 60^\circ$  范围内各种云的相函数几乎相同;6) 粒子尺寸越大前向越强,即衍射越强,相函数在这个波长上受有效半径的影响不大。图中还比较了与散射波偏振态有关的其余散射相矩阵元素,从线偏振度曲线中可以看到发生在散射光中大多数现象的标记,如虹、附属虹、宝光环等现象。

图 5 给出了 4 种卫星遥感典型波长情况下有效半径为 6  $\mu\text{m}$ ,尺寸分布为伽马分布的水云相函数和线极化度<sup>[12]</sup>。从图中可以看出,随着波长的增大,由于折射率和尺寸参数的变化,衍射峰值减小,虹、附属虹、宝光环等现象出现的角度都有所偏移,且幅值也有所减小,直至消失。

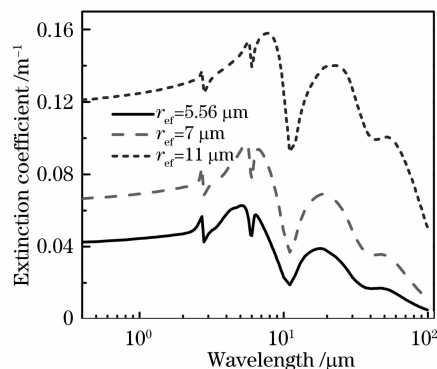


图 1 平均消光系数随波长的变化

Fig. 1 Variation of extinction coefficient with wavelengths

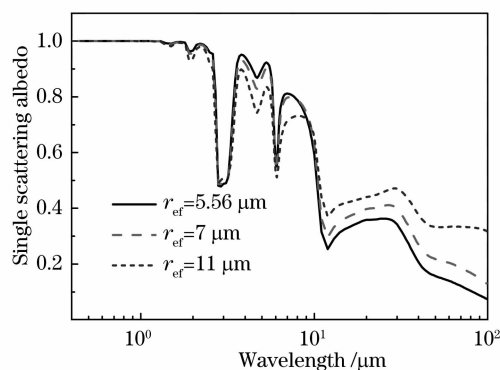


图 2 单次散射反照率随波长的变化

Fig. 2 Variation of single scattering albedos with wavelengths

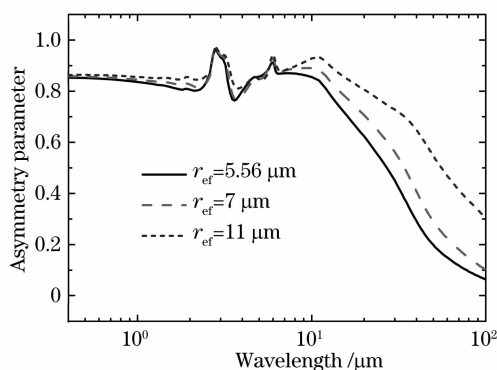


图 3 不对称因子随波长的变化

Fig. 3 Variation of asymmetry parameters with wavelengths

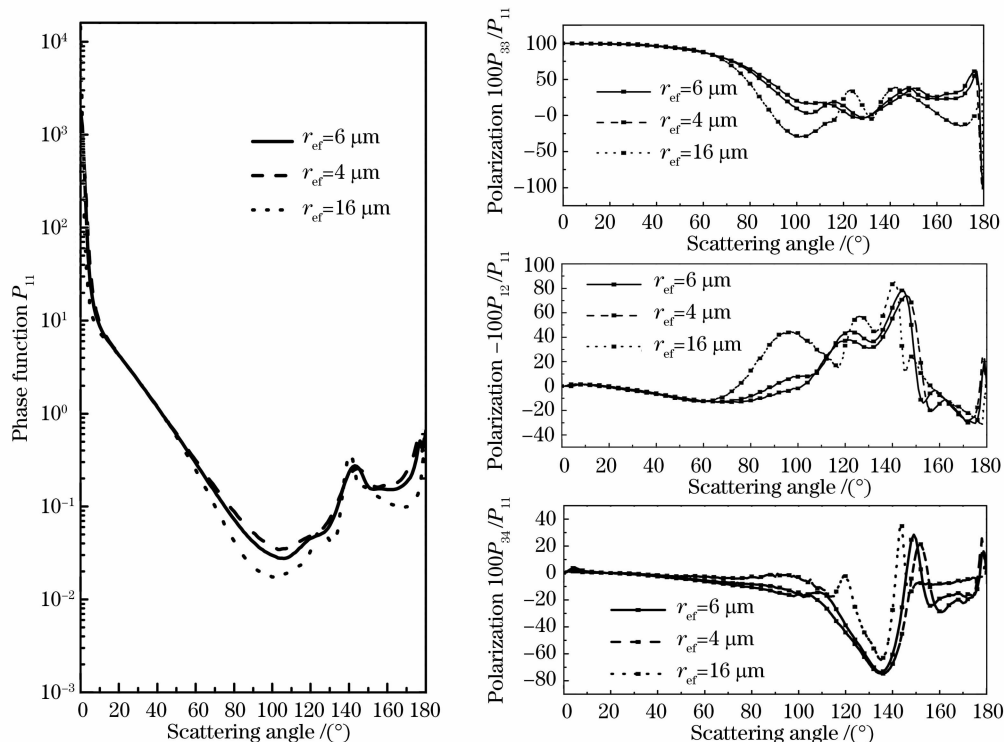


图4 单次散射相矩阵元素

Fig. 4 Elements of single scattering phase matrix

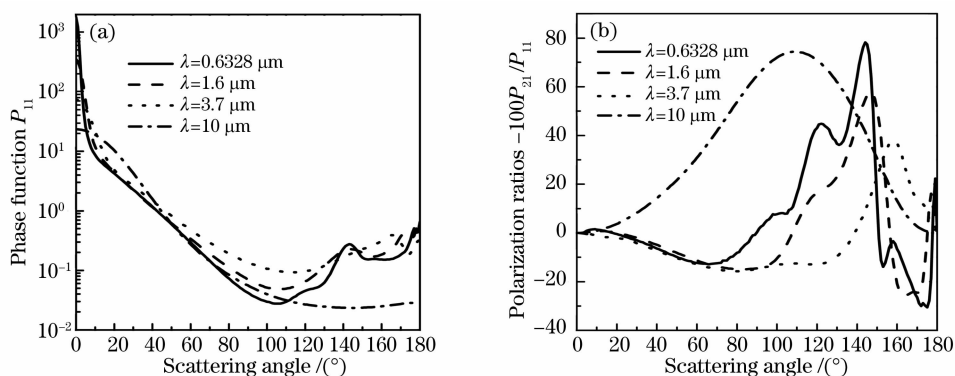


图5 单次散射相函数和线极化率

Fig. 5 Single scattering phase function and linear polarization ratios

## 4 结 论

利用米氏理论计算了具有一定尺寸分布随机介质的单次散射特性,分析了单次散射反照率、不对称因子、平均消光系数、相矩阵和粒子的有效半径、波长和折射率的关系。计算结果表明,辐射传输方程中的各个参数,不仅与粒子的有效半径有关,还与入射波的波段有关。

## 参 考 文 献

- 1 Wang Hongqi, Zhao Gaoxiang. Parameterization for narrow band optical properties of water clouds[J]. *Chinese Science Bulletin*, 1998, **43**(16): 1771~1775  
汪宏七,赵高祥. 水云的短波光学性质参数化研究[J]. *科学通报*, 1998, **43**(16): 1771~1775
- 2 Wang Hongqi, Zhao Gaoxiang. Parameterization for longwave band optical properties of water clouds[J]. *Progress in Natural Science*, 2001, **11**(10): 1092~1098  
汪宏七,赵高祥. 水云宽带长波光学性质参数化[J]. *自然科学进展*, 2001, **11**(10): 1092~1098

- 3 Liu Qiang, Chen Xiuhong, He Xiaoxiong *et al.*. Mean spectral scattering properties of water clouds from wavelength of ultraviolet to far infrared region[J]. *Laser & Infrared*, 2010, **40**(1): 51~56  
刘 强, 陈秀红, 何晓雄 等. 水云从紫外到远红外波段的平均单次散射特性[J]. *激光与红外*, 2010, **40**(1): 51~56
- 4 Sun Xianming, Shen Jin, Liu Wai *et al.*. Errors analysis of equivalent sphere model for computing the reflection properties of ice clouds[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(11): 2963~2967  
孙贤明, 申 晋, 刘 伟 等. 等效球模型模拟冰晶云反射的误差分析[J]. *光学学报*, 2009, **29**(11): 2963~2967
- 5 Wang Yi, Fan Wei, Rao Ruizhong. Analysis on the object-background contrast by numerical radiative transfer computation [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2004, **16**(7): 848~852  
王 毅, 范 伟, 饶瑞中. 大气中目标背景对比度及其影响因素的数值分析[J]. *强激光与粒子束*, 2004, **16**(7): 848~852
- 6 Yang Chungping, Wu Jian, Wan Min *et al.*. Calculation of the single scattering albedo in the radiative transfer equation[J]. *Laser Journal*, 2007, **28**(4): 45~46  
杨春平, 吴 健, 万 敏 等. 辐射传输方程中的平均单次散射反照率的计算[J]. *激光杂志*, 2007, **28**(4): 45~46
- 7 H. C. Van de Hulst. Light Scattering by Little Particles[M], New York: Wiley-Interscience, 1957
- 8 C. F. Bohren, D. R. Huffman. Absorption and Scattering of Light by Small Particles [M]. New York: Wiley-Interscience, 1983
- 9 M. Kerker. The Scattering of Light and Other Electromagnetic Radiation[M]. New York: Academic Press, 1969
- 10 J. E. Hansen, L. D. Travis. Light scattering in planetary atmospheres[J]. *Space Science Reviews*, 1974, **16**(4): 527~610
- 11 A. A. Kokhanovsky. Optical properties of terrestrial clouds[J]. *Earth-Science Reviews*, 2004, **64**(3-4): 189~241
- 12 K. N. Liou. An Introduction to Atmospheric Radiation[M]. 2nd ed. , New York: Academic Press, 2002