

# 非傍轴标量高斯光束传输特性的研究

刘彩霞 邓小玖\* 牛国鉴 张静

(合肥工业大学物理系, 安徽 合肥 230009)

**摘要** 基于非傍轴标量光束横截面上光强的精确定义,对桶中功率(PIB)和二阶矩定义的非傍轴标量高斯光束的束宽、远场发散角和  $M^2$  因子等进行了详细的数值计算,并与傍轴标量高斯光束的传输特性进行了比较。结果表明,桶中功率定义的远场发散角和  $M^2$  因子较二阶矩定义的小,两种定义的  $M^2$  因子都随束腰趋于零而趋向于零。束腰参量  $\omega_0$  较小时三种定义的光束束宽、远场发散角和  $M^2$  因子存在较大差别,随着  $\omega_0$  的增大三种定义的光束参量趋于一致。指出了非傍轴标量高斯光束功率密度二阶矩及传统光强二阶矩理论的有效性与束腰参量  $\omega_0$  的关系,这对非傍轴光束传输特性的研究具有参考价值。

**关键词** 物理光学;传输特性;二阶矩;桶中功率;非傍轴高斯光束

中图分类号 O463.1

OCIS 260.0260 260.1960 260.2160

文献标识码 A

## Propagation Characteristics of Nonparaxial Scalar Gaussian Beams

Liu Caixia Deng Xiaojie\* Niu Guojian Zhang Jing

(Department of Physics, Hefei University of Technology, Hefei, Anhui 230009, China)

**Abstract** Based on the accurate definition of light intensity of nonparaxial scalar beam at the transverse plane, a detailed numerical calculation of the beam widths, far-field divergence angles, and  $M^2$  factors defined by the power in the bucket (PIB) and second-order moment are performed for nonparaxial scalar Gaussian beams, and the result is compared with that of paraxial scalar Gaussian beams. The results show that the far-field divergence angle and  $M^2$  factor defined by the PIB are less than those defined by second-order moment. Both  $M^2$  factors tend to zero as beam waists vanish. The beam widths, far-field divergence angles, and  $M^2$  factors defined by the three definitions have great differences when the parameter of beam waist  $\omega_0$  is relatively small, and the beam parameters tend to unity with the increasing of  $\omega_0$ . The relationship between the beam waist parameter  $\omega_0$  and the validity of the second-order moment theory of paraxial and nonparaxial scalar Gaussian beams are pointed out. This will provide reference for the study of the propagation characteristics of nonparaxial beams.

**Key words** physical optics; propagation characteristics; second-order moment; power in the bucket; nonparaxial Gaussian beam

## 1 引言

光束的  $M^2$  因子又称光束的质量因子,是激光光束质量评估和控制的理论基础,为合理地比较不同激光系统的光束质量提供了一个统一的标准。基于传统光强二阶矩定义的傍轴标量光束的质量因子  $M^2 \geq 1$ <sup>[1]</sup>,其中基模高斯光束的  $M^2 = 1$ ,具有最好的光束质量。然而,传统光强定义下的二阶矩理论只适用于傍轴标量光束,对于束腰为波长量级,发散角很大的非傍轴标量光束,则存在严重的积分发散问题,必须通过定义功率密度  $J_z$ (又称精确光强)来描述光束横截面上的光强分布及其能量传输特性<sup>[2~7]</sup>。Porras<sup>[8]</sup>指出,非傍轴

收稿日期: 2010-03-24; 收到修改稿日期: 2010-05-24

基金项目: 国家自然科学基金(50776084)和火灾科学国家重点实验室开放课题(HZ2009-KF08)资助课题。

作者简介: 刘彩霞(1975—),女,硕士,讲师,主要从事衍射光学和光束传输理论等方面的研究。

E-mail: hgdlucaixia@163.com

\* 通信联系人。E-mail: dengxjxls@sina.com

标量光束功率密度二阶矩在自由空间中的传播满足双曲线规律,  $M^2$  因子可以小于 1, 其物理意义还有待于进一步研究。另一方面, 在实际工作中, 桶中功率(PIB)常被用来描述光束的能量集中度及其能量传输特性<sup>[9~11]</sup>。本文以非傍轴标量高斯光束在自由空间中的传输为例, 对精确光强二阶矩和 PIB 定义下的光束束宽、远场发散角以及  $M^2$  因子等进行了详细的数值计算和比较分析。

## 2 精确光强二阶矩定义下的非傍轴标量高斯光束的传输特性

非傍轴标量光束横截面上的精确光强<sup>[4,5,11~13]</sup>可表示为

$$J_z = \text{Re} \left[ \frac{1}{ik} U^*(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial z} U(\mathbf{r}) \right], \quad (1)$$

式中波数  $k=2\pi/\lambda$ 。对轴对称光束, 精确光强二阶矩定义下的光束束宽<sup>[12]</sup>可表示为

$$W^2(z) = \frac{2}{P(z)} \iint_{-\infty}^{\infty} J_z(x, y, z) (x^2 + y^2) dx dy, \quad (2)$$

式中

$$P(z) = \iint_{-\infty}^{\infty} J_z(x, y, z) dx dy, \quad (3)$$

为  $z$  处横截面上非傍轴标量光束的总功率。

由角谱衍射理论, 真空中传播的单色标量光场<sup>[14]</sup>可严格表示为

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(f_x, f_y, z) \exp[i2\pi(xf_x + yf_y)] df_x df_y, \quad (4)$$

式中

$$A(f_x, f_y, z) = A_0(f_x, f_y) \exp(ikz \sqrt{1 - \lambda^2 f_x^2 - \lambda^2 f_y^2}), \quad (5)$$

$$A_0(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) \exp[-i2\pi(xf_x + yf_y)] dx dy. \quad (6)$$

将(1), (4)~(6)式代入(3)式, 得

$$P(z) = \iint_{f_x^2 + f_y^2 \leq 1/\lambda^2} \sqrt{1 - \lambda^2 f_x^2 - \lambda^2 f_y^2} |A_0(f_x, f_y)|^2 df_x df_y. \quad (7)$$

由(7)式可见, 光束横截面上的总功率与  $z$  无关, 这正是能量守恒的表现。设光束束腰位于  $z$  轴的坐标原点, 由文献[12]得

$$W^2(z) = W^2(0) + z^2 \tan^2 \theta, \quad (8)$$

式中

$$W^2(0) = \frac{1}{\pi P(z)} \cdot \text{Re} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\partial [A_0(f_\rho) \gamma]}{\partial f_\rho} \frac{\partial [A_0^*(f_\rho)]}{\partial f_\rho} f_\rho df_\rho \right\}, \quad (9)$$

$$\tan^2 \theta = \frac{4\pi\lambda^2}{P(z)} \int_0^{\infty} |A_0(f_\rho)|^2 \frac{f_\rho^3}{\gamma} df_\rho, \quad (10)$$

$f_\rho = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ ,  $\gamma = \sqrt{1 - \lambda^2 f_\rho^2}$ ,  $W(0)$  和  $\tan \theta$  分别表示光束的束腰和远场发散角。非傍轴标量光束的质量因子  $M^2$ <sup>[2,12]</sup> 定义为

$$M^2 = \pi W(0) \tan \theta / \lambda. \quad (11)$$

设高斯光束的束腰位于  $z=0$  平面, 光场分布为

$$U(x, y, 0) = \exp[-(x^2 + y^2)/\omega_0^2], \quad (12)$$

式中  $\omega_0$  为高斯光束的束腰半径。将(12)式代入(4)~(6)式, 得

$$A_0(f_\rho) = \pi\omega_0^2 \exp(-\pi^2\omega_0^2 f_\rho^2), \quad (13)$$

$$U(x, y, z) = 2\pi^2\omega_0^2 \int_0^{\infty} f_\rho J_0(2\pi\rho f_\rho) \exp(-\pi^2\omega_0^2 f_\rho^2) \exp(ikz \sqrt{1 - \lambda^2 f_\rho^2}) df_\rho. \quad (14)$$

将(13)式代入(7)~(11)式,可求得基于精确光强二阶矩定义的非傍轴标量高斯光束的束腰、远场发散角以及  $M^2$  因子随束腰参量  $w_0$  的变化,数值计算如图 1~3 中实线  $b$  所示;光束束宽随传输距离  $z$  的变化如图 4 中实线  $b$  所示。

### 3 PIB 定义下的非傍轴标量高斯光束的传输特性

类似于文献[10]关于傍轴标量光束 PIB 的定义,轴对称非傍轴标量光束横截面上半径为  $W(z)$  的光斑内光束的  $P_{\text{IB}}$  可定义为

$$P_{\text{IB}} = \int_0^{2\pi W(z)} \int_0^{2\pi\infty} J_z(\rho, \theta, z) \rho d\rho d\theta / \left[ \int_0^{2\pi\infty} \int_0^{2\pi\infty} J_z(\rho, \theta, z) \rho d\rho d\theta \right], \quad (15)$$

式中  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 即光束的 PIB 为光斑内光束功率与光束总功率的比。当  $P_{\text{IB}}$  为给定值时,  $W(z)$  即为  $z$  处由 PIB 定义的光束束宽。通常  $P_{\text{IB}}$  取 63%, 86.5% 等值, 本文  $P_{\text{IB}}$  取 86.5%。根据光束束宽的定义, 可相应地求得光束的束腰和远场发散角为

$$W(0) = \min W(z), \quad (16)$$

$$\tan \theta = \lim_{z \rightarrow \infty} W(z)/z. \quad (17)$$

类似(11)式, 可相应地定义基于 PIB 的光束质量因子。将(14)式代入(15)~(17)式, 并令  $P_{\text{IB}} = 0.865$ , 经数值计算可求得基于 PIB 定义的非傍轴标量高斯光束的束腰、远场发散角以及  $M^2$  因子随参量  $w_0$  的变化, 如图 1~3 中点划线  $a$  所示; 其束宽随传输距离  $z$  的变化, 如图 4 中点划线  $a$  所示。

一般地, 傍轴标量高斯光束的束宽随传输距离  $z$  的变化<sup>[15,16]</sup> 为

$$W^2(z) = w_0^2 + \left( \frac{4}{k^2 w_0^2} \right) z^2. \quad (18)$$

(18)式与传统光强二阶矩定义的光束束宽是一致的。由(18)式可知, 傍轴标量高斯光束的束腰为  $w_0$ ; 远场发散角  $\theta = \arctan[2/(k w_0)]$ ;  $M^2 \equiv 1$ 。在图 1~4 中用虚线  $c$  一并给出了傍轴标量高斯光束的相应传输参量, 以便比较。

由图 1 可知, 基于精确光强 PIB 二阶矩定义的光束束腰与傍轴标量高斯光束的束腰  $w_0$  基本一致; 由图 2 可知, 精确光强二阶矩定义的远场发散角比 PIB 定义的远场发散角大, 当  $w_0$  趋于零时, 精确光强二阶矩定义的远场发散角趋于  $63.4^\circ$ , PIB 定义的远场发散角趋于  $59.1^\circ$ , 传统光强二阶矩定义的远场发散角趋于  $90^\circ$ ; 由图 3 可知, 由桶中功率定义的  $M^2$  因子小于二阶矩定义的  $M^2$  因子, 且都随  $w_0$  趋于零而趋向于零, 随  $w_0$  的增大趋向于 1; 由图 4 可知,  $w_0 = 0.5\lambda$  时, 精确光强二阶矩束宽与 PIB 束宽的传播规律存在一定偏差;  $w_0 = \lambda$  时, 两者基本一致, 但与傍轴标量近似还存在一定偏差;  $w_0 = 3\lambda$  时, 三者趋于一致, 过渡到傍轴标量高斯光束的传输规律。

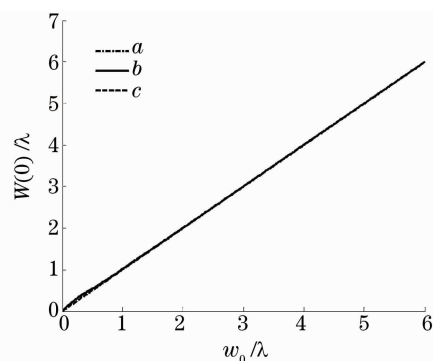


图 1 束腰半径随  $w_0/\lambda$  的变化

Fig. 1 Beam waists versus  $w_0/\lambda$

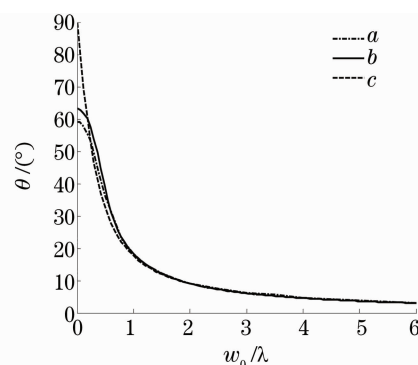


图 2 远场发散角随  $w_0/\lambda$  的变化

Fig. 2 Far-field divergence angles versus  $w_0/\lambda$

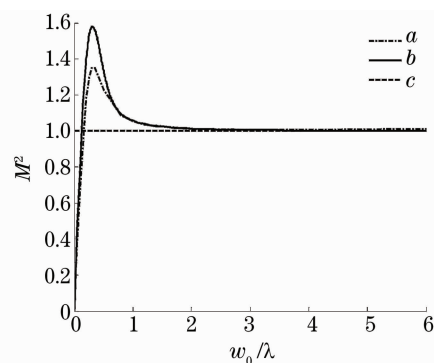
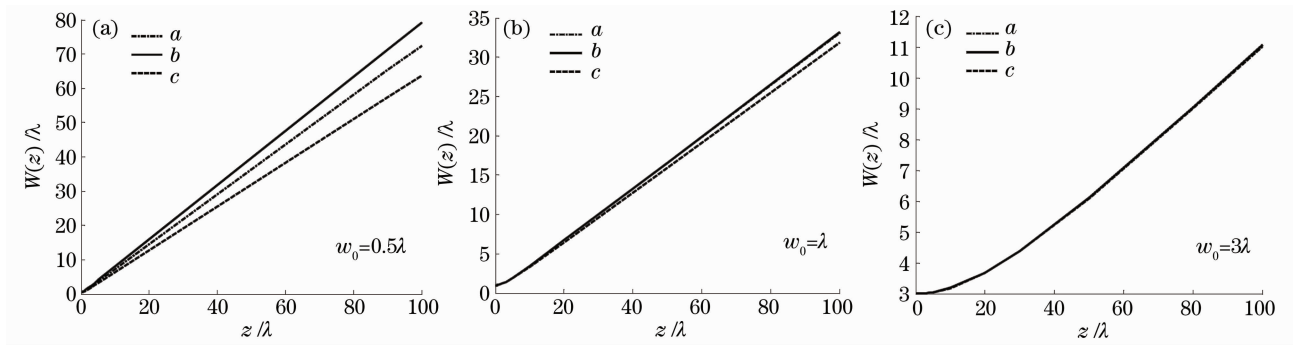


图 3  $M^2$  因子随  $w_0/\lambda$  的变化

Fig. 3  $M^2$  factors versus  $w_0/\lambda$

图4 束宽随传输距离  $z/\lambda$  的变化Fig. 4 Beam widths versus  $z/\lambda$ 

## 4 结 论

以自由高斯光束为例,对非傍轴标量光束不同定义的束宽、远场发散角和  $M^2$  因子等进行了数值计算和比较分析。结果表明,当  $w_0 < \lambda$  时,精确光强 PIB 定义的光束束宽的传播规律与双曲线存在一定偏差,其远场发散角和  $M^2$  因子比精确光强二阶矩定义的相应参量要小,且两者的  $M^2$  因子都可以小于 1,并随光束束腰  $W(0)$  趋向于零而趋于零;当  $\lambda < w_0 < 3\lambda$  时,精确光强二阶矩和 PIB 定义的光束传输特性基本一致,但与傍轴标量近似还存在一定偏差;当  $w_0 > 3\lambda$  时,三种定义的光束传输特性趋于一致,过渡到傍轴标量高斯光束的情况。研究表明,对于束腰为波长量级的微光束,如纳米孔径激光器、光纤探针等,其发散角一般较大,更关心的是其在近场的传输特性。另外,本文的结论对非傍轴光束的参量表征及其传输特性的研究都具有一定的参考价值。

## 参 考 文 献

- 1 C. Gao, H. Weber. The problems with  $M^2$  [J]. *Optics and Laser Technology*, 2000, **32**(4): 221~224
- 2 Cao Qing, Deng Ximing, Guo Hong. Optical beam quality factor of nonparaxial light beams. I. definition [J]. *Acta Optica Sinica*, 1996, **16**(9): 1217~1222  
曹清, 邓锡铭, 郭弘. 非傍轴光束的光束质量因子. I. 定义 [J]. *光学学报*, 1996, **16**(9): 1217~1222
- 3 Deng Xiaojie, Wu Benke, Xiao Su. Energy transmission of a small aperture in near-field diffraction [J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(12): 1432~1436  
邓小玖, 吴本科, 肖苏. 微小孔近场衍射的能量传输 [J]. *光学学报*, 2001, **21**(12): 1432~1436
- 4 Deng Xiaojie, Liu Caixia, Wang Fei *et al.*. Light intensity of nonparaxial diffracted beams at transverse plane and its energy transmission [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, **37**(10): 2058~2062  
邓小玖, 刘彩霞, 王飞等. 非傍轴衍射光束横截面上的光强及其能量传输 [J]. *光子学报*, 2008, **37**(10): 2058~2062
- 5 Cao Qing, Deng Ximing, Guo Hong. Accurate expression of light intensity at transverse plane [J]. *Acta Optica Sinica*, 1996, **16**(7): 897~902  
曹清, 邓锡铭, 郭弘. 横截面上光强的精确表述 [J]. *光学学报*, 1996, **16**(7): 897~902
- 6 Q. Cao, X. M. Deng. Power carried by scalar light beams [J]. *Opt. Commun*, 1998, **151**(4-6): 212~216
- 7 M. A. Porrás. The best quality optical beam beyond the paraxial approximation [J]. *Opt. Commun*, 1994, **111**(3-4): 338~349
- 8 M. A. Porrás. Finiteness and propagation law of the power density second-order moment for diffracted scalar light beams [J]. *Optik*, 1999, **110**(9): 417~420
- 9 Kang Xiaoping, He Zhong, Lü Baida. The beam quality of vectorial nonparaxial Hermite-Laguerre-Gaussian beams [J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(9): 4569~4574  
康小平, 何仲, 吕百达. 矢量非傍轴厄米-拉盖尔-高斯光束的光束质量 [J]. *物理学报*, 2006, **55**(9): 4569~4574
- 10 Zhu Lihua, Nie Yiyong, Lü Baida. The concept of the beam width and comparison of its different definitions [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2005, **34**(10): 1476~1479  
朱莉华, 聂义友, 吕百达. 光束束宽概念和不同定义束宽的比较 [J]. *光子学报*, 2005, **34**(10): 1476~1479
- 11 Wang Dong, Deng Xiaojie, Liu Guohong *et al.*. Energy transmission characteristics of nonparaxial scalar diffraction beam

- [J]. *Chinese J. Quantum Electronics*, 2009, **26**(2): 134~137  
王 东, 邓小玖, 刘果红 等. 非傍轴标量衍射光束的能量传输特性[J]. 量子电子学报, 2009, **26**(2): 134~137
- 12 Deng Xiaojie, Chu Delin, Hu Jigang *et al.*. Study of the quality factor of Gaussian beam[J]. *Journal of Hefei University of Technology(Nature Science)*, 2003, **26**(4): 501~504  
邓小玖, 储德林, 胡继刚 等. 高斯光束质量因子的研究[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2003, **26**(4): 501~504
- 13 Zhou Guoquan, Zhao Daom, Wang Shaomin. Characteristics of axial light intensity of planar wave diffracted by small circular aperture[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(1): 22~25  
周国泉, 赵道木, 王绍民. 平面波经小圆孔衍射的轴上光强特性[J]. 光学学报, 2003, **23**(1): 22~25
- 14 J. W. Goodman. Introduction to Fourier Optics[M]. Qin Kecheng, Liu Peisen, Chen Jiabi *et al.*. Transl. Beijing: Publishing House of Electronics Industry Press., 2006. 50~53  
J. W. 古德曼. 傅里叶光学导论[M]. 秦克诚, 刘培森, 陈家璧 等译. 北京: 电子工业出版社, 2006. 50~53
- 15 Guo Shuohong. Electrodynamics[M](3 rd Edition). Beijing: Higher Education Press., 2008. 140~144  
郭硕鸿. 电动力学[M](第三版). 北京: 高等教育出版社, 2008. 140~144
- 16 Lü Baida. Laser Optics[M]. Chengdu: Sichuan University Press, 1992. 60~65  
吕百达. 激光光学[M]. 成都: 四川大学出版社, 1992. 60~65