

水平大气通道的光波前倾斜功率谱的测量及其频率分析

刘超^{1,2} 胡立发¹ 穆全全¹ 曹召良¹ 宣丽¹

(¹中国科学院长春光学精密机械与物理研究所应用光学国家重点实验室, 吉林 长春 130033)

² 中国科学院研究生院, 北京 100049

摘要 在自适应光学系统设计和搭建过程中, 一个关键的设计考虑因素就是倾斜镜的带宽, 即 Tyler 频率。提出了一种根据实测的湍流整体倾斜功率谱直接计算 Tyler 频率的方法。首先利用 Shack-Hartmann 波前探测器, 测量了水平湍流倾斜像差的功率谱, 然后以一个衍射角为截止均方根残差, 确定出 Tyler 频率。在实验所处的湍流条件下, 水平湍流倾斜功率谱在高频部分与频率的 -2 次方成正比, 与理论预言的 $-11/3$ 次方成正比存在差异。还获得了 Tyler 频率的昼夜变化规律: 在夜晚和清晨, 水平湍流的 Tyler 频率变化缓慢, 在实验所处的湍流条件下其值一般小于 4 Hz; 在白天波动剧烈, 实验测得其值最大可达到约 20 Hz。因此, 对处于该湍流条件下的自适应光学系统, 其倾斜镜的带宽需达到 20 Hz 以上。

关键词 大气光学; Tyler 频率; 倾斜功率谱; 自适应光学; 水平湍流

中图分类号 O436

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP48.020101

Tilt Power Spectra Measurements and Frequency Analysis of Disturbed Wavefront in Horizontal Turbulence

Liu Chao^{1,2} Hu Lifa¹ Mu Quanquan¹ Cao Zhaoliang¹ Xuan Li¹

(¹ State Key Laboratory of Applied Optics, Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun, Jilin 130033, China)

² Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract In design of an adaptive optics system, a critical consideration is the bandwidth requirements for turbulence-induced tilt compensation, Tyler frequency. A method to evaluate the Tyler frequency is proposed according to the measured total tilt power spectrum. First, the power spectrum of the horizontal turbulence is measured through a Shack-Hartmann wavefront sensor. Then, the Tyler frequency is determined by which the tilt cut-off residual error of a diffraction angle is applied. The result illustrates that the tilt power spectrum is proportional to f^{-2} (f is temporal frequency) at high frequencies. At last, the circadian variation of Tyler frequency is acquired. It illustrates the important fact that, at night and early morning, the Tyler frequency of horizontal turbulence changes slowly, generally less than 4Hz in the turbulence condition, but it is volatile during the day, the largest up to about 20 Hz in Changchun. Therefore, the temporal bandwidth of the tip-tilt, in which the adaptive optics systems are used for the horizontal turbulence correction under such turbulence condition, must exceed 20 Hz.

Key words atmospheric optics; Tyler frequency; tilt power spectrum; adaptive optics; horizontal turbulence

OCIS codes 010.1290; 010.1080; 010.1330

1 引言

湍流大气对光波的波前扰动, 是激光通信、激光测距、激光能量传输等系统所必须考虑的问题。自适应

收稿日期: 2010-10-20; 收到修改稿日期: 2010-11-03

基金项目: 国家自然科学基金(60578035, 50703039)和吉林省与科学院科技合作项目(2008SYHZ0005)资助课题。

作者简介: 刘超(1983-), 男, 博士研究生, 主要从事液晶自适应光学系统控制方面的研究。E-mail: liuchao678@163.com

导师简介: 宣丽(1957-), 女, 博士, 研究员, 主要从事液晶自适应光学、液晶材料与器件等方面的研究。

E-mail: xuanli@ciomp.ac.cn

光学技术提供了实时探测和校正动态光学畸变的手段,并在天文及视网膜成像中获得了广泛的应用^[1~4]。当光束经过水平大气传播时,湍流引起的光学波前畸变更加严重。由于在这种畸变中倾斜像差所占的比例约为 87%^[5],占了总畸变量的大部分,所以实际的自适应光学系统都采用一面快速倾斜镜来单独校正倾斜像差^[6],然后再利用波面校正器(如变形镜^[7]或液晶空间光调制器^[8~11]等)来校正其他的高阶像差。这样既可以降低波面校正器的动态范围,提高高阶像差的校正精度,又由于单独采用了倾斜镜来校正倾斜像差,也提高了倾斜像差的校正精度。

在设计和构建倾斜校正子系统时,需要知道校正倾斜畸变所需要的系统带宽。然而关于系统带宽问题的讨论绝大多数文章都只是理论分析^[12~14],而实际测量的报道却很少。最著名的理论分析之一是 G. A. Tyler^[14]根据 Kolmogorov 理论,通过倾斜功率谱分析得出了校正倾斜像差所需要的系统带宽(Tyler 频率)。然而实践表明,真实大气湍流的功率谱与 Kolmogorov 理论计算出的功率谱在很多情况下都不一致^[15],因此不能够直接利用 Tyler 的理论公式进行倾斜带宽的计算,而需要通过实验测量,确定出倾斜校正所需要的系统带宽。对于水平湍流倾斜带宽测量的问题,有少量文献报道^[7,16,17],水平湍流所需倾斜带宽的昼夜变化规律则还未见有文献报道。

本文从理论和实验两个方面详细阐述了倾斜像差校正的带宽问题。为了确定倾斜校正所需要的带宽,首先测量和分析了水平湍流波前的时间功率谱,其次根据实测的时间功率谱曲线得到校正残差与带宽的关系曲线。然后以一个衍射角为截止均方根残差,确定出倾斜镜的带宽(本文把使用这种方法所测量得到的带宽叫作 Tyler 频率)。同时,还获得了 Tyler 频率的昼夜变化规律。最后对获得的 Tyler 频率进行了可靠性检验。本文所提到的功率谱指时间功率谱。

2 倾斜湍流的功率谱及 Tyler 频率理论分析

2.1 倾斜功率谱分析

对于畸变波前的总体倾斜(也称为 G 倾斜),是指在有效的口径范围内波前梯度的平均值,对于圆口径,其定义^[9]为

$$T_{\theta}(t) = \frac{1}{kA} \iint_A \nabla \phi(r, t) d^2 r, \quad (1)$$

式中 A 为孔径的面积, $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, $\nabla \phi(r, t)$ 为波前相位梯度, $T_{\theta}(t)$ 为倾斜面的法线与光轴的夹角, r 为归一化半径,变化区间为 $[0, 1]$ 。在进行实际测量的时候,用倾斜波面的空间均方根值(RMS)来表示倾斜绝对值的大小

$$T_{\text{RMS}}(t) = \text{sign}[T_{\theta}(t)] \left\{ \iint_A [R \cdot T_{\theta}(t)r]^2 d^2 r \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

式中 R 为孔径的半径, $\text{sign}[T_{\theta}(t)]$ 表示取与 $T_{\theta}(t)$ 相同的正负号。倾斜的自相关函数为

$$C(\tau) = \langle T(t_1)T(t_2) \rangle, \quad (3)$$

式中 $\tau = t_1 - t_2$, $T(\cdot)$ 表示 $T_{\theta}(t)$ 或者 $T_{\text{RMS}}(t)$, 根据需要进行选择。则功率谱为自相关函数的傅里叶变换,即

$$\Phi(f) = \int d\tau C(\tau) \exp(-2\pi i f \tau). \quad (4)$$

根据 Kolmogorov 理论, G. A. Tyler 从理论上分析出了倾斜功率谱的形式为^[9]

$$\frac{1}{2} \Phi(f) = 0.1551 D^{-1/3} f^{-8/3} \int_0^L C_n^2(z) V^{5/3} F(f \cdot D/V) dz, \quad (5)$$

式中

$$F(y) = \int_0^1 dx \frac{x^{5/3}}{\sqrt{1-x^2}} J_2(\pi y/x), \quad (6)$$

D 为孔径的直径, V 为横向风速, $C_n^2(z)$ 为在 z 处的折射率结构函数, $J_2(\cdot)$ 表示二阶贝塞尔函数。(5)式等号左边的 $1/2$ 表示只取一个方向的倾斜功率谱。(5)式在低频的形式为

$$\frac{1}{2}\Phi(f) = 0.804f^{-2/3} \int_0^L C_n^2(z)V^{-1/3} dz, \quad (7)$$

在高频的形式为

$$\frac{1}{2}\Phi(f) = 0.0110D^{-3}f^{-11/3} \int_0^L C_n^2(z)V^{8/3} dz, \quad (8)$$

由此可以看出,倾斜功率谱在低频段与频率的 $-2/3$ 次方成正比,在高频段与频率的 $-11/3$ 次方成正比。

2.2 Tyler 频率的确定

对于自适应系统,利用闭环传递函数

$$H(f) = 1/(1 + if/f_{3\text{dB}}), \quad (9)$$

式中 $f_{3\text{dB}}$ 表示3 dB特征频率,则单轴的倾斜时间均方根残差为

$$\sigma^2 = \int df \left[\frac{1}{2}\Phi(f) \right] |1 - H(f)|^2, \quad (10)$$

把(5)式代入到(10)式,当 $f_{3\text{dB}}$ 比较大时可以得到

$$\sigma^2 = (f_T/f_{3\text{dB}})^2 / (\lambda/D)^2, \quad (11)$$

式中

$$f_T = 0.331D^{-1/6}\lambda^{-1} \left[\int_0^L dz C_n^2(z)V^2 \right]^{1/2}, \quad (12)$$

f_T 是Tyler频率。由(11)式可知,当 $f_{3\text{dB}} = f_T$ 时, σ 为一个衍射角 λ/D 。如果用倾斜波面的RMS值表示,则倾斜均方根残差 σ_{RMS} 等于 $\pi/2$ rad(相位单位),如图1所示。

在实验中人们发现,倾斜功率谱与理论预言的在低频段与频率的 $-2/3$ 次方成正比以及在高频段与频率的 $-11/3$ 次方成正比与实验事实不相符合^[10]。因此Tyler频率就不能直接通过(12)式进行计算,而必须首先通过实际测量得到倾斜功率谱,然后由(10)式计算出均方根残差与控制带宽的关系曲线,最后以 $\pi/2$ rad(相位单位)作为截止倾斜均方根残差确定出Tyler频率。

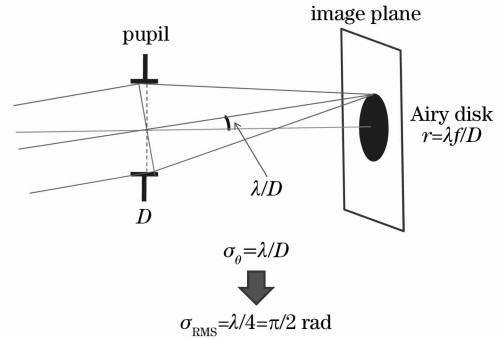


图1 倾斜角时间均方根残差为一个衍射角时的倾斜波面,其波面位相RMS的时间均方根残差为 $\pi/2$ rad(相位单位)

Fig. 1 Temporal square root of the phase RMS of a wavefront is $\pi/2$ radian, while temporal square root of the tilt angle is a unit diffraction angle

3 500 m 水平湍流实验

3.1 实验装置和参数

在相距约500 m的两个房间中进行光的发射和波面的接收探测实验,具体实验装置如图2所示。在发射端,用光纤束和一个离轴反射镜来模拟无限远发光的物体。光源为氙灯,离轴反射镜的口径235 mm,焦距500 mm,光纤束的直径1 mm,把光纤束放在离轴反射镜的焦点内侧附近。接收端的牛顿式望远镜口径406 mm,焦距1829 mm。用Shack-Hartmann波前探测器(SHWFS)^[18]探测波前畸变,其微透镜平面与望远镜主镜共轭。SHWFS口径3 mm,其微透镜数为415个,微透镜直径 $157.5 \mu\text{m}$,焦距3 mm成六角排列。SHWFS的CCD像素数为 $128 \text{ pixel} \times 128 \text{ pixel}$,像素尺寸 $24 \mu\text{m}$ 。实验中,曝光时间取2 ms(采样频率500 Hz)。在500 m的路径上,主要为草皮和沥青路面,光传输路径距离地面约12~15 m。

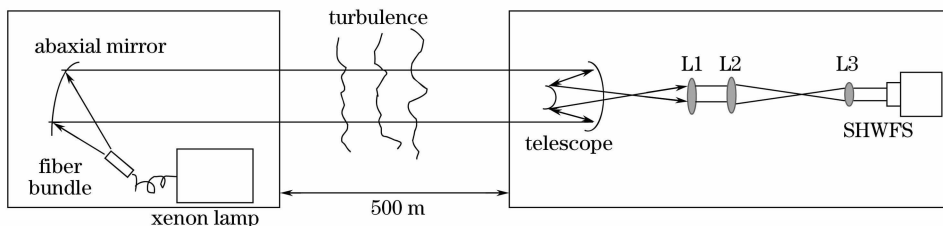


图2 水平湍流测量实验装置

Fig. 2 Experimental setup for the measurements of horizontal turbulence

3.2 倾斜功率谱分析

选择一个晴朗的、大气透过率高的时候进行实验。以 500 Hz 的采样频率,连续采样 10000 个湍流波面相位数据作为一个数据样本。由采样定理可知,有效的频率范围是 0.05~250 Hz,对倾斜功率谱而言已经足够。对于测量得到的湍流波面相位数据,首先由(1)式提取出每个波面的倾斜相位 RMS 值,然后由(3)式计算倾斜的协方差,最后由(4)式经过傅里叶变换后得到倾斜湍流功率谱,即利用周期图方法估计功率谱密度(PSD)。图 3 给出了在 2009 年 7 月 18 日和 8 月 8 日在长春光电子园区所测量的倾斜功率谱。从图中可以看出,低频部分变化规律不明显,波动剧烈,这可能是由于实验平台存在低频振动,叠加在了低频部分,故暂时不考虑低频成分。对于高频部分,随着频率的增加,倾斜功率谱急剧衰减,说明湍流波面的倾斜像差主要是低频部分起作用。并且在高频部分,功率谱是与频率的 -2 次方成正比。这与(8)式预言的与频率的 $-11/3$ 次方成正比的结论不符合。而且不同时间多次测量所得到的一致性结果更证明了这一点。

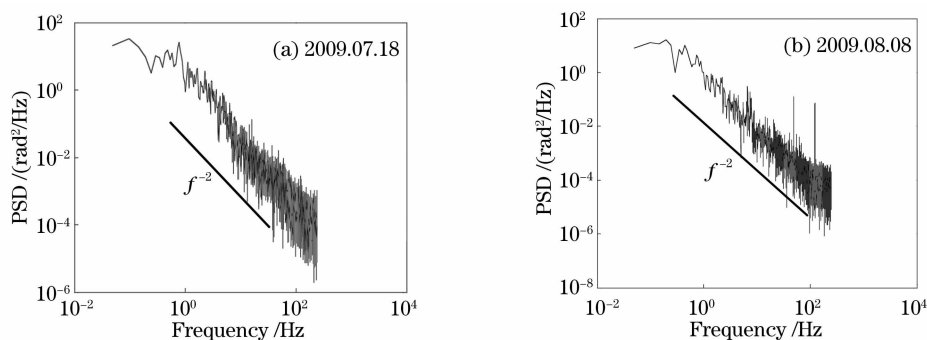


图 3 500 m 水平湍流倾斜功率谱

Fig. 3 Tilt PSD of the 500 m horizontal turbulence

3.3 Tyler 频率的确定

把得到的功率谱连同(9)式一起代入到(10)式,得到倾斜残差均方值与系统带宽的关系曲线如图 4 所示(对应于图 3)。从图中可以看出,随着系统带宽的增加,倾斜残余均方值逐渐减小。根据 G. A. Tyler 的定义,当均方值 σ^2 等于 $\pi^2/4$ 时,对应的系统带宽即为 Tyler 频率。例如对于图 4(a),对应的 Tyler 频率为 6.2 Hz,图 4(b)对应的 Tyler 频率为 1.3 Hz。

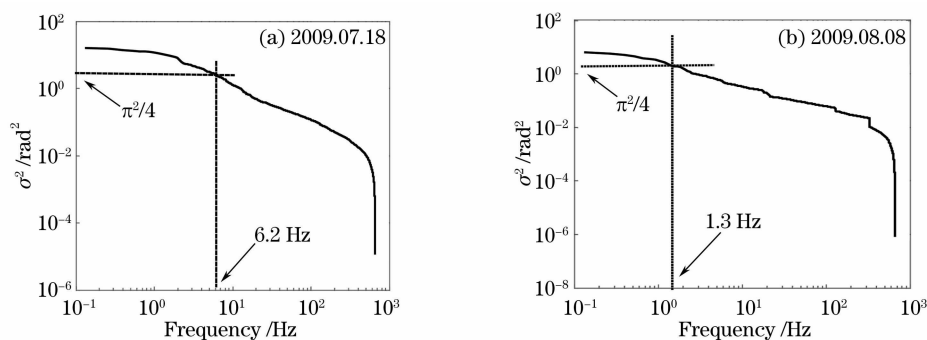


图 4 500 m 水平湍流倾斜均方残差与带宽的关系

Fig. 4 Relationship between the tilt square root of the 500 m horizontal turbulence and bandwidth

每间隔半个小时测量一个数据样本,连续测量 24 h,计算出每个样本的 Tyler 频率,便可以获得 Tyler 频率的昼夜变化规律,如图 5 所示。从图中可以看出,从傍晚到清晨(18:00~第二天 07:00),Tyler 频率变化平缓,起伏区间为 0~4 Hz。随着地面温度的升高,Tyler 频率越来越不稳定,当达到正午时段[图 5(a)中为 10:00~14:00;图 5(b)为 12:00~16:00]时,Tyler 频率起伏达到最大,起伏区间约为 8~20 Hz。且随着地面温度的升高或降低,Tyler 频率的均值也相应地增加或减小。正午时段地面温度最高,故 Tyler 频率的均值达到最大值,约为 12 Hz。

从上面的分析可见,水平湍流受地面温度的影响很大。这一现象可以解释如下:当地面的温度增加时,则其上方的薄空气层也开始变暖变轻,于是开始上浮,而薄层上方的冷空气下沉,于是形成空气对流。地表

温度越高,对流现象越强烈,则引起 Tyler 频率更加剧烈波动。当达到傍晚时分,地面温度降低,对流现象也明显减弱,故 Tyler 频率的起伏也变得平缓。值得一提的是,当测得了倾斜均方残差与带宽的关系后(如图 4 所示),也可以不以 $\sigma^2 = \pi^2/4$ 为截止均方残差,而是以所需要的任意精度的 σ^2 值作为截止均方残差,同样可以确定出系统在相应的精度条件下所需要的带宽值。

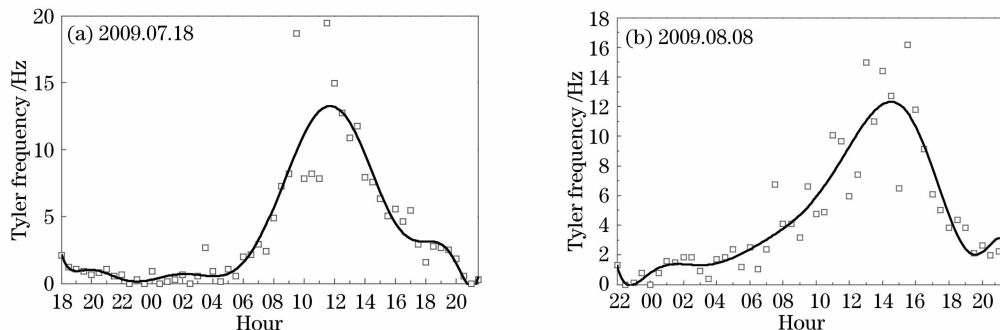


图 5 500 m 水平湍流 Tyler 频率的昼夜变化情况

Fig. 5 Circadian variation of Tyler frequency of the 500 m horizontal turbulence

3.4 倾斜功率谱估计与 Tyler 频率测量的可靠性检验

如果倾斜镜不进行自适应校正,则此时系统的闭环传递函数 $H(f)$ 等于 0。由(10)式可知,功率谱对频率的积分等于倾斜均方根平方的时间平均值。实验中还可以直接由 SHWFS 测量得每个波面的 RMS,并得出时间统计平均值。利用两种方法所确定的 RMS 在统计意义上应该相等。所以可以通过比较两种方法所获得的 RMS 是否相等,便可以检验功率谱估计是否合理、所测的 Tyler 频率是否准确。

图 6 给出了由功率谱计算得到的 RMS 值和直接由 SHWFS 所测得的波面平均 RMS 值在不同测量时刻的情况(2009 年 7 月 18 日~19 日,长春光电子园区)。可以看出,在误差允许的范围内两者相等。由此说明功率谱估计是合理的, Tyler 频率的计算是准确的。

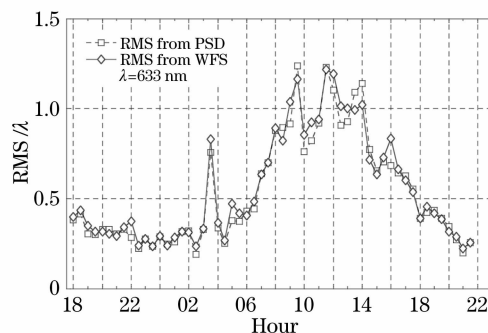


图 6 由功率谱计算的 RMS 值与直接测量的波面平均 RMS 值

Fig. 6 Temporal average RMSs calculated from PSD and measured by SHWFS

4 结 论

通过对水平 500 m 湍流波面的采集,分析了其倾斜功率谱,得出了倾斜功率谱在高频段与频率的-2 次方成正比的规律。并根据实际所测量得到的功率谱,以一个衍射角作为倾斜均方根截止残差,确定出了校正倾斜所需要的带宽即 Tyler 频率。获得了 Tyler 频率的昼夜变化规律。它们是:从傍晚到清晨, Tyler 频率变化平缓(在本实验所处的湍流条件下其起伏区间为 0~4 Hz);随着地面温度升高, Tyler 频率越来越不稳定,当达到正午时段时,起伏达到最大(本实验测得其起伏区间为 8~20 Hz);随着地面温度的升高或降低, Tyler 频率的均值也相应地增加或减小。正午时段 Tyler 频率的均值达到最大值(实验值约为 12 Hz)。指出了湍流大气的对流现象是引起 Tyler 频率如此波动的原因。总之,通过对 Tyler 频率的测量,为自适应系统中的倾斜校正子系统的设计和搭建提供了有力的实验依据。对处于本文实验条件下的全天候工作的自适应光学系统,其倾斜镜的带宽必须大于 20 Hz。

参 考 文 献

- 1 Cao Zhaoliang, Mu Quanquan, Hu Lifa *et al.*, Design on liquid crystal adaptive optical system for 600 mm telescope[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(6): 1147~1150

- 曹召良,穆全全,胡立发等. 600 mm 望远镜液晶自适应系统成像光路设计[J]. 光学学报, 2008, **28**(6): 1147~1150
- 2 Cheng Shaoyuan, Hu Lifa, Cao Zhaoliang *et al.*. Application of liquid crystal adaptive optics system on human eye fundus imaging with high spatial resolution[J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(10): 2524~2527
- 程少园,胡立发,曹召良等. 液晶自适应光学在人眼眼底高分辨率成像中的应用[J]. 中国激光, 2009, **36**(10): 2524~2527
- 3 Ye Biqing, Chen Jun, Fu Zhisheng *et al.*. Characteristics of liquid crystal spatial light modulator at oblique incidence[J]. *Chinese J. Lasers*, 2007, **34**(3): 374~378
- 叶必卿,陈军,福智昇央等. 液晶空间光调制器的斜入射特性[J]. 中国激光, 2007, **34**(3): 374~378
- 4 Cheng Shaoyuan, Cao Zhaoliang, Hu Lifa *et al.*. Design of LC adaptive optics system for human retinal imaging operated on open-loop and two-wavelength mode[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2010, **47**(2): 021101
- 程少园,曹召良,胡立发等. 开环双波段人眼视网膜成像液晶自适应光学系统设计[J]. 激光与光电子学进展, 2010, **47**(2): 021101
- 5 R. J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, **66**(3): 207~211
- 6 Li Xinyang, Jang Wenhan, Wang Chunhong *et al.*. Power spectra analysis of the disturbed wavefront in laser beam horizontal atmospheric propagation I: wavefront overall tilt and Tyler frequency[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(7): 883~889
- 李新阳,姜文汉,王春红等. 激光大气水平传输湍流畸变波前的功率谱分析 I: 波前整体倾斜与泰勒频率[J]. 光学学报, 2000, **20**(7): 883~889
- 7 Ling Ning, Guan Chunlin. The development of deformable mirror[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 1995, **22**(1): 14~22
- 凌宁,官春林. 变形反射镜的发展[J]. 光电工程, 1995, **22**(1): 14~22
- 8 L. Hu, L. Xuan, Y. Liu *et al.*. Phase-only liquid crystal spatial light modulator for wavefront correction with high precision[J]. *Opt. Express*, 2004, **12**(26): 6403~6409
- 9 Y. J. Liu, Z. L. Cao, D. Y. Li *et al.*. Correction for large aberration with phase-only liquid-crystal wavefront corrector [J]. *Opt. Eng.*, 2006, **45**(12): 128001
- 10 Cai Dongmei, Yao Jun, Jiang Wenhan. Performance of liquid-crystal spatial light modulator using for wave-front correction [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(2): 285~291
- 蔡冬梅,姚军,姜文汉. 液晶空间光调制器用于波前校正的性能[J]. 光学学报, 2009, **29**(2): 285~291
- 11 Shi Tao, Huang Ziqiang, Zhang Cuiyu. Liquid crystal spatial light modulator based on BSO[J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(8): 1999~2003
- 石涛,黄子强,张翠玉. 基于BSO的液晶空间光调制器[J]. 中国激光, 2009, **36**(8): 1999~2003
- 12 D. P. Greenwood. Bandwidth specification for adaptive optics systems[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**(3): 390~393
- 13 D. P. Greenwood. Tracking turbulence-induced tilt errors with shared and adjacent apertures[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**(3): 282~289
- 14 G. A. Tyler. Bandwidth considerations for tracking through turbulence[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**(1): 358~367
- 15 E. Kibblewhite, M. Chun. Design of tip-tilt and adaptive optics servos using measured angle-of-arrival and phase power spectra[C]. *SPIE*, 1998, **3353**: 522~530
- 16 Liu Chao, Hu Lifa, Mu Quanquan *et al.*. Bandwidth requirement of adaptive optics system for horizontal turbulence[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2010, **18**(10): 2200~2206
- 刘超,胡立发,穆全全等. 校正水平湍流波面的自适应光学系统带宽需求分析[J]. 光学精密工程, 2010, **18**(10): 2137~2142
- 17 Rao Changhui, Jiang Wenhan, Ning Ling. Temporal power spectra analysis of low-order modes of atmospheric turbulence wavefront[J]. *Acta Optica Sinica*, 1999, **19**(9): 1223~1230
- 饶长辉,姜文汉,凌宁. 大气湍流波前低阶模式的时间功率谱分析[J]. 光学学报, 1999, **19**(9): 1223~1230
- 18 Li Huaqiang, Song Helun, Rao Changhui *et al.*. Extrapolation method to expand dynamic range of Shack-Hartmann wavefront sensor[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2008, **16**(7): 1203~1206
- 李华强,宋贺伦,饶长辉等. 增大夏克-哈特曼波前传感器动态测量范围的方法[J]. 光学精密工程, 2008, **16**(7): 1203~1206