

# 一种基于 Split Bregman 方法的快速曲率驱动图像 修补算法

谢爱敏 周光华\* 冯象初

(西安电子科技大学理学院, 陕西 西安 710071)

**摘要** 提出了一种基于 Split Bregman 方法的快速曲率驱动(CDD)图像修补模型算法。由于 CDD 模型中曲率项的影响,数值求解高阶偏微分方程过程中需要大量迭代运算,修复速度缓慢。鉴于 Split Bregman 方法在  $L_1$  正则化问题的成功应用,为提高算法计算速度,在 CDD 修补模型中引入 Split Bregman 方法。实验结果表明,与其他类似方法相比,新算法的实现速度显著加快,且视觉效果好。

**关键词** 图像处理;图像修补;Split Bregman;全变分模型;快速曲率驱动模型

**中图分类号** TP319

**OCIS** 100.3008 100.4994

**文献标识码** A

## Image Inpainting Algorithm of Curvature Driven Diffusions Based on Split Bregman Method

Xie Aimin Zhou Guanghua\* Feng Xiangchu

(College of Mathematics, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract** A fast inpainting algorithm of curvature driven diffusions (CDD) model is proposed. It is known that the curvature term requires a large number of iterations in solving the high order partial differential equation in original CDD model. Due to the success of the Split Bregman method in  $L_1$  regularization problem, it is introduced into the CDD model to speed up the algorithm. The experiments show that the new algorithm is much faster and has better vision effects than other similar methods.

**Key words** image processing; image inpainting; Split Bregman; total variation model; curvature driven diffusions model

### 1 引言

图像修复技术是数字图像处理的重要内容,它利用残留图像信息对已丢失或受损部分进行填充与修正,以达到复原图像且满足人眼视觉要求的目的。数字图像修补技术在文字转移、旧照片存储、特殊图形的去除等许多方面有着广泛运用。图像修补算法主要是利用图像的纹理、梯度、水平线、水平集、曲率等特征进行修补,可以大致分为两类:一类是用于填充图像中大块丢失纹理信息的图像修补技术,其思想是采用纹理合成算法来填补被修补区域<sup>[1]</sup>,即依据某一小的纹理样图,在现存区域寻找匹配块进行合成的而且结构连续的曲面纹理。另一类是用于修复小尺度缺损的数字图像修补模型,其主要思想是利用待修补区域的边缘信息,确定扩散信息和扩散方向,从区域边界各向异性地向边界内扩散,对修补区域较小的图像具有较好的修复效果。经典的修复方法有 BSCB 算法<sup>[2]</sup>、快速曲率驱动(CDD)模型<sup>[3]</sup>、Euler's elastica 模型<sup>[4]</sup>、全变分(TV)模型<sup>[5]</sup>、Mumford-Shah 模型和 Mumford-Shah-Euler 模型<sup>[6]</sup>等,这几种方法都是泛函求极值的变分问题,由于

收稿日期:2009-11-16;收到修改稿日期:2010-02-26

基金项目:国家自然科学基金(NSFC 60872138)资助课题。

作者简介:谢爱敏(1977—),女,硕士研究生,主要从事图像处理方面的研究,E-mail:xam.2006@163.com。

导师简介:冯象初(1962—),男,博士,教授,主要从事小波分析和图像处理方面的研究,

E-mail:xcfeng@mail.xidian.edu.cn。

\* 通信联系人。E-mail: picassolone@yahoo.com.cn

偏微分方程与变分法等价<sup>[7~10]</sup>,因而这些方法都可归为基于偏微分方程(PDE)的图像修补算法。图像在传输或处理过程中丢失部分小波系数产生了在小波域上的图像修补问题<sup>[11~13]</sup>,这类问题也可归于第二类。

本文考虑了修补算法的实现速度与视觉效果,利用 Split Bregman 方法迭代速度快和适合于解决  $L_1$  正则化问题的特点,提出了一种基于 Split Bregman 方法的 CDD 修补方法,介绍了 CDD 图像修补模型,简介 Split Bregman 方法,给出了利用 Split Bregman 方法求解 CDD 模型的过程,并给出了本文算法的实验结果与分析,指出新算法需要发展的地方。

## 2 CDD 图像修补模型算法

2002 年 T. F. Chan 等<sup>[5]</sup>提出了 TV 模型,即求解泛函的极小值

$$J_1(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{D^c} |u - u^0|^2 dx dy, \quad (1)$$

式中  $D$  为修补区域,  $u^0$  为已知区域  $D^c = \Omega - D$  上被白噪声污染的原始图像,  $\nabla u$  是  $u(x, y)$  的梯度,  $\lambda$  为拉格朗日算子。TV 修补模型利用能量方程  $J_1(u)$  的欧拉-拉格朗日方程求解  $u(x, y)$

$$-\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \lambda_c (u^0 - u) = 0, \quad \lambda_c(x) = \begin{cases} \lambda & x \in D^c \\ 0 & x \in D \end{cases}, \quad (2)$$

式中  $\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$  是扩散项,  $\frac{1}{|\nabla u|}$  是扩散系数。

TV 模型依赖于图像的几何特征,可以很好地修复自然图像,但是不满足人类视觉中的“连接性准则”。为此,修正 TV 模型扩散系数  $\frac{1}{|\nabla u|}$  为  $\hat{D} = \frac{g(|k|)}{|\nabla u|}$ , 式中  $k$  为曲率,得到了曲率驱动修复模型 CDD

$$-\nabla \cdot \left[ \frac{g(|k|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] + \lambda_c(x) (u - u^0) = 0, \quad \lambda_c(x) = \begin{cases} \lambda & x \in D^c \\ 0 & x \in D \end{cases}, \quad (3)$$

式中  $g(|k|) = \begin{cases} 0 & |k| = 0 \\ \infty & |k| = \infty \\ \text{between} & 0 < |k| < \infty \end{cases}$ , 一般取  $g(|k|) = (|k|)^p$ ,  $|k| > 0, p \geq 1$ 。模型的能量形式为

$$J_2 = \int_{\Omega} g(|\nabla u|) |\nabla u| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{D^c} |u - f|^2 dx dy. \quad (4)$$

修改 TV 模型后得到的 CDD 模型引入了关于曲率  $k$  的函数,当等照线的曲率较大时,扩散强度也大,修复时会使曲率大的地方等照线拉伸而满足“连接性准则”,修补效果好。但是,由于 CDD 模型是通过引入曲率项求解高阶偏微分方程来进行图像修补的,在求解偏微分方程过程中,大量迭代运算导致修复速度非常缓慢。

## 3 Split Bregman 方法求解 CDD 模型

### 3.1 Split Bregman 方法介绍

文献<sup>[14]</sup>中引入 Split Bregman 方法,用来求解形式问题

$$\arg \min_u \left( |\Phi u|_1 + \frac{\mu}{2} \|Au - f\|^2 \right), \quad (5)$$

式中  $\Phi$  和  $A$  为线性算子。Split Bregman 方法通过分裂使(5)式中的  $L_1$  和  $L_2$  项“去耦合”。引入一个辅助变量  $d = \Phi u$ , (5)式转化为

$$\arg \min_u \left( |d|_1 + \mu \|Au - f\|^2 \right). \quad (6)$$

引入一个二次惩罚函数,(6)式转化为一个非约束问题

$$\arg \min_{u,d} \left( |d|_1 + \mu \|Au - f\|^2 + \frac{\lambda}{2} \|d - \Phi u\|^2 \right). \quad (7)$$

用交替极小化方法来求解(7)式。首先固定  $d$ , 关于  $u$  求极小化。这是个可微最优化问题,其解为

$$(\mu A^T A - \lambda \Delta) u^* = \mu A^T f + \lambda \Phi d, \quad (8)$$

固定  $u$ , 关于  $d$  求极小化。这个最优化问题可被逐点去耦合,解由简单的阈值得到  $d^* = \text{shrink}(\Phi u, 1/\lambda)$ , 式

中 shrink 函数定义为  $\text{shrink}(z, \lambda) = \max\{ \|z\| - \lambda, 0 \} \frac{z}{\|z\|}$ 。

在(7)式中,约束条件  $d = \Phi u$  只是近似的满足。强化约束条件可以通过用一系列递增惩罚系数  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$  来解决。但是,当  $\lambda \rightarrow \infty$  时,(8)式的条件数也随之增加,交替极小化方法的收敛就变得非常慢。另一种强化约束条件方法是将 Bregman 迭代用于(7)式,即在二次惩罚函数内部引入向量  $b^k$ ,得到非约束问题

$$(u^k, d^k) = \arg \min_{u, d} (\|d\|_1 + \mu \|Au - f\|^2 + \lambda \|d - \Phi u - b^k\|^2), \quad (9)$$

$$b^{k+1} = b^k + \Phi u^k - d^k, \quad (10)$$

当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\|d - \Phi u\| \rightarrow 0$ ,  $\|u^k - u^*\| \rightarrow 0$ ,  $u^*$  就是问题(5)式的解。

求(9)式的一个精确解通常是没有必要的<sup>[15]</sup>,只要用一个近似解就可以了,而一般经过交替极小化方法一次迭代就可以得到此近似解,因此,在很多应用中,可以很快地得到迭代值  $(u^k, d^k)$ 。文献[16]分析了 Bregman 迭代方法的收敛性。

### 3.2 利用 Split Bregman 方法求解 CDD 模型的算法

CDD 图像修补模型(4)式可以转化为形式为(5)式的最优化问题

$$\arg \min_u \left\{ \int_D \{ |g(|\nabla u|) \nabla u\}_x + |g(|\nabla u|) \nabla u\}_y \} dx dy + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 \right\}. \quad (11)$$

用 Split Bregman 方法修改(11)式,分别用  $d_x$  和  $d_y$  替代  $[g(|\nabla u|) \nabla u]_x$ ,  $[g(|\nabla u|) \nabla u]_y$ , 得到问题

$$\min_u \left[ \int_D (|d_x| + |d_y|) dx dy + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 \right], \quad (12)$$

加入惩罚项,得到无约束问题

$$\min_{d_x, d_y, u} \left\{ \int_D (|d_x| + |d_y|) dx dy + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|d_x - [g(|\nabla u| \nabla u)]_x\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|d_y - [g(|\nabla u| \nabla u)]_y\|_2^2 \right\}, \quad (13)$$

对(13)式应用 Bregman 迭代直到收敛

$$(u^k, d_x, d_y) = \arg \min_{d_x, d_y, u} \left\{ \int_D (|d_x| + |d_y|) dx dy + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|d_x - [g(|\nabla u| \nabla u)]_x - b_x^k\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|d_y - [g(|\nabla u| \nabla u)]_y - b_y^k\|_2^2 \right\}, \quad (14)$$

$$(b_x, b_y)^{k+1} = (b_x, b_y)^k + \nabla u - (d_x, d_y)^k. \quad (15)$$

事实上,不必求(14)式的精确解,只需用交替极小化方法求得一个近似解。首先,固定变量  $(d_x, d_y)$ , (14)式关于  $u$  求极小值,这可以用 Gauss-Seidel 迭代方法来近似求解下式得到

$$(\mu I - \lambda \Delta) u = \mu f + \lambda \nabla \cdot [(b_x, b_y) - (d_x, d_y)], \quad (16)$$

其次,固定  $u$ , 关于  $(d_x, d_y)$  求极小值,通过简单的阈值得到

$$(d_x, d_y)^{k+1} = \text{shrink}[\nabla u + (b_x, b_y), \lambda]. \quad (17)$$

综上所述,通过分裂把(4)式中的  $L_1$  和  $L_2$  项“去耦合”;通过 Bregman 迭代和交替极小化方法,利用阈值明显简化了求解过程,提高了修补速度。

## 4 实验结果与分析

为验证算法的有效性,分别用 CDD 修补算法和本文新提出的算法对 Pepper(图 1), Lena(图 2) 和 Cameraman(图 3) 三组图进行图像修补实验。本文实验在 Genuine Intel(R) T1400 1.73 GHz 处理器, 896 Mb 内存的计算机上用 7.1.0.246(R14) 版的 Matlab 软件完成。

在图 1 实验中,原始 CDD 修补算法进行 200 次迭代运算得到(c),而用提出的新算法仅迭代 40 次就可以达到类似视觉效果。两种算法分别耗时为 12.9 s 和 6.6 s,利用 Split Bregman 方法的 CDD 算法明显比优化前的算法快。在图 2 的修补实验中,经两种算法修补后的图像均有修补的痕迹,显示出 CDD 修补模型

在处理图像纹理方面的不足,在修补效果可以接受的情况下,新算法仍比旧算法的迭代次数少且耗时少。新算法迭代运算次数少和速度快的特点在图 3 的修补实验中更显著,原始 CDD 算法在迭代 200 次后仍有明显修补痕迹,用时 12.8 s,而用新提出的算法只迭代 30 次就得到了比前者好的效果,用时仅 4.9 s。通过以上实验对比,新算法把 Split Bregman 方法引入 CDD 修补模型,使新算法具有 CDD 模型的修补效果,同时较原始算法有迭代次数少、运行速度快等优点,表 1 是两种算法的运行时间比较。

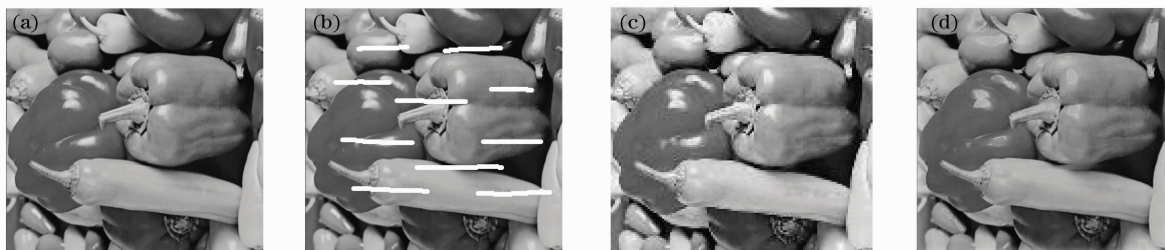


图 1 Pepper 图像修补。(a) 原始图像;(b) 缺损图像;(c) 原 CDD 修补算法处理结果;(d) 新算法修补结果

Fig. 1 Pepper for inpainting. (a) original image; (b) defected image;  
(c) result from original CDD algorithm; (d) result from new algorithm



图 2 Lena 图像修补。(a) 原始图像;(b) 缺损图像;(c) 原 CDD 修补算法处理结果;(d) 新算法修补结果

Fig. 2 Lena for inpainting. (a) original image; (b) defected image;  
(c) result from original CDD algorithm; (d) result from new algorithm

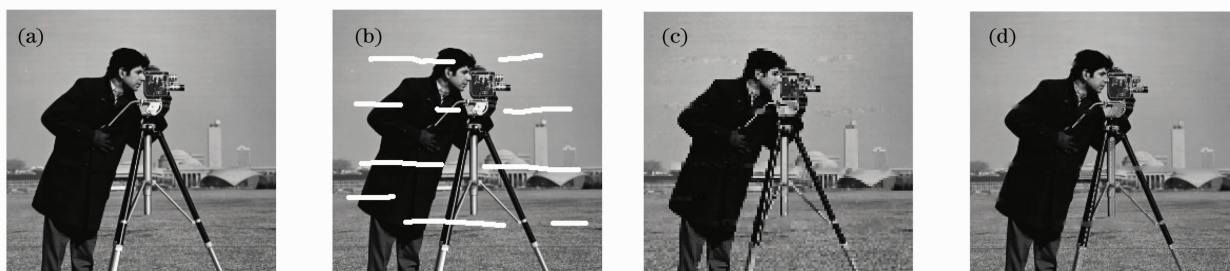


图 3 Cameraman 图像修补。(a) 原始图像;(b) 缺损图像;(c) 原 CDD 修补算法处理结果;(d) 新算法修补结果

Fig. 3 Cameraman for inpainting. (a) original image; (b) defected image;  
(c) result from original CDD algorithm; (d) result from new algorithm

表 1 修补算法时间比较

Table 1 Comparison of the time required in different algorithms

Image	Time for original algorithm /s	Time for proposed algorithm /s
Pepper	12.9	6.6
Lena	12.9	8.7
Cameraman	12.8	4.9

## 5 结 论

在研究 CDD 修补模型和 Split Bregman 方法的基础上,利用迭代次数少、运算速度快和适合于解决  $L_1$  正则化问题等特点的 Split Bregman 方法,加速 CDD 图像修补算法。在满足视觉效果前提下,显著提高了 CDD 模型修补速度。在实验中发现,对于某些图像新算法比原 CDD 算法有更好的修补效果,找到这一类图像后可以分类方法修补图像;对于缺损图像的一些具有不连通性的区域和纹理缺失部分,修复效果不理想。

## 参 考 文 献

- 1 A. Efros, T. K. Leung. Texture synthesis by non-parametric sampling [C]. *IEEE International Conference on Computer Vision, Corfu, Greece*, 1999, 1033~1038
- 2 M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles *et al.*. Image inpainting [C]. *Proceedings International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, New Orleans Louisiana, USA*, 2000, 417~424
- 3 T. F. Chan, J. Shen. Non texture inpainting by curvature-driven diffusions (CDD) [J]. *J. Vis. Commun. Image R.*, 2001, **12**(4):436~449
- 4 T. F. Chan, S. H. Kang, J. H. Shen, Euler's elastica and curvature based inpainting [J]. *SIAM J. Appl. Math.*, 2002, **63**(2): 564~592
- 5 T. F. Chan, J. H. Shen. Mathematical models for local non texture inpainting [J]. *SIAM J. Appl. Math.*, 2002, **62**(3): 1019~1043
- 6 S. Esedoglu, J. H. Shen. Digital inpainting based on the Mumford-Shah-Euler image model [J]. *European J. Appl. Math.*, 2002, **13**(4): 353~370
- 7 Guo Yongcai, Gao Chao, Wang Enuo. Blind image restoration algorithm based on wavelet transform and NAS-RIF algorithm [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(11): 3000~3003  
郭永彩, 高 潮, 王婀娜. 基于小波变换和非负支撑域递归滤波算法的盲目图像复原[J]. *光学学报*, 2009, **29**(11): 3000~3003
- 8 Li Xin, Zhao Yigong, Chen Bing. A new approach of small and dim target detection in cloud cluster infrared image based on classification [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(11): 3036~3042  
李 欣, 赵亦工, 陈 冰. 基于分类的红外云层背景弱小目标检测方法 [J]. *光学学报*, 2009, **29**(11): 3036~3042
- 9 Tao Xiaoping, Feng Huajun, Zhao Jufeng *et al.*. A total-variation majorization-minimization sectioned restoration algorithm with gradient ringing metric image quality assessment [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(11): 3025~3030  
陶小平, 冯华君, 赵巨峰 等. 结合基于梯度的振铃评价算法的总变分最小化图像分块复原法 [J]. *光学学报*, 2009, **29**(11): 3025~3030
- 10 Hao Zhicheng, Wu Chuan. Moving object detection from dynamic image sequence based on stability matrix [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(11): 3031~3035  
郝志成, 吴 川. 基于稳定矩阵的动态图像运动目标检测 [J]. *光学学报*, 2009, **29**(11): 3031~3035
- 11 Li Min, Feng Xiangchu. A denoising model using the total variation and wavelet method [J]. *Journal of Xidian University(Natural Science)*, 2006, **33**(6): 980~984  
李 敏, 冯象初. 基于全变差和小波方法的图像去噪模型 [J]. *西安电子科技大学学报(自然科学版)*. 2006, **33**(6): 980~984
- 12 L. Zhang, B. Paul, Q. Pan. Threshold analysis in wavelet-based denoising [J]. *Electron. Lett.*, 2001, **37**(24): 1485~1486
- 13 T. F. Chan, J. Shen, H. M. Zhou. Total variation wavelet inpainting [J]. *J. Math. Imaging Visi.*, 2006, **25**(1) : 107~125
- 14 T. Goldstein, S. Osher. The split bregman method for  $L_1$  regularization problems [J]. *SIAM J. Imaging Sciences*, 2009, **2**(2): 323~343
- 15 T. Goldstein, X. Bresson, S. Osher. Geometric application of the split bregman method; segmentation and surface reconstruction. <http://www.math.ucla.edu/~tagoldst/publications.html>
- 16 S. Osher, M. Burger, D. Goldfarb *et al.*. An iterative regularization method for total variation-based image restoration [J]. *Multiscale Model Sim.* 2005, **4**(2): 460~489