

基于双树复数小波局部高斯模型的彩色图像压缩感知

练秋生 夏长城

(燕山大学信息科学与工程学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要 压缩感知利用图像稀疏表示的先验知识,能从少量的观测值中重构原始图像。目前的压缩感知算法大部分针对灰度图像重构,而对彩色图像的重构问题研究很少。由于彩色图像三通道之间有很高的相关性,简单地将灰度图像重构方法分别应用于彩色图像的三个通道得到的彩色图像重构质量不高。为了提高彩色图像重构质量,利用具有近似的平移不变性特性的双树复数小波作为自然图像的稀疏表示,提出了基于双树复数小波局部高斯模型的彩色图像压缩感知重构算法,该算法在重构时充分利用了彩色图像通道间的互相关性和小波系数的局部邻域统计分布的先验知识。实验结果表明,重构的彩色图像具有较高的峰值信噪比(PSNR)和较好的视觉效果。

关键词 图像处理;压缩感知;双树复数小波;局部高斯模型

中图分类号 TN911.73 文献标识码 A doi: 10.3788/LOP48.101001

Compressed Sensing of Color Images Based on Local Gaussian Model in the Dual-Tree Complex Wavelet

Lian Qiusheng Xia Changcheng

(Institute of Information Science and Technology, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

Abstract Compressed sensing system can reconstruct the original image from fewer measurements using the sparse priors of image. Current research in compressed sensing has devised algorithms for grayscale images, but there are few methods for color images. Since each of the color channels is highly correlated, the result of simply extending the reconstruction algorithm of grayscale images to three channels of color images is not satisfying. Aiming at improving the reconstruction quality of color images, compressed sensing of color images based on local Gaussian model in the dual-tree complex wavelet is proposed, which uses the dual-tree complex wavelet having the property of translation invariance as the sparse representation of natural images. Priors of the inter-cross correlation of three channels of color images and the local neighbor statistic distribution of the wavelet coefficients are applied in reconstruction. Experimental results show that the proposed algorithm can improve the peak signal-to-noise ratio and the visual quality.

Key words image processing; compressed sensing; dual-tree complex wavelet; local Gaussian model

OCIS codes 100.3010; 100.3190; 100.7410

1 引言

目前数字图像获取与传输的典型方法是先以大于等于奈奎斯特抽样率进行采样,然后对图像进行某种稀疏变换[如离散余弦变换(DCT)或小波变换],通过阈值处理只保留一些显著系数,再对显著系数编码后送入信道传输,在接收端对显著系数逆变换可重构近似原始图像。由于高分辨率图像获取所需要的奈奎斯特抽样率越来越高,这就使数据采集端的复杂度加大,硬件难以实现。这个问题使学者们考虑能否在直接减少采样数据量的情况下重构原始信号。回答是肯定的,压缩感知(CS)理论^[1~3]指出只需要很少量的非自适应线性投影,就能够通过非线性解码算法重构原始图像。2006年Donoho^[2]在Candès等^[1]的研究成果基础上提出了压缩感知理论,文献[3]称之为压缩抽样。其本质是直接采样与压缩相结合,在对图像进行随机

收稿日期: 2011-04-08; 收到修改稿日期: 2011-05-26; 网络出版日期: 2011-08-06

基金项目: 国家自然科学基金(61071200,60772079)和河北省自然科学基金(F2010001294)资助课题。

作者简介: 练秋生(1969—),男,博士,教授,博士生导师,主要从事压缩感知、多尺度几何分析和图像处理等方面的研究。

E-mail: lianqs@ysu.edu.cn

投影得到很少量的观测值后,利用图像稀疏表示的先验知识从观测值中恢复高分辨图像的过程。文献[2]的理论结果表明,对于像素数为 N 的 K -稀疏图像,利用 $M=O[K\lg(N/K)]$ 个观测值和 l_1 范数极小化准则即可重构原始图像。

目前大部分压缩感知文献研究灰度图像的重构问题,灰度图像重构算法大致可分为基于贪婪思想的重构算法^[4~6]和基于最优化思想的重构算法^[7~9]两大类,而只有较少的文献研究彩色图像的压缩感知重构^[10,11]的问题。彩色图像重构一个直接的方法是利用灰度图像重构的方法同时对彩色图像的三个通道分别重构,然而这种方法效果并不理想,原因在于彩色图像三通道之间有很高的相关性,因此彩色图像的重构必须利用这种相关性才能获得较好的重构效果。

在压缩感知系统中,图像的稀疏表示是影响图像重构质量的关键因素之一,目前压缩感知图像重构中普遍使用正交小波作为图像的基函数,但由于普通正交小波方向选择性差,并且不具有平移不变性,而平移不变性对图像重构具有重要影响,普通的正交小波不是自然图像的最优表示。本文算法采用具有近似平移不变性的双树复数小波^[12,13]作为压缩感知系统中图像的稀疏表示。

为了提高彩色图像压缩感知的重构质量,利用局部高斯模型(LGM)对各个子带系数进行贝叶斯框架下的最大后验概率(MAP)估计,结合彩色图像 RGB 三通道之间的相关性,构造出一种新的彩色阈值算子,提出了基于双树复数小波局部高斯模型的彩色图像压缩感知重构算法。实验结果表明,本文算法具有更高的图像重构质量。

2 灰度图像压缩感知

在文献[2,14,15]中通过求解下列优化问题从随机投影中重构原始灰度图像:

$$\min \|\alpha\|_1 \quad s.t. \quad y = \Phi\Psi\alpha. \quad (1)$$

利用拉普拉斯乘子法可将(1)式转化为无约束的优化问题:

$$\hat{\alpha} = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|y - \Phi\Psi\alpha\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_1. \quad (2)$$

参数 λ 的作用是平衡目标函数中两部分所占的比重,式中 α 为稀疏变换系数所组成的向量, y 为随机投影得到的观测值向量, Φ 为随机投影矩阵, Ψ 的每一列对应图像稀疏变换的一个基函数,且 Φ 与 Ψ 不相干。求出最优解 $\hat{\alpha}$ 后,对 $\hat{\alpha}$ 进行稀疏逆变换获得重构图像。(2)式的物理意义为在符合观测值 $y = \Phi\Psi\alpha$ 的条件下,最稀疏解就是最优解。用迭代阈值法^[16]求解(2)式可表示为

$$\alpha^{j+1} = H_s[\alpha^j + \Psi^T\Phi^T(y - \Phi\Psi\alpha^j)], \quad (3)$$

式中 j 表示迭代次数, Φ 可以通过随机置乱离散余弦变换(PDCT)算法或 noiselet^[17]变换实现(PDCT 图像重构性能略优于 noiselet,采取 PDCT 算法实现随机投影), Φ^T 表示逆 PDCT(IPDCT), Ψ 表示双树复数小波逆变换(IDTCWT), Ψ^T 表示双树复数小波变换(DTCWT)。迭代阈值法的本质是利用前一次的估计值和变换域的阈值算子来获得新的估计值,经多次迭代获得最优解。通常采用的软阈值或硬阈值算子分别为

$$H_s(x) = \operatorname{sign}(x) \cdot \max(|x| - t_h, 0), \quad (4)$$

$$H_h(x) = \begin{cases} x, & |x| > t_h \\ 0, & |x| < t_h \end{cases}, \quad (5)$$

式中 t_h 表示阈值。软阈值算子的阈值 $t_h = \tau \cdot \sigma_N$, σ_N 是噪声强度估计值, τ 为多次实验后的最优值,硬阈值算子的阈值 $t_h = 3 \cdot \sigma_N$ 。软阈值或硬阈值算子仅与当前变换系数自身有关,而没有考虑到邻域中与其他系数的关系。构造出一种新的彩色阈值算子,并用其替代软阈值或硬阈值算子,利用迭代阈值法完成彩色图像重构。

3 基于双树复数小波局部高斯模型的彩色图像压缩感知

3.1 彩色阈值算子构造

为便于描述,记 $\alpha_{\text{rgb}} = [\alpha_r^T \alpha_g^T \alpha_b^T]^T$, $y_{\text{rgb}} = [y_r^T y_g^T y_b^T]^T$, 其中 y_r , y_g 和 y_b 分别为彩色图像 RGB 三通道的观测值, α_r , α_g 和 α_b 分别为待重构的小波系数向量。 σ_{nr}^2 , σ_{ng}^2 和 σ_{nb}^2 分别为彩色图像 RGB 三通道的噪声方差, σ_{ri}^2 , σ_{gi}^2 和 σ_{bi}^2 分别为 RGB 三通道双树复数小波变换系数的局部邻域方差, σ_{ri-gi}^2 , σ_{ri+gi}^2 , σ_{ri-bi}^2 , σ_{ri+bi}^2 , σ_{bi-gi}^2 和 σ_{bi+gi}^2 分别

为待估计的 R-G, R+G, R-B, R+B, B-G 和 B+G 六个色差及色和通道双树复数小波变换系数的局部邻域方差。

利用迭代阈值法实现彩色图像重构时,每次迭代时要进行反向投影: $\mathbf{z}_{\text{rgb}} = \boldsymbol{\alpha}_{\text{rgb}}^j + \Psi^T \Phi^T (\mathbf{y}_{\text{rgb}} - \Phi \Psi \boldsymbol{\alpha}_{\text{rgb}}^j)$, 获得的估计值 \mathbf{z}_{rgb} 与真实值之间存在一个误差 \mathbf{n}_{rgb} , 该误差可近似为高斯白噪声, 则估计值 \mathbf{z}_{rgb} 与真实值 $\boldsymbol{\alpha}_{\text{rgb}}$ 关系为: $\mathbf{z}_{\text{rgb}} = \boldsymbol{\alpha}_{\text{rgb}} + \mathbf{n}_{\text{rgb}}$ 。由最大后验概率法得

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{rgb}} = \underset{\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_g, \boldsymbol{\alpha}_b}{\operatorname{argmax}} f(\boldsymbol{\alpha}_{\text{rgb}} | \mathbf{z}_{\text{rgb}}), \quad (6)$$

式中 $f(\boldsymbol{\alpha}_{\text{rgb}} | \mathbf{z}_{\text{rgb}})$ 为条件概率密度。

由贝叶斯公式得

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{rgb}} = \underset{\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_g, \boldsymbol{\alpha}_b}{\operatorname{argmax}} \{f(\mathbf{z}_{\text{rgb}} | \boldsymbol{\alpha}_{\text{rgb}}) f(\boldsymbol{\alpha}_{\text{rgb}}) / f(\mathbf{z}_{\text{rgb}})\}, \quad (7)$$

式中 $f(\boldsymbol{\alpha}_{\text{rgb}})$ 和 $f(\mathbf{z}_{\text{rgb}})$ 分别为 $\boldsymbol{\alpha}_{\text{rgb}}$ 和 \mathbf{z}_{rgb} 的概率密度。对上式右边取对数得

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{rgb}} = \underset{\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_g, \boldsymbol{\alpha}_b}{\operatorname{argmax}} \{ \ln f(\mathbf{z}_{\text{rgb}} | \boldsymbol{\alpha}_{\text{rgb}}) + \ln f(\boldsymbol{\alpha}_{\text{rgb}}) - \ln f(\mathbf{z}_{\text{rgb}}) \}. \quad (8)$$

由于 \mathbf{n}_{rgb} 符合正态分布, 因此有

$$\begin{cases} f(\mathbf{z}_r | \boldsymbol{\alpha}_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{nr}}} \exp\left\{-\frac{\|\mathbf{z}_r - \boldsymbol{\alpha}_r\|_2^2}{2\sigma_{\text{nr}}^2}\right\} \\ f(\mathbf{z}_g | \boldsymbol{\alpha}_g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{ng}}} \exp\left\{-\frac{\|\mathbf{z}_g - \boldsymbol{\alpha}_g\|_2^2}{2\sigma_{\text{ng}}^2}\right\} \\ f(\mathbf{z}_b | \boldsymbol{\alpha}_b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{nb}}} \exp\left\{-\frac{\|\mathbf{z}_b - \boldsymbol{\alpha}_b\|_2^2}{2\sigma_{\text{nb}}^2}\right\} \end{cases} \quad (9)$$

为便于推导, 先假设彩色图像 RGB 三通道之间相互独立, 则有

$$f(\mathbf{z}_{\text{rgb}} | \boldsymbol{\alpha}_{\text{rgb}}) = f(\mathbf{z}_r | \boldsymbol{\alpha}_r) f(\mathbf{z}_g | \boldsymbol{\alpha}_g) f(\mathbf{z}_b | \boldsymbol{\alpha}_b). \quad (10)$$

无论是小波变换还是双树复数小波变换, 图像的每个通道的变换系数之间虽然近似不相关, 但它们不是统计独立的。如果某个系数为显著系数, 则其邻域有显著系数的概率较大, 反之亦然。为了利用变换系数的局部邻域统计特性, 采用局部高斯模型^[18]作为自然图像的先验模型, 即向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的每一个分量 α_i 均符合局部高斯分布:

$$f(\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{i=1}^N f(\alpha_i) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left\{-\frac{\alpha_i^2}{2\sigma_i^2}\right\}, \quad (11)$$

式中 σ_i^2 为 α_i 的局部方差。将(10), (11)式代入(8)式, 并去掉常数项得

$$\begin{aligned} [\hat{\boldsymbol{\alpha}}_r \hat{\boldsymbol{\alpha}}_g \hat{\boldsymbol{\alpha}}_b] &= \underset{\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_g, \boldsymbol{\alpha}_b}{\operatorname{argmax}} \left\{ -\frac{1}{\sigma_{\text{nr}}^2} \|\mathbf{z}_r - \boldsymbol{\alpha}_r\|_2^2 - \frac{1}{\sigma_{\text{ng}}^2} \|\mathbf{z}_g - \boldsymbol{\alpha}_g\|_2^2 - \frac{1}{\sigma_{\text{nb}}^2} \|\mathbf{z}_b - \boldsymbol{\alpha}_b\|_2^2 - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\alpha_{ri}^2}{\sigma_{ri}^2} + \frac{\alpha_{gi}^2}{\sigma_{gi}^2} + \frac{\alpha_{bi}^2}{\sigma_{bi}^2} \right) \right\} = \\ & \underset{\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_g, \boldsymbol{\alpha}_b}{\operatorname{argmax}} \left\{ -\frac{1}{\sigma_{\text{nr}}^2} \|\mathbf{z}_r - \boldsymbol{\alpha}_r\|_2^2 - \frac{1}{\sigma_{\text{ng}}^2} \|\mathbf{z}_g - \boldsymbol{\alpha}_g\|_2^2 - \right. \\ & \left. \frac{1}{\sigma_{\text{nb}}^2} \|\mathbf{z}_b - \boldsymbol{\alpha}_b\|_2^2 - (\|\mathbf{W}_r \boldsymbol{\alpha}_r\|_2^2 + \|\mathbf{W}_g \boldsymbol{\alpha}_g\|_2^2 + \|\mathbf{W}_b \boldsymbol{\alpha}_b\|_2^2) \right\}, \quad (12) \end{aligned}$$

式中 \mathbf{W}_r 为一对角矩阵, $\mathbf{W}_r = \operatorname{diag}[\omega_{r1}, \omega_{r2}, \dots, \omega_{rN}] = \operatorname{diag}\left[\frac{1}{\sigma_{r1}}, \frac{1}{\sigma_{r2}}, \dots, \frac{1}{\sigma_{rN}}\right]$, ω_{ri} 为每一个分量 α_{ri} 的局部方差的倒数, $\|\mathbf{W}_r \boldsymbol{\alpha}_r\|_2$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}_r$ 的加权 l_2 范数。 ω_g, ω_b 和 $\mathbf{W}_g, \mathbf{W}_b$ 的定义与之类似。(12)式成立的前提是彩色图像 RGB 三通道之间相互独立, 但是彩色图像 RGB 三通道之间本身存在很高的相关性。文献[19, 20]为了利用 RGB 通道间的相关性, 将色差以及色和通道变换系数的 l_0 范数加入到用于彩色图像去噪的代价函数中。受文献[19, 20]启发, 将色差及色和通道的加权 l_2 范数引入到(12)式, 其中色差通道(如 R-G)的加权 l_2 范数保留了三基色彩色信号相互之间在相位上发生相同的不连续变化的彩色尖锐边缘能量, 而色和通道(如 R+G)的加权 l_2 范数则保留了具有相反的不连续变化(即一个基色信号相位不连续增加而其他基色信号相位不连续减少)的彩色尖锐边缘能量。因此, R-G, R+G, R-B, R+B, B-G 和 B+G 通道系数的加权 l_2 范数能够体现彩色图像 RGB 三通道间的相关性。考虑色差与色和通道的影响, (12)式改写为

$$[\hat{\alpha}_r, \hat{\alpha}_g, \hat{\alpha}_b] = \operatorname{argmax}_{\alpha_r, \alpha_g, \alpha_b} \left\{ -\frac{1}{\sigma_{nr}^2} \|\mathbf{z}_r - \alpha_r\|_2^2 - \frac{1}{\sigma_{ng}^2} \|\mathbf{z}_g - \alpha_g\|_2^2 - \frac{1}{\sigma_{nb}^2} \|\mathbf{z}_b - \alpha_b\|_2^2 - (\|\mathbf{W}_r \alpha_r\|_2^2 + \|\mathbf{W}_g \alpha_g\|_2^2 + \|\mathbf{W}_b \alpha_b\|_2^2 + \|\mathbf{W}_{r-g}(\alpha_r - \alpha_g)\|_2^2 + \|\mathbf{W}_{r+g}(\alpha_r + \alpha_g)\|_2^2 + \|\mathbf{W}_{r-b}(\alpha_r - \alpha_b)\|_2^2 + \|\mathbf{W}_{r+b}(\alpha_r + \alpha_b)\|_2^2 + \|\mathbf{W}_{b-g}(\alpha_b - \alpha_g)\|_2^2 + \|\mathbf{W}_{b+g}(\alpha_b + \alpha_g)\|_2^2) \right\}, \quad (13)$$

将(13)式括号中的负号去掉得:

$$[\hat{\alpha}_r, \hat{\alpha}_g, \hat{\alpha}_b] = \operatorname{argmax}_{\alpha_r, \alpha_g, \alpha_b} \left\{ \frac{1}{\sigma_{nr}^2} \|\mathbf{z}_r - \alpha_r\|_2^2 + \frac{1}{\sigma_{ng}^2} \|\mathbf{z}_g + \alpha_g\|_2^2 - \frac{1}{\sigma_{nb}^2} \|\mathbf{z}_b - \alpha_b\|_2^2 + \|\mathbf{W}_r \alpha_r\|_2^2 + \|\mathbf{W}_g \alpha_g\|_2^2 + \|\mathbf{W}_b \alpha_b\|_2^2 + \|\mathbf{W}_{r-g}(\alpha_r + \alpha_g)\|_2^2 + \|\mathbf{W}_{r+g}(\alpha_r + \alpha_g)\|_2^2 + \|\mathbf{W}_{r-b}(\alpha_r - \alpha_b)\|_2^2 + \|\mathbf{W}_{r+b}(\alpha_r + \alpha_b)\|_2^2 + \|\mathbf{W}_{b-g}(\alpha_b - \alpha_g)\|_2^2 + \|\mathbf{W}_{b+g}(\alpha_b + \alpha_g)\|_2^2 \right\}. \quad (14)$$

在上面的优化方程中,代价函数是严格凸且可微的,并且各分量都是可分离的,因此上式等价于同时优化系数向量 α_r, α_g 和 α_b 中每一个分量 α_{ri}, α_{gi} 和 α_{bi} :

$$\hat{\alpha}_{ri} = \operatorname{argmin}_{\alpha_{ri}} \left\{ \frac{1}{\sigma_{nr}^2} (z_{ri} - \alpha_{ri})^2 + \frac{\alpha_{ri}^2}{\sigma_{ri}^2} + \frac{(\alpha_{ri} - \alpha_{gi})^2}{\sigma_{ri-gi}^2} + \frac{(\alpha_{ri} + \alpha_{gi})^2}{\sigma_{ri+gi}^2} + \frac{(\alpha_{ri} - \alpha_{bi})^2}{\sigma_{ri-bi}^2} + \frac{(\alpha_{ri} + \alpha_{bi})^2}{\sigma_{ri+bi}^2} \right\}, \quad (15)$$

$$\hat{\alpha}_{gi} = \operatorname{argmin}_{\alpha_{gi}} \left\{ \frac{1}{\sigma_{ng}^2} (z_{gi} - \alpha_{gi})^2 + \frac{\alpha_{gi}^2}{\sigma_{gi}^2} + \frac{(\alpha_{ri} - \alpha_{gi})^2}{\sigma_{ri-gi}^2} + \frac{(\alpha_{ri} + \alpha_{gi})^2}{\sigma_{ri+gi}^2} + \frac{(\alpha_{bi} - \alpha_{gi})^2}{\sigma_{bi-gi}^2} + \frac{(\alpha_{bi} + \alpha_{gi})^2}{\sigma_{bi+gi}^2} \right\}, \quad (16)$$

$$\hat{\alpha}_{bi} = \operatorname{argmin}_{\alpha_{bi}} \left\{ \frac{1}{\sigma_{nb}^2} (z_{bi} - \alpha_{bi})^2 + \frac{\alpha_{bi}^2}{\sigma_{bi}^2} + \frac{(\alpha_{ri} - \alpha_{bi})^2}{\sigma_{ri-bi}^2} + \frac{(\alpha_{ri} + \alpha_{bi})^2}{\sigma_{ri+bi}^2} + \frac{(\alpha_{bi} - \alpha_{gi})^2}{\sigma_{bi-gi}^2} + \frac{(\alpha_{bi} + \alpha_{gi})^2}{\sigma_{bi+gi}^2} \right\}. \quad (17)$$

对 α_{ri}, α_{gi} 和 α_{bi} 求偏导并令其为0,可求解上述优化问题:

$$-\frac{z_{ri} - \alpha_{ri}}{\sigma_{nr}^2} + \frac{\alpha_{ri}}{\sigma_{ri}^2} + \frac{\alpha_{ri} - \alpha_{gi}}{\sigma_{ri-gi}^2} + \frac{\alpha_{ri} + \alpha_{gi}}{\sigma_{ri+gi}^2} + \frac{\alpha_{ri} - \alpha_{bi}}{\sigma_{ri-bi}^2} + \frac{\alpha_{ri} + \alpha_{bi}}{\sigma_{ri+bi}^2} = 0, \quad (18)$$

$$-\frac{z_{gi} - \alpha_{gi}}{\sigma_{ng}^2} + \frac{\alpha_{gi}}{\sigma_{gi}^2} - \frac{\alpha_{ri} - \alpha_{gi}}{\sigma_{ri-gi}^2} + \frac{\alpha_{ri} + \alpha_{gi}}{\sigma_{ri+gi}^2} - \frac{\alpha_{bi} - \alpha_{gi}}{\sigma_{bi-gi}^2} + \frac{\alpha_{bi} + \alpha_{gi}}{\sigma_{bi+gi}^2} = 0, \quad (19)$$

$$-\frac{z_{bi} - \alpha_{bi}}{\sigma_{nb}^2} + \frac{\alpha_{bi}}{\sigma_{bi}^2} - \frac{\alpha_{ri} - \alpha_{bi}}{\sigma_{ri-bi}^2} + \frac{\alpha_{ri} + \alpha_{bi}}{\sigma_{ri+bi}^2} + \frac{\alpha_{bi} - \alpha_{gi}}{\sigma_{bi-gi}^2} + \frac{\alpha_{bi} + \alpha_{gi}}{\sigma_{bi+gi}^2} = 0. \quad (20)$$

(18)~(20)式合并同类项得

$$\left(\frac{1}{\sigma_{nr}^2} + \frac{1}{\sigma_{ri}^2} + \frac{1}{\sigma_{ri-gi}^2} + \frac{1}{\sigma_{ri+gi}^2} + \frac{1}{\sigma_{ri-bi}^2} + \frac{1}{\sigma_{ri+bi}^2} \right) \alpha_{ri} + \left(\frac{1}{\sigma_{ri+gi}^2} - \frac{1}{\sigma_{ri-gi}^2} \right) \alpha_{gi} + \left(\frac{1}{\sigma_{ri+bi}^2} - \frac{1}{\sigma_{ri-bi}^2} \right) \alpha_{bi} = \frac{z_{ri}}{\sigma_{nr}^2}, \quad (21)$$

$$\left(\frac{1}{\sigma_{ri+gi}^2} - \frac{1}{\sigma_{ri-gi}^2} \right) \alpha_{ri} + \left(\frac{1}{\sigma_{ng}^2} + \frac{1}{\sigma_{gi}^2} + \frac{1}{\sigma_{ri-gi}^2} + \frac{1}{\sigma_{ri+gi}^2} + \frac{1}{\sigma_{bi-gi}^2} + \frac{1}{\sigma_{bi+gi}^2} \right) \alpha_{gi} + \left(\frac{1}{\sigma_{bi+gi}^2} - \frac{1}{\sigma_{bi-gi}^2} \right) \alpha_{bi} = \frac{z_{gi}}{\sigma_{ng}^2}, \quad (22)$$

$$\left(\frac{1}{\sigma_{ri+bi}^2} - \frac{1}{\sigma_{ri-bi}^2} \right) \alpha_{ri} + \left(\frac{1}{\sigma_{bi+gi}^2} - \frac{1}{\sigma_{bi-gi}^2} \right) \alpha_{gi} + \left(\frac{1}{\sigma_{nb}^2} + \frac{1}{\sigma_{bi}^2} + \frac{1}{\sigma_{ri-bi}^2} + \frac{1}{\sigma_{ri+bi}^2} + \frac{1}{\sigma_{bi-gi}^2} + \frac{1}{\sigma_{bi+gi}^2} \right) \alpha_{bi} = \frac{z_{bi}}{\sigma_{nb}^2}. \quad (23)$$

将(21)~(23)式写成矩阵的形式:

$$\mathbf{A} [\alpha_{ri} \quad \alpha_{gi} \quad \alpha_{bi}]^T = \begin{bmatrix} \frac{z_{ri}}{\sigma_{nr}^2} & \frac{z_{gi}}{\sigma_{ng}^2} & \frac{z_{bi}}{\sigma_{nb}^2} \end{bmatrix}^T, \quad (24)$$

式中 \mathbf{A} 为彩色图像三通道噪声方差及每一个 α_{ri}, α_{gi} 和 α_{bi} 分量的局部方差以及色差与色和通道双树复数小波变换系数的局部方差所组成的大小为 3×3 的矩阵,解上式得:

$$[\alpha_{ri} \quad \alpha_{gi} \quad \alpha_{bi}]^T = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{z_{ri}}{\sigma_{nr}^2} & \frac{z_{gi}}{\sigma_{ng}^2} & \frac{z_{bi}}{\sigma_{nb}^2} \end{bmatrix}^T, \quad (25)$$

(25)式右边即为彩色阈值算子 $H_c(\cdot)$ 。在对彩色图像进行迭代重构时,将(3)式变为下列形式: $\alpha_{rgb}^{j+1} = H_c(\mathbf{z}_{rgb})$, 其中 $\mathbf{z}_{rgb} = \alpha_{rgb}^j + \Psi^T \Phi^T (\mathbf{y}_{rgb} - \Phi \Psi \alpha_{rgb}^j)$ 。由(21)~(23)式可以看出,构造的彩色阈值算子充分利用了彩色图像 RGB 三通道之间及色差与色和通道的互相关性和变换系数的局部邻域统计特性的先验知识,在彩色图像压缩感知重构时,迭代过程中图像变换系数利用了上述方式更新,因此可得到较高的图像质量。

3.2 参数估计

彩色阈值算子 $H_c(\cdot)$ 的求解需要估计出彩色图像 RGB 三通道的噪声方差及其他通道变换系数的每一个分量的局部方差。以彩色图像 R 通道为例,利用稳健中值算子估计噪声方差 σ_{nr}^2 :

$$\hat{\sigma}_{nr}^2 = \frac{\text{median}(|\alpha_r|)}{0.6745}, \quad (26)$$

式中 α_r 表示彩色图像 R 通道 HH 子带的小波系数。估计 σ_r^2 时先生成方差为 $\hat{\sigma}_{nr}^2$ 的纯噪声图像 P , 再对 P 进行双树复数小波变换, 由各子带小波系数的能量获得双树复数小波系数的噪声方差 $\hat{\sigma}_{nd}^2$, 最后利用文献[18]中 LAWMAP 估计算法计算双树复数小波变换系数的局部方差:

$$\hat{\sigma}_{ri}^2 = \max\left(0, \frac{S}{4\gamma} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{8\gamma}{S^2} \sum_{k \in N(i)} c_n^2(k)} \right] - \hat{\sigma}_{nd}^2 \right), \quad (27)$$

式中 $N(i)$ 表示以 i 为中心的 7×7 邻域, $c_n(k)$ 表示 $N(i)$ 内各系数, S 为 $N(i)$ 中小波系数的总数, 参数 γ 的估计方法为文献[18]中的估计方法。其他参数如 $\hat{\sigma}_{ng}^2$, ω_{bi}^2 和 ω_{ri-gi}^2 等均可用上述相同方法估计, 并用估计得到的近似值替代(21)~(23)式中的理论值。

3.3 算法实现

在通过 PDCT 得到观测值 \mathbf{y}_{rgb} 后, 利用这一观测值重构彩色图像, 具体步骤如下。

1) 初始化, 迭代次数 $j = 1$, 图像初始化 $\mathbf{x}_{rgb}^j = [0 \ 0 \ 0]^T$, 设定迭代终止值 ϵ 和最大迭代次数 $j_{\max} = 100$;

2) 开始迭代, 计算后向投影:

$$\mathbf{x}_{rgb}^{j+1} = \mathbf{x}_{rgb}^j + \Phi^T(\mathbf{y}_{rgb} - \Phi \mathbf{x}_{rgb}^j). \quad (28)$$

3) 稀疏变换, 对 \mathbf{x}_{rgb}^j 进行 DTCWT 变换, 得到变换系数 \mathbf{z}_{rgb}^j ;

4) 系数更新, 利用(26), (27)式分别估计噪声方差和局部方差, 再利用(25)式定义的彩色阈值算子对变换系数 \mathbf{z}_{rgb}^j 进行处理, 得到更新系数 $\alpha_{rgb}^j: [\alpha_{ri}^j \ \alpha_{gi}^j \ \alpha_{bi}^j]^T = \mathbf{A}^{-1} \left[\begin{matrix} \hat{z}_{ri}^j & \hat{z}_{gi}^j & \hat{z}_{bi}^j \\ \hat{\sigma}_{nr}^2 & \hat{\sigma}_{ng}^2 & \hat{\sigma}_{nb}^2 \end{matrix} \right]^T$;

5) 反变换, $\mathbf{x}_{rgb}^{j+1} = \Psi^T \alpha_{rgb}^j$;

6) 迭代更新, 若 $j > j_{\max}$ 或 $\|\mathbf{x}_{rgb}^{j+1} - \mathbf{x}_{rgb}^j\|_2 < \epsilon$, 则算法结束, 否则进行如下更新, $\mathbf{x}_{rgb}^{j+1} \leftarrow \mathbf{x}_{rgb}^j, j \leftarrow j + 1$, 转到 2) 继续。

4 实验结果

为了与文献[10, 11]中的实验结果比较, 在实验中选用图像尺寸大小均为 $512 \text{ pixel} \times 512 \text{ pixel}$ 的 Barbara, Lena, Peppers 和 Zelda 四幅标准彩色图像(图 1)来比较各种算法重构彩色图像性能。



图 1 标准彩色测试图像。(a) Barbara 原图像; (b) Lena 原图像; (c) Peppers 原图像; (d) Zelda 原图像

Fig. 1 Standard color test images. (a) Barbara original image; (b) Lena original image; (c) Peppers original image; (d) Zelda original image

表 1 列出了在 30%, 20% 和 10% 三种不同的抽样率(等于抽样点数除以像素数)下 5 种方法重构的彩色图像的峰值信噪比(PSNR)。彩色图像的 PSNR 值计算公式为

$$P_{\text{SNR}} = 10 \lg \frac{255^2}{\frac{1}{UV} \left\{ \sum_{k=1}^3 \sum_{s=1}^U \sum_{t=1}^V [Q_k(s, t) - \hat{Q}_k(s, t)]^2 \right\} / 3}, \quad (29)$$

式中 U 和 V 分别为图像的行数和列数, $Q_k(s, t)$ 和 $\hat{Q}_k(s, t)$ 分别表示原图像和重构图像的像素值, $k = 1, 2, 3$ 分别表示彩色图像 RGB 三个通道。

文献[10]中利用二维 DCT 作为图像的基,采用最小化全变差方法从观测值中利用联合稀疏模型同时重构彩色图像的 RGB 三个通道,完成彩色图像压缩感知重构,但是重构彩色图像的 PSNR 较低。文献[11]利用群稀疏表示彩色图像三通道之间的相关性,提出了两种基于群稀疏的非凸优化方法完成彩色图像的重构,一种是利用迭代加权最小二乘求解非凸优化问题,另一种是利用光滑 $l_{2,1}$ 范数极小化求解非凸优化问题,这两种方法均比文献[10]取得更好的重构效果。DTCWT-hard 为彩色图像 RGB 三通道进行 DTCWT 变换后分别对各通道变换系数的模值进行迭代硬阈值处理重构彩色图像的算法;DTCWT-soft 算法与 DTCWT-hard 算法类似,表示使用软阈值算子替代硬阈值算子重构彩色图像的方法;DTCWT-soft 算法与 DTCWT-hard 算法均未利用彩色图像三通道之间的相关性,因此重构彩色图像质量不高;DTCWT-LGM 为彩色图像压缩感知重构算法,充分利用了彩色图像三通道及色差与色和通道的互相关性,因此重构彩色图像质量较高。

表 1 为各种重构算法的质量比较,Aver 表示同一种算法不同抽样率时重构彩色图像的 PSNR 的平均值,粗体数据表示 PSNR 最大值。从表 1 中可以看出,只有抽样率为 30%时,DTCWT-hard 重构 Peppers 彩色图像的 PSNR 值比 DTCWT-LGM 高 0.34 dB;在其他情况下,DTCWT-LGM 重构彩色图像 PSNR 值最高。

表 1 彩色图像压缩感知重构质量的比较

Table 1 Reconstructed color image quality comparison for the five compressed sensing algorithms

Color image	Sampling rate	30%	20%	10%	Aver
Barbara	[10]	28.76	27.07	25.13	26.99
	[11]	29.98	28.51	26.69	28.39
	DTCWT-soft	25.73	24.07	22.31	24.04
	DTCWT-hard	29.23	26.89	22.85	26.32
	DTCWT-LGM	33.56	31.62	27.32	30.83
Lena	[10]	30.03	28.31	26.12	28.15
	[11]	31.69	29.72	27.61	29.67
	DTCWT-soft	31.92	30.12	27.33	29.79
	DTCWT-hard	33.76	32.50	28.64	31.63
	DTCWT-LGM	34.42	33.46	30.71	32.86
Peppers	[10]	29.76	27.09	24.89	27.25
	[11]	31.38	28.53	26.30	28.74
	DTCWT-soft	30.81	29.34	26.60	28.92
	DTCWT-hard	32.35	31.31	27.31	30.32
	DTCWT-LGM	32.01	31.35	28.95	30.77
Zelda	[10]	28.82	27.00	25.06	26.96
	[11]	31.06	28.54	26.30	28.63
	DTCWT-soft	34.75	33.14	30.41	32.77
	DTCWT-hard	36.76	35.63	30.78	34.39
	DTCWT-LGM	38.23	37.23	34.34	36.60

图 2 给出了表 1 中 DTCWT-hard, DTCWT-soft 和 DTCWT-LGM 三种方法在抽样率为 20%时对 Barbara 彩色图像重构的结果(为便于观察细节,只显示了 Barbara 的局部放大图像)。从图 2 中可以看出,软阈值处理相对平滑,但会造成边缘模糊失真。硬阈值与软阈值方法相比,其图像更加清晰,但是图像左上方的纹理细节不清楚。DTCWT-LGM 重构的彩色图像比硬阈值的视觉效果好,保留的纹理细节更多,与原始图像最逼近。

5 结 论

目前压缩感知算法大部分针对灰度图像重构,而对彩色图像重构问题研究很少。利用小波系数的局部邻域统计与彩色图像 RGB 三通道之间相关性的先验知识,构造出一种新的彩色阈值算子,提出了基于双树

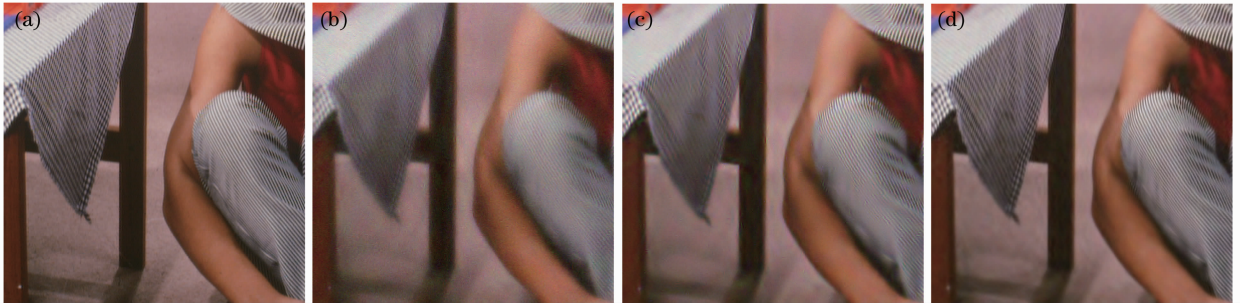


图 2 不同算法 Barbara 彩色图像的重构结果。(a)原图像;(b) DTCWT-soft 算法;(c) DTCWT-hard 算法;
(d) DTCWT-LGM 算法

Fig. 2 There reconstruction results of the Barbara color image based on different algorithms. (a) Original image;
(b) DTCWT-soft algorithm; (c) DTCWT-hard algorithm; (d) DTCWT-LGM algorithm

复数小波局部高斯模型的彩色图像压缩感知重构算法,对四幅标准彩色测试图像进行重构的实验结果表明,重构的彩色图像,在客观指标 PSNR 和主观视觉效果两方面均有很大提高。

参 考 文 献

- 1 Candès E. J., Romberg J., Tao T.. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(2): 489~509
- 2 Donoho D. L.. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(4): 1289~1306
- 3 Candès E. J.. Compressive sampling[C]. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 2006. 1433~1452
- 4 Donoho D. L., Tsai Y., Starck J. L.. Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit [R]. Stanford University Technical Report, 2006. 1~6
- 5 Needell D., Vershynin R.. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit [J]. *Foundations of Computational Mathematics*, 2009, **9**(3): 317~334
- 6 Gao Rui, Zhao Ruizhen, Hu Shaohai. Variable step size adaptive matching pursuit algorithm for image reconstruction based on compressive sensing[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(6): 1639~1644
高睿, 赵瑞珍, 胡绍海. 基于压缩感知的变步长自适应匹配追踪重建算法[J]. *光学学报*, 2010, **30**(6): 1639~1644
- 7 Chartrand R.. Exact reconstruction of sparse signals via nonconvex minimization[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, **14**(10): 707~710
- 8 Chartrand R., Wotao Y.. Iteratively reweighted algorithms for compressive sensing[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2008. 3869~3872
- 9 Blumensath T., Davies M. E.. Iterative thresholding for sparse approximations [J]. *J. Fourier Analysis and Applications*, 2008, **14**(5): 629~654
- 10 Nagesh P., Li B. X.. Compressive imaging of color images[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2009. 1261~1264
- 11 Majumdar A., Ward R. K.. Compressed sensing of color images[J]. *Signal Processing*, 2010, **90**(12): 3122~3127
- 12 Kingsbury N. G.. The dual-tree complex wavelet transform: a new efficient tool for image restoration and enhancement [C]. Proceedings of European Signal Processing Conference, 1998. 319~322
- 13 Selesnick I. W., Baraniuk R. G., Kingsbury N. G.. The dual tree complex wavelet transform[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2005, **22**(6): 123~151
- 14 Baraniuk R. G.. Compressive sensing[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, **24**(4): 118~121
- 15 Tsai Y., Donoho D. L.. Extensions of compressed sensing[J]. *Signal Processing*, 2006, **86**(3): 549~571
- 16 Daubechies I., Defrise M., Mol C. D.. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2004, **56**(11): 1413~1457
- 17 Coifman R., Geshwind F., Meyer Y.. Noiselets[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2001, **10**(1): 27~44
- 18 Mihcak M. K., Kozintsev I., Ramchandran K. et al.. Low complexity image denoising based on statistical modeling of wavelet coefficients[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1999, **6**(12): 300~303
- 19 Satio T., Komatsu T.. Total-variation approach and wavelet shrinkage for color-image denoising with inter-channel color

- cross-correlations[C]. Proceeding of the 3rd IEEE International Symposium on Communication, Control and Signal Processing, 2008. 494~449
- 20 Saito T. , Ueda Y. , Fujii N. *et al.*. Hard color-shrinkage for color-image processing of a digital color camera[C]. *SPIE*, 2010, **7537**: 75370Q