

# 三维物场多重分数傅里叶变换全息图光电再现 实验研究

郑华东 代林茂 王涛 于瀛洁\*

(上海大学精密机械工程系, 上海 200072)

**摘要** 对基于多重分数傅里叶变换(FrFT)的三维(3D)物场计算全息图进行光电再现实验研究。根据分数阶与衍射距离的关系,对不同物面分别设置不同的分数阶,分别计算得到各层物面在全息面的复振幅并进行叠加,对其进行编码分别得到分数傅里叶变换振幅型全息图和相息图。同时在计算3D物场的全息图时,在物波面加入不同的随机相位因子,得到3D物场的序列全息图,实现对再现影像中散斑噪声的抑制。构建了基于相位型液晶空间光调制器的全息光电再现系统,对单幅全息图和序列全息图的光电再现像的散斑指数、互相关系数进行分析。实验结果表明,通过计算3D物场的分数傅里叶变换序列相息图,可有效地抑制3D物场全息光电再现时的共轭像和散斑噪声,提高再现像的质量。

**关键词** 全息; 分数傅里叶变换; 计算全息图; 三维成像; 光电再现

中图分类号 O438.1

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP48.020901

## Optoelectronic Reconstruction of Three-Dimensional Scenes Based on Multiple Fractional-Fourier-Transform Holograms

Zheng Huadong Dai Linmao Wang Tao Yu Yingjie

(Department of Precision Mechanical Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

**Abstract** Optoelectronic reconstruction experiment is carried out for holographic display of three-dimensional (3D) scene based on multiple fractional Fourier transform (FrFT). By setting different fractional orders according to different diffraction distances, multiple fractional Fourier transform in each object plane is calculated and superposed to the whole complex amplitude. The amplitude-type and phase-type holograms are obtained by encoding the whole complex amplitude in hologram plane. In order to suppress the speckle noise, a pseudorandom phase factor is added to object planes in calculating sequential holograms. An experimental system is set up for optoelectronic reconstruction based on phase-type liquid crystal spatial light modulator (LC-SLM). Speckle index and correlation coefficient between the reconstructed images from single hologram and sequential holograms are analyzed. The experimental results show that, by calculating sequential holograms of 3D object and reconstructing with phase-type LC-SLM, the speckle noise and conjugate image can be well suppressed and the quality of reconstructed image is improved significantly.

**Key words** holography; fractional Fourier transform; computer holography; three-dimensional imaging; optoelectronic reconstruction

**OCIS codes** 090.1760; 070.2575; 100.6890

## 1 引言

三维(3D)物场的计算全息(CGH)一直是计算全息领域的研究热点和难点,研究人员先后提出了光线追踪法<sup>[1,2]</sup>、查表法<sup>[3]</sup>、多视角投影合成全息法<sup>[4,5]</sup>、层析法<sup>[6]</sup>等方法实现三维物场的全息图计算。其中,光线

收稿日期: 2010-08-05; 收到修改稿日期: 2010-10-19

基金项目: 国家自然科学基金(60772124)、上海市科委国际合作项目(09530708700)和上海大学研究生创新基金(Shucx101060, Shucx102195)资助课题。

作者简介: 郑华东(1978—),男,博士,主要从事全息显示和光学信息处理等方面的研究。

E-mail: zhenghuadong\_08@163.com

\* 通信联系人。E-mail: yingjieyu@staff.shu.edu.cn

追踪法和查表法的计算效率主要取决于采样点的多少;多视角投影合成法计算全息图的分辨率取决于投影视图的数量以及相邻视图的视角间隔。在前期研究中,本课题组提出了基于菲涅耳衍射原理的动态随机相位层析法<sup>[7]</sup>计算三维物场的全息图,有效地抑制了再现像的散斑噪声和共轭像的影响,但该方法的不足之处是其仅适合于菲涅耳衍射区和夫琅禾费衍射区的全息图计算。

1980年,V. Namias<sup>[8]</sup>提出分数傅里叶变换(FrFT)的概念,因其可以统一描述从物面到远场的衍射分布而受到重视。后来,A. W. Lohmann<sup>[9]</sup>根据维格纳(Wigner)分布和频谱旋转的概念给出了积分形式的光学 FrFT 的定义,并实现了由自由空间和透镜组合的光学 FrFT。此后,研究人员又提出了一些快速算法提高 FrFT 的计算效率<sup>[10,11]</sup>。FrFT 在光波变换分析<sup>[12,13]</sup>、模式识别<sup>[14]</sup>及全息显示<sup>[15~17]</sup>等领域已得到广泛应用。根据 FrFT 的性质,本文提出一种提高多重 FrFT 的三维物场计算全息光电再现像质量的方法。该方法通过计算三维物场 FrFT 序列相息图并进行光电再现,实现对全息光电再现时共轭像以及散斑噪声的有效抑制,提高衍射效率。

## 2 FrFT 计算三维物场全息图的原理

设物场分为  $L$  层,根据分数阶和衍射距离的关系,第  $i$  层( $1 \leq i \leq L$ )物面信息在全息面的 FrFT 复振幅可表示为<sup>[15]</sup>

$$O(u)_i = \mathcal{F}^{\alpha_i}[g(x_i)] = C_{\alpha_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[j\pi(x_i^2 \cot \varphi_i - 2ux_i \csc \varphi_i + u^2 \cot \varphi_i)] g(x_i) du_i, \quad (1)$$

式中  $\alpha_i$  为第  $i$  层物面所对应的分数阶,  $\mathcal{F}^{\alpha_i}$  表示  $\alpha_i$  阶 FrFT,  $\varphi_i = \alpha_i \pi/2$ ,  $g(x_i)$  为第  $i$  层物面的信息,  $C_{\alpha_i} = \{\exp[-j\pi \cdot \text{sgn}(\sin \varphi_i)/4 + j\varphi_i/2]\} / \sqrt{|\sin \varphi_i|}$ 。

整个物场的全息面复振幅分布可由各层物面信息在全息面的复振幅叠加获得,即

$$O(u) = \sum_{i=1}^L O(u)_i, \quad (2)$$

则三维物场的振幅型编码 FrFT 全息图可表示为

$$H(u) = |O(u) + R(u)|^2, \quad (3)$$

式中  $R(u)$  表示参考光波。

为了抑制再现像的散斑噪声,在物波面加入随计算次数动态变化的随机相位因子,得到多幅模式不同的 FrFT 全息图序列。加入随机相位因子后,(1)式改写为

$$O(u)_{i,t} = \mathcal{F}^{\alpha_i} \{g(x_i) \exp[j\varphi_t(x_i)]\} = C_{\alpha_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[j\pi(x_i^2 \cot \varphi_i - 2ux_i \csc \varphi_i + u^2 \cot \varphi_i)] g(x_i) \exp[j\varphi_t(x_i)] du_i, \quad (4)$$

式中  $\exp[j\varphi_t(x_i)]$  为第  $t$  次计算加入的随机相位因子。其中,  $t = 1, 2, 3, \dots, T$  ( $T$  为总的计算次数)。 $\varphi_t(x_i)$  的取值区间为  $[0, 2\pi]$ 。加入随机相位因子后,第  $t$  次计算的多重 FrFT 全息面复振幅可表示为

$$O(u)_t = \sum_{i=1}^L O(u)_{i,t}, \quad (5)$$

则第  $t$  次计算的多重分数傅里叶振幅型全息图可表示为

$$H(u)_t^{\text{am}} = |O(u)_t + R(u)|^2, \quad (6)$$

通过提取复振幅的相位,即可获得相应的多重分数傅里叶相息图,其表达式为

$$H(u)_t^{\text{ph}} = \arg[O(u)_t]. \quad (7)$$

## 3 实验及分析

以图 1(a)所示的三层物面构成的三维物场为例进行全息计算和光电再现实验(对数值模拟再现的分析请参见文献<sup>[15]</sup>)。设 FrFT 系统的标准焦距为 130 mm,“S”,“H”,“U”三个字母所对应的 FrFT 的分数阶分别为  $\alpha_S = 1.0$ ,  $\alpha_H = 0.9$ ,  $\alpha_U = 0.8$ 。则根据 FrFT 中分数阶与衍射距离的关系<sup>[15~17]</sup>,可计算出三个字母到全息面的衍射距离分别为  $z_S = 130$  mm,  $z_H = 111$  mm,  $z_U = 94.5$  mm。在每幅全息图计算过程中加入物面随机相位因子,分

别计算 50 幅多重 FrFT 博奇编码振幅全息图以及 FrFT 相息图。图 1(b)和(c)中所示分别为所计算的 FrFT 振幅型全息图和相息图(像素总量为  $1024 \text{ pixel} \times 768 \text{ pixel}$ ),图中右上角为局部放大视图。

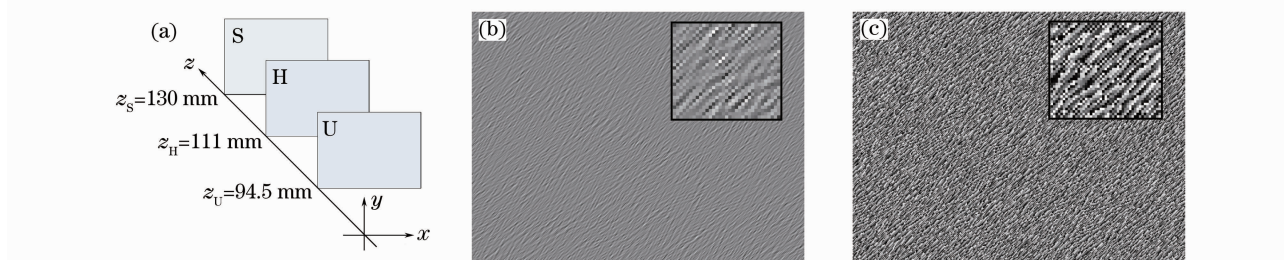


图 1 三维物场的 FrFT 全息图。(a) 3D 物场,(b)博奇编码全息图,(c)相息图

Fig.1 FrFT holograms of 3D scene. (a) model of 3D scene, (b) Burch-coding hologram, (c) kinoform

构建的基于相位型液晶空间光调制器(LC-SLM)的光电再现实验系统如图 2 所示,其中 LC-SLM 的像素总量为  $1024 \text{ pixel} \times 768 \text{ pixel}$ ,像素尺寸为  $19 \mu\text{m} \times 19 \mu\text{m}$ ;傅里叶透镜的焦距为 130 mm。计算所得到的多重分数傅里叶相息图加载到 LC-SLM 上。以波长为 532 nm 的激光进行照明,采用 CCD 在不同的衍射距离处对光电再现结果进行记录,记录过程中保持 CCD 的曝光参数不变。

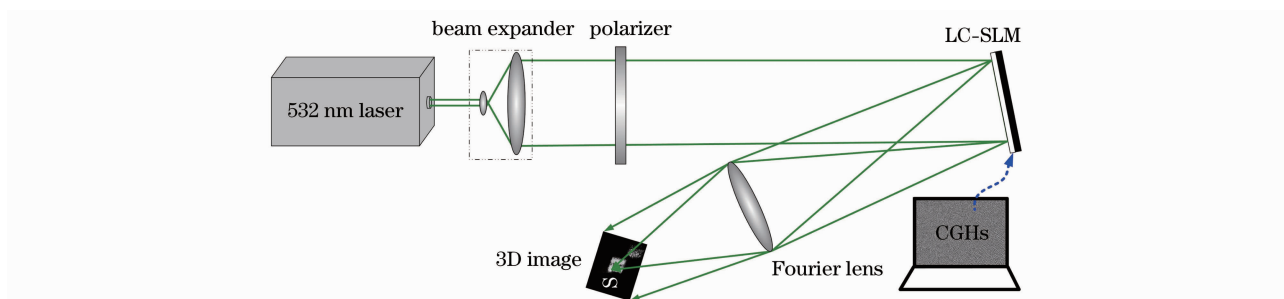


图 2 三维物场全息光电再现实验系统

Fig.2 Experimental system for optoelectronic reconstruction of 3D objects

实验过程中,在距离傅里叶透镜分别为  $d_s=130 \text{ mm}$ ,  $d_H=125.5 \text{ mm}$  及  $d_U=120 \text{ mm}$  时,单幅振幅型全息图再现像以及 50 幅振幅型全息图再现像的叠加效果如图 3 所示。单幅相息图再现像以及 50 幅相息图再现像的叠加效果如图 4 所示。在傅里叶透镜的焦平面上,分数阶为 1.0 所对应的字母“S”获得清晰再现像。

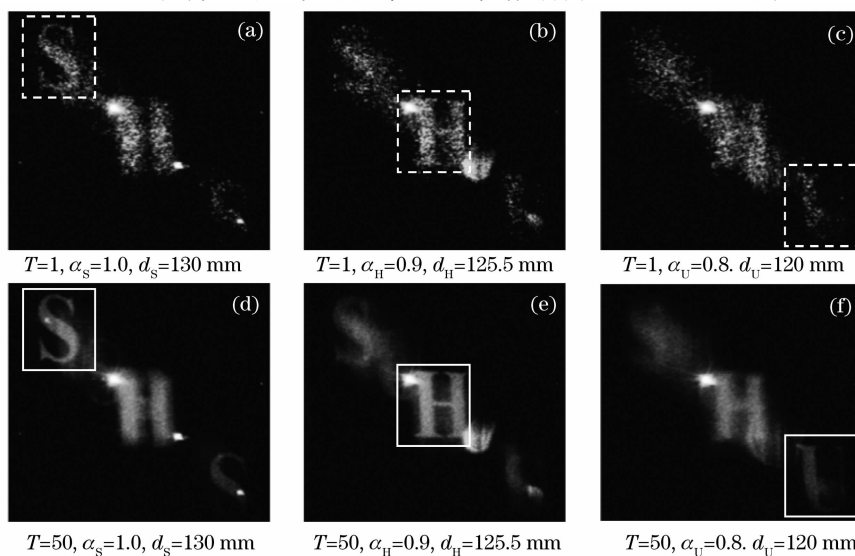


图 3 博奇编码全息图在不同再现距离处单幅再现像和 50 幅再现像叠加结果的比较

Fig.3 Single reconstructed image and superposed result of 50 reconstructed images at different distances from Burch-coding holograms

分数傅里叶阶次小于 1 所对应的物面信息则在距离傅里叶透镜 1 倍焦距以内的区域获得再现,且再现距离随 FrFT 阶次的减小而缩短。

对比图 3 和图 4 也可以看出,与振幅型全息图相比,相息图的再现像具有更高的衍射效率,表现为再现像和零级的对比度得到显著提高,且共轭像得到了有效抑制。

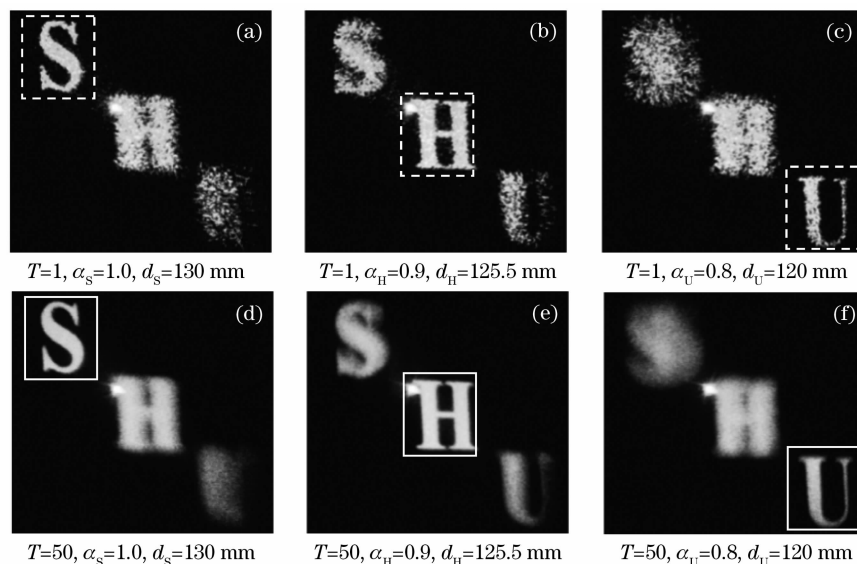


图 4 相息图在不同再现距离处单幅再现像和 50 幅再现像叠加结果的比较

Fig. 4 Single reconstructed image and superposed result of 50 reconstructed images at different distances from kinoforms

为评价所计算的序列全息图对光电再现像散斑噪声的抑制效果,引入散斑指数  $\eta$  进行分析,其表达式为<sup>[15]</sup>

$$\eta = \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{\sigma(m,n)}{\mu(m,n)}, \quad (8)$$

式中  $\sigma(m,n)$ ,  $\mu(m,n)$  分别为  $t$  幅全息图再现像叠加后的单个字母再现像(如图 3 和图 4 中白线框内所示)中像素点  $p(m,n)$  所在邻域的标准方差值和均值。本文实验中考虑到光电再现激光散斑颗粒尺寸较大,  $p(m,n)$  的邻域取为  $20 \text{ pixel} \times 20 \text{ pixel}$ 。散斑指数随叠加幅数变化情况如图 5 所示。

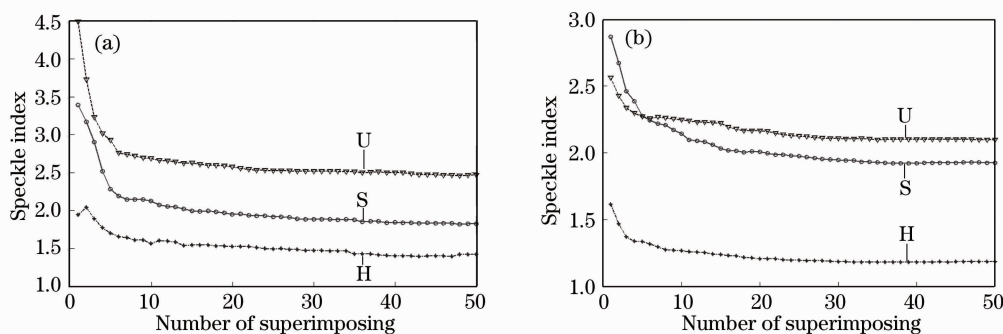


图 5 散斑指数随再现像叠加幅数的变化趋势。(a) 振幅型全息图再现时, (b) 相息图再现时

Fig. 5 Variation trends of speckle indexes of reconstructed images from amplitude-type hologram (a) and kinoform (b)

从图 5 可以看出,随着叠加次数增加,散斑指数总体上呈下降的趋势。且随着再现像叠加幅数的增加,散斑指数的递减是非线性的。还可看出,在  $T$  相同时,相息图再现像中相应字母的散斑指数比振幅型全息图再现时要低。这是由于振幅型全息图再现时存在共轭像影响了再现像的质量,而相息图再现时不存在共轭像的干扰。另外,再现像面各字母的光强分布不均是导致各线框内再现像散斑指数不同的主要因素。

为了进一步分析分数傅里叶全息图序列再现像叠加结果对再现像质量的影响,以 50 幅再现像叠加后的结果为参考,分别对不同幅数的再现像叠加后的互相关系数( $\beta$ )进行评价。 $\beta$  定义为<sup>[7]</sup>

$$\beta = [E(I_1 I_2) - E(I_1)E(I_2)] / \sqrt{D(I_1)D(I_2)}, \quad (9)$$

式中  $I_1$  为 50 幅全息图再现像叠加后线框内的考察区域,  $I_2$  为  $t$  幅 ( $t = 1, 2, 3, \dots, T$ ) 再现像叠加后线框内的考察区域,  $E(I_1)$  和  $E(I_2)$  分别为  $I_1$  和  $I_2$  的均值,  $D(I_1)$  和  $D(I_2)$  分别为  $I_1$  和  $I_2$  的标准差。

图 6 为互相关系数随叠加次数的变化趋势。从图 6 可见,随着迭代次数的增加,全息图叠加后字母区域与 50 幅全息图全部叠加后字母区域的互相关系数越来越接近于 1。可以看出,再现像叠加后的互相关系数随叠加幅数呈现非线性递增趋势。当叠加幅数达到一定值(本例中约为 20 幅)以后,互相关系数的变化则越来越不明显。

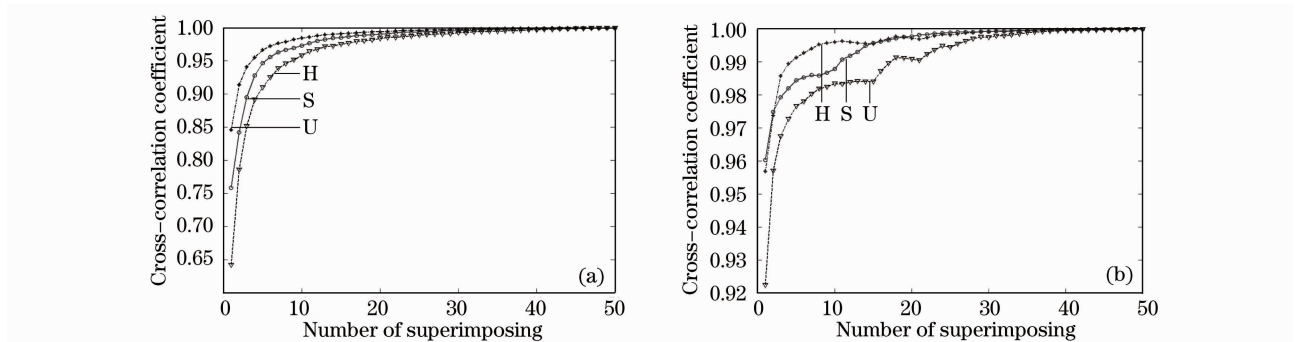


图 6 再现像相关系数随叠加幅数变化的趋势。(a)博奇编码全息图再现时,(b)相息图再现时

Fig. 6 Variation trends of cross-correlation coefficient according to the superposing number of reconstructed images.

(a) Burch-coding hologram, (b) kinoform

值得注意的是,本文构建的光电再现系统基于菲涅耳衍射原理,在对 FrFT 全息图进行再现时三维像场存在横向和纵向的缩放关系。此外,LC-SLM 的栅格效应导致相息图光电再现结果中仍然存在残余的零级斑。后续工作将对上述问题做进一步的分析,并探讨真彩色三维物场的分数傅里叶相息图计算和实时动态再现方法。

## 4 结 论

提出了一种提高多重 FrFT 三维物场计算全息图光电再现质量的方法,通过在物面加入随机相位因子,计算获得三维物场的振幅型全息图和序列相息图,并构建了基于相位型空间光调制器的全息光电再现实验系统对所计算的序列全息图进行光电再现实验和分析。结果表明,在构建的相位调制型全息光电再现系统中,所计算的 FrFT 序列相息图能有效地抑制全息光电再现的共轭像以及激光散斑噪声,从而有效地提高光能利用效率和全息光电再现像的质量。

## 参 考 文 献

- 1 A. D. Stein, Z. Wang, J. S. Leigh *et al.*. Computer-generated holograms: a simplified ray-tracing approach[J]. *Comput. Phys.*, 1992, **6**(4): 389~392
- 2 M. Lucente. Interactive computation of holograms using a look-up table[J]. *J. Electron. Imag.*, 1993, **2**(1): 28~34
- 3 S. C. Kim, E. S. Kim. Effective generation of digital holograms of three-dimensional objects using a novel look-up table method[J]. *Appl. Opt.*, 2008, **47**(19): D55~D62
- 4 K. Matsushima, H. Schimmel, F. Wyrowski. Fast calculation method for optical diffraction on tilted planes by use of the angular spectrum of plane waves[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2003, **20**(9): 1755~1762
- 5 D. Abookasis, J. Rosen. Three types of computer-generated hologram synthesized from multiple angular viewpoints of a three-dimensional scene[J]. *Appl. Opt.*, 2006, **45**(25): 6533~6538
- 6 S. Trester. Computer-simulated Fresnel holography[J]. *Eur. J. Phys.*, 2000, **21**(4): 317~331
- 7 H. D. Zheng, Y. J. Yu, H. Y. Qian *et al.*. Reduction of speckle noise by multi-kinoforms in holographic three-dimensional display[C]. *SPIE*, 2008, **7155**: 71550C
- 8 V. Namias. The fractional Fourier transform and its application in quantum mechanics[J]. *IMA J. Appl. Math.*, 1980, **25**(3): 241~265

- 9 A. W. Lohmann. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(10): 2181~2186
- 10 J. García, D. Mas, R. G. Dorsch. Fractional-Fourier-transform calculation through the fast-Fourier-transform algorithm [J]. *Appl. Opt.*, 1996, **35**(35): 7013~7018
- 11 X. P. Yang, Q. F. Tan, X. F. Wei *et al.*. Improved fast fractional-Fourier-transform algorithm[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2004, **21**(9): 1677~1681
- 12 S. Barwick, J. S. Finnigan. Joint fractional Fourier analysis of wavefront-coding systems[J]. *Opt. Lett.*, 2009, **34**(2): 154~156
- 13 Chen Senhui, Zhang Tingrong, Feng Xiaofang. Transformation properties of Hermite-Laguerre-Gaussian beam in fractional Fourier transform plane[J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(2): 374~378  
陈森会, 张廷蓉, 冯小芳. 分数傅里叶变换面上厄米-拉盖尔-高斯光束的变换特性[J]. *中国激光*, 2009, **36**(2): 374~378
- 14 Weimin Jin, Yupei Zhang. Color pattern recognition based on the joint fractional Fourier transform correlator[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2007, **5**(11): 628~631
- 15 Huadong Zheng, Yingjie Yu, Tao Wang *et al.*. High-quality three-dimensional holographic display with use of multiple fractional Fourier transform[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2009, **7**(12): 1151~1154
- 16 Han Chao, Wei Sui, Liu Kaifeng. Coding of tiling algorithm hologram of fractional Fourier and dynamic display[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(12): 3299~3303  
韩超, 韦穗, 刘凯峰. 分数傅里叶分块算法全息图的编码与动态显示[J]. *光学学报*, 2009, **29**(12): 3299~3303
- 17 Xie Shiwei, Gao Feng, Zeng Yangsu *et al.*. Computer-generated hologram of fractional Fourier transform[J]. *Chinese J. Lasers*, 2003, **30**(5): 431~434  
谢世伟, 高峰, 曾阳素等. 分数傅里叶变换计算全息图[J]. *中国激光*, 2003, **30**(5): 431~434