

分数傅里叶域中的相位恢复问题

廖天河¹ 高穹^{2*} 崔远峰³ 宋凯洋¹

(¹信息工程大学数学物理系, 河南 郑州 450001; ²国防科学技术大学光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

³中国卫星海上测控部, 江苏 江阴 214431

摘要 对离散分数傅里叶变换(DFRFT)框架下复值信号和复值图像相位恢复问题的研究现状进行了评述。首先讨论了基于 Gerchberg-Saxton(G-S)算法和 DFRFT 级次多样性的并行和串行 G-S 算法,并针对二维复值图像和级次个数为 3 的情形进行了数值模拟。结果表明,当 3 个级次在关于 1 对称的意义下的间隔较大时,这两种算法都相当有效;串行 G-S 算法的整体性能优于并行 G-S 算法。其次,针对一维复信号的情形,研究了一种基于非线性最小二乘的算法。这种算法首先将问题转化为非线性最小二乘形式的最优化问题,然后采用 Moré 形式的 Levenberg-Marquardt 算法求解。基于一维复值信号任意两个级次的 DFRFT 振幅,本算法都能得到相当精确的相位;即使对振幅含有中等噪声的情况,所得结果也比较满意。

关键词 图像处理;相位恢复;离散分数傅里叶变换;并行/串行 G-S 算法;非线性最小二乘

中图分类号 O438

OCIS 100.5070 070.2580

文献标识码 A

Phase Retrieval Problem in Fractional Fourier Domain

Liao Tianhe¹ Gao Qiong² Cui Yuanfeng³ Song Kaiyang¹

¹Department of Mathematics and Physics, Information and Engineering University,
Zhengzhou, Henan 450001, China

²College of Photon-Electron Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha,
Hunan 410073, China

³China Satellite Maritime Tracking & Controlling Department, Jiangyin, Jiangsu 214431

Abstract Under the condition of the framework of discrete fractional Fourier transform (DFRFT), the research on the phase retrieval problem of complex signals and images is reviewed. Firstly, based on the basic Gerchberg-Saxton (G-S) algorithm and the diversity of the DFRFT orders, a great number of numerical simulations are performed for the case of complex image and three DFRFT orders. The results indicate that when the difference of these orders is large, the two algorithms are quite efficient, and the whole performance of the serial version is better than the parallel one. Secondly, for the case of 1-D complex signal, an algorithm based on the non-linear least-squares is studied. This algorithm converts the original problem into the optimization of a non-linear least-squares, and then is solved by the Levenberg-Marquardt algorithm of Moré's form. With two DFRFT amplitudes of arbitrary orders, the algorithm can reconstruct quite accurate phase distribution, and its performance for noisy amplitudes is also satisfying.

Key words image processing; phase retrieval; discrete fractional Fourier transform; parallel/serial G-S algorithm; nonlinear least-squares

1 引言

近年来,有关分数傅里叶变换(FRFT)的理论与应用吸引了很多学者的注意^[1]。V. Namias^[2]由经典傅里叶变换的本征函数出发,第一次给出了该变换的原始积分形式。后来,A. C. McBride 等^[3]修正了 V. Namias 的结果,并给出了 FRFT 现在通用的积分定义。当时,这些工作主要限于在量子力学中的应用与求解偏微分方程。分数傅里叶变换受到广泛的重视与研究始于 20 世纪 90 年代中期 H. M. Ozaktas 等^[4~10]的

收稿日期: 2009-12-07; 收到修改稿日期: 2010-03-05

作者简介: 廖天河(1964.10—)男,硕士,副教授,主要从事光学信息处理等方面的研究。E-mail: liaotianhe1964@163.com

* 通信联系人。E-mail: gaoqiong1980@126.com

工作。这些工作揭示出了 FRFT 与光束在折射率渐变介质中的传播、光束变换,魏格纳变换和小波变换等时频分析工具的紧密联系^[1]。

分数傅里叶域内的相位恢复问题随着 FRFT 理论和实验的深入而得到越来越多的重视^[11~18]。由于分数傅里叶变换是经典傅里叶变换在级次上的推广,因此,分数傅里叶域内相位恢复问题研究的一个直接思路便是推广经典傅里叶域内相位恢复问题的成功算法,如 Gerchberg-Saxton (G-S)算法^[19]、混合输入输出(HIO)算法^[20]和杨-顾(Y-G)算法^[21]等。由于分数傅里叶变换在级次的选取上要比经典的情形丰富得多,这就提供了利用多个级次的 FRFT 信息并进行恰当的组合以求解相位恢复问题的可能。另外,由于相位恢复问题是一个典型的反问题^[22,23],可以转化为最优化问题求解^[24]。这也为分数傅里叶域内相位恢复问题的求解提供了思路。

值得指出,如果实现 FRFT 的光学系统在级次的设定上足够灵活,相应的相位恢复问题可通过其他方法解决。T. Alieva 等^[25]对两个 FRFT 的级次比较接近的情形进行了研究,并将问题转化为求解偏微分方程。这种方法不需要迭代,因而具有比较高的计算效率。最近,U. Gopinathan 等^[26]指出,这两个级次的间隔要在一个恰当的上界和下界之间,而这一对上、下界是与所处理的信号及光学系统的噪声特性相关的。另外,如果能够获得在一个级次周期内足够多的 FRFT 振幅,那么可以通过相空间层析术的方法重构原信号^[27,28]。由于这两类方法对 FRFT 的级次有较多要求,本文不作为重点讨论。

本文简要地给出了离散分数傅里叶变换(DFRFT)的定义,详细地讨论了分数傅里叶域中相位恢复问题的提法。并分别针对关于一维复信号和二维复图像的相位恢复问题的研究现状进行了详细的讨论,所用到的算法主要是并行/串行 G-S 算法和基于非线性最小二乘的算法。

2 离散分数傅里叶变换与相位恢复问题

由于一般信号处理和光学信号处理涉及的往往是离散形式的信号,本文仅讨论离散形式的分数傅里叶变换。文献中已出现了很多关于 DFRFT 的定义^[29]。一般地,我们希望所定义的 DFRFT 满足以下性质^[29,30]:(a)是酉变换;(b)具有级次的可加性;(c)当级次为 1 时,与经典离散傅里叶变换等价;(d)当采样点足够多时,可逼近连续 FRFT。

本文采用由离散厄密-高斯函数构造的 DFRFT^[29,31]。研究表明,这样定义的 DFRFT 满足上面的 4 条性质,并得到了广泛的应用。在这种定义下,对于长度为 N 的一维离散信号,级次为 a 的 DFRFT 的变换矩阵 \mathbf{K} 定义为

$$\mathbf{K}_{p,m}^a = \sum_{k=0, k \neq [N-1+(N)_2]}^N u_k(p) \exp(-i\pi ka/2) u_k(m), p, m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

式中, $(N)_2 = N \bmod 2$; u_k 为 k 次离散厄密-高斯函数^[30]。对于尺寸为 $N \times N$ 的数字图像 $f_0(m, n)$, 其级次为 a 的 DFRFT 定义为^[32]

$$f_a(p, q) = \sum_{m,n=0}^{N-1} \mathbf{K}_{p,m}^a \mathbf{K}_{q,n}^a f_0(m, n), p, q = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

文献[33]及所引文献较全面地讨论了 FRFT 的数值计算问题。文献[34]提供了计算一维 DFRFT 的 Matlab 程序 Disfrft, 二维的程序可在此基础上扩充而得到。

为了后面讨论的方便,这里以二维情形为例,首先明确分数傅里叶域内相位恢复问题的提法。对于复图像 $f_0(m, n)$ 及其级次为 a 的 DFRFT $f_a(p, q)$, 可将其改写为振幅和复指数乘积的形式

$$f_0(m, n) = g_0(m, n) \exp[i\varphi_0(m, n)], \quad f_a(p, q) = g_a(p, q) \exp[i\varphi_a(p, q)], \quad (3)$$

式中 $g_0(m, n)$, $g_a(p, q)$ 和 $\varphi_0(m, n)$, $\varphi_a(p, q)$ 分别为像素点 (p, q) 的振幅和相位。在不失准确的前提下,将略去 m, n, p, q 等指标。本文研究的相位恢复问题是当给定 $g_{a_j} (j=0, 1, \dots, M)$ 时,如何重构 φ_{a_0} 。 M 为正整数, $a_0=0, 0 < a_j < 2$, 并默认 $a_{j-1} < a_j (j=1, 2, \dots, M)$ 。将级次限定在 0 与 2 之间是考虑到对函数做两次傅里叶变换仅将函数的变量变号 ($x \rightarrow -x$)。为了叙述的方便,在不引起混淆的情况下,本文将用级次组 $\{a_0, a_1, \dots, a_M\}$ 简单地代替上述问题。

上述问题的一个变形是 $f_0(m, n)$ 为实值图像,称为图像恢复。为了保证解的唯一性,并加速迭代过程

的收敛,一般给定 f_0 的支集 $S = \{(m, n) \mid g_0(m, n) \neq 0\}$ 。在天文图像处理 and 衍射成像的研究中,支集 S 经常是容易得到的。在这种情形下,图像恢复问题可表述为给定 S 和 g_{a_j} ($j=1, \dots, M$), 如何重构 f_0 。一维的情形是该问题的特例,这里不再单独列出。本文将主要讨论分数傅里叶域中复值信号和复值图像的相位恢复问题,关于实值图像的研究,见文献[16]。

Y-G 算法是相位恢复中的著名算法^[35],对于酉变换,Y-G 算法与 G-S 算法是等价的;对于非酉变换,Y-G 算法的效果要优于 G-S 算法。Y-G 算法应用于分数傅里叶域中一维复值信号相位恢复问题的研究,取得了优于 G-S 算法的良好效果^[12]。这项研究所用的 DFRFT 是结合 FRFT 的光学实现得到的,由于实际光学系统中光瞳尺寸的有限性,这样得到的 DFRFT 是非酉变换。因此,在这种情况下,Y-G 算法的效果要比 G-S 算法好,且非酉性越强,Y-G 算法的优势越明显。另外,文献[13]通过将连续 FRFT 直接离散化得到了一种 DFRFT,并利用这种 DFRFT 的性质构造了一种求解相位恢复问题的迭代算法并在在一维复值信号的情况下得到了很好的结果。但是,这样定义的离散 FRFT 并不能满足 DFRFT 的性质(a)和(b)。

3 分数傅里叶域中相位恢复问题的研究现状

3.1 一维复值信号的相位恢复

G-S 算法在传统傅里叶域中的应用是为人所熟知的,在算法的执行中,只需将傅里叶变换用分数傅里叶变换 \mathcal{F}^a (a 为 FRFT 的级次)代替,将逆傅里叶变换用 \mathcal{F}^{-a} 代替,即可得到分数傅里叶域中的 G-S 算法^[11]。文献[11]表明,当级次较大时,该算法能很好地收敛;当级次比较小,特别是低于 0.13 时,算法变得不稳定。文献[14]的结果表明,当级次越大(0 与 1 之间的级次),重构相位的精度越高,噪声的影响也不明显;当级次较小时,重构相位的精度越差,噪声的影响也比较显著。

为克服这些问题,文献[15]提出用复值信号多个级次 DFRFT 的振幅来求解相位恢复问题,基本思路是将多个基本 G-S 算法的执行过程在多个级次间串联起来,算法流程图如图 1 所示。本文把这种算法称为串行 G-S 算法。文献[15]尝试了两种级次的取值方案

$$A: a_j = 0.2(j-1),$$

$$B: a_j = 2(j-1)/N, j = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

式中 N 为 2 到 8 之间的整数。通过一个人工构造的一维复值信号,并对信号 DFRFT 的幅值添加均值为 0 的白噪声,文献[15]进行了大量的数值模拟,得到结论

a) 级次数越多,越有利于相位的精确重构;但当超过一定数目(一般为 10)后,这种效果就不再明显;在级次数相等的情况下,级次间的间隔越大,越有利于相位的精确重构。

b) 当噪声较小时,重构相位的精度对级次数目的依赖性比较强;当噪声较大时,这种依赖性不再明显。

研究表明,在 G-S 算法的基本框架下,给定原信号的振幅和它某一级次(在 0 与 2 之间取值)DFRFT 的振幅,并不总能精确地重构相位,特别是当级次靠近 0 或 2 时。但是,在 G-S 算法的基本框架之外,非线性最小二乘方法能够使得对所有级次均能较精确地重构出相位^[36]。

将信号 s_0 和它级次为 a 的 DFRFT 分别为

$$\begin{aligned} s_0[n] &= g_0[n] \exp(i\varphi_0[n]), \\ s_a[m] &= g_a[m] \exp(i\varphi_a[m]), \quad n, m = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (5)$$

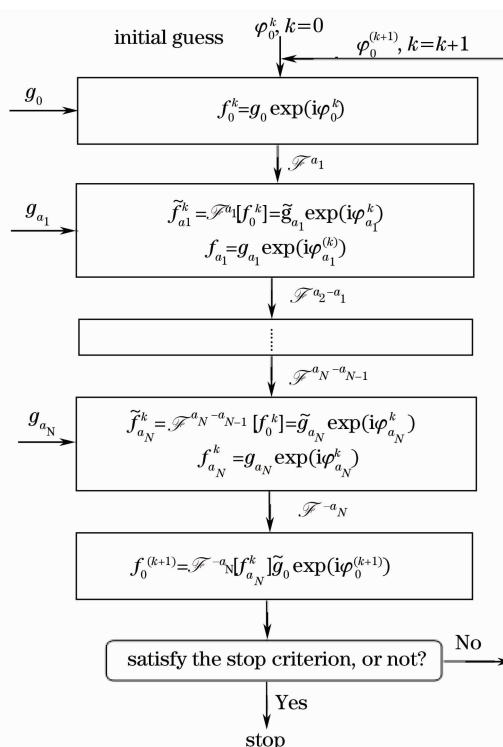


图 1 串行 G-S 算法的流程图

Fig. 1 Flow chart of serial G-S algorithm

假定 $\varphi_0^k \in R^N$ 是对 φ_0 的一个估计 ($k \geq 0$ 为整数, 表示迭代次数), 构造对 s_0 和 s_a 的估计

$$\begin{aligned} s_0^k &= s_0 \exp(i\varphi_0^k), \\ s_a^k &= K^a s_0^k \end{aligned} \quad (6)$$

定义向量函数

$$\mathbf{r}(\varphi_0^k) = \mathbf{g}_a^k - \mathbf{g}_a, \quad (7)$$

式中 $g_a^k = |s_a^k|$ 。这样, 相位恢复问题可以转化为非线性最小二乘问题

$$\min_{\varphi_0^k \in R^N} f(\varphi_0^k) \equiv \mathbf{r}^k \mathbf{r}^k / 2 = \sum_{m=0}^N (r^k[m])^2 / 2, \quad (8)$$

式中 $r_k \equiv r(\varphi_0^k)$ 。对于这类典型的非线性最小二乘问题, 已有不少公认的优秀算法, 如 Gauss-Newton 算法和 Levenberg-Marquardt (L-M) 算法。这里采用 Moré 形式的 L-M 算法。简要地说, L-M 算法是通过解方程

$$(\mathbf{J}^k \mathbf{J}^k + \mu_k \mathbf{I}) \Delta \varphi_0^k = -\mathbf{J}^k \mathbf{r}^k, \quad (9)$$

更新 φ_0^k 为

$$\varphi_0^{k+1} = \varphi_0^k + \Delta \varphi_0^k, \quad (10)$$

式中 \mathbf{J}^k 为目标函数对于 φ_0^k 的雅克比矩阵, $\mu_k \geq 0$ 为 L-M 参数, \mathbf{I} 为 $N \times N$ 的单位矩阵^[37,38]。其中雅克比矩阵元的表达式为^[36]

$$J_{p,q}^k \equiv \partial r^k[p] / \partial \varphi_0^k[q] = \partial g_a^k[p] / \partial \varphi_0^k[q] = -\text{Im}[K_{p,q}^a \exp(-i\varphi_0^k[p]) s_0^k[q]]. \quad (11)$$

式中 $\text{Im}[\cdot]$ 表示取复数的虚部。

文献[36]对文献[12]中构造的 7 个一维复信号和其他更多的信号进行了数值模拟, 包括信号振幅含有高斯噪声的情况, 结果表明, 这种方法是极其有效的。图 2 给出了该算法对于复值信号

$$h(x) = \begin{cases} (1+x)\exp(ix) & |x| \leq 0.8 \\ 0 & \text{others} \end{cases} \quad (12)$$

的结果以及与 G-S 算法所得结果的比较。图 2 中误差的计算采用

$$E_k = 1 / |S| \sum_{n \in S} |\varphi_0^k[n] - \varphi_0[n] - c_k|, \quad (13)$$

式中 $S = \{n \mid g_a[n] \neq 0\}$ 为原信号的支集, $|S|$ 为 S 的元素数,

$$c_k = 1 / |S| \sum_{n \in S} (\varphi_0^k[n] - \varphi_0[n]). \quad (14)$$

在式(13)中扣除 c_k 是为了消除相位分布因附加一个常数而带来的不确定性。图 2(a)为振幅不含噪声时的结果。显然, 对于满足 $7/20 \leq a \leq 33/20$ 的级次, G-S 算法能够得到相当精确的行为(3000 次迭代后的误差为 $10^{-2} \sim 10^{-15}$ 的数量级), 但对其他级次的效果则很差(3000 次迭代后的误差也仅为 10^{-1} 的数量级)。而基于最小二乘的算法则对所有级次都能够得到相当精确的结果(误差为 $10^{-2} \sim 10^{-6}$, L-M 算法采用 Matlab 子函数 *lsqnonlin* 默认的停止准则, 这个准则是相当保守的)。图 2(b)是振幅含有均值为 0 和标准方差为 10^{-3} 的高斯噪声时的结果, 从中可以得到类似的结论。

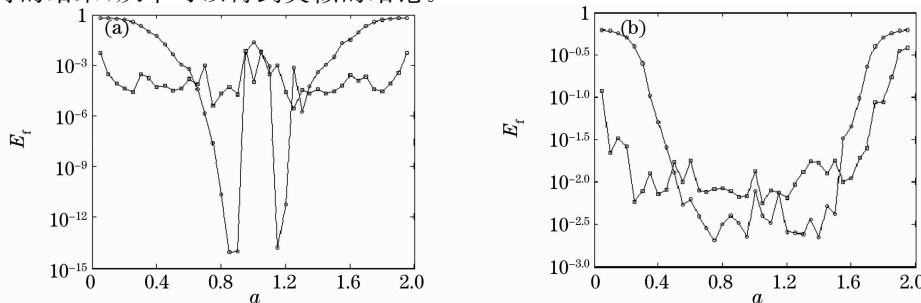


图 2 基于最小二乘的算法(方块)与 G-S 算法(圆圈, 3000 次迭代)的比较。(a)信号振幅不含噪声的情况;
(b)信号振幅含高斯噪声的情况

Fig. 2 Comparison between the performance of least square method (squares) and the G-S algorithm (circles, 3000 iterations).

(a) noise-free amplitudes; (b) noisy amplitudes contaminated by Gaussian noise

3.2 二维复值图像的相位恢复

并行 G-S 算法的具体方法是将多个 G-S 基本算法并行地实施,图 3 以两个级次的情况为例给出了这种并行 G-S 算法的流程图^[16]。对于级次更多的情况,除了对每个级次都执行基本 G-S 算法外,主要的步骤是更新相位

$$\varphi_0^{k+1} = (\varphi_{0,1}^{k+1} + \varphi_{0,2}^{k+1} + \dots + \varphi_{0,M}^{k+1})/M. \quad (15)$$

用图 4 中的图像构造用于数值模拟的复图像。该图像取自 Matlab 文件,其尺寸为 64×64 。构造尺寸为 128×128 的矩阵 \mathbf{g}_0 , 其中央的 64×64 子阵的像素值均为 1, 其余处像素值均为零。通过线性变换将图 1 中图像的像素值变换至区间 $[-1, 1]$ (最大像素值对应于 1, 最小像素值对应于 -1), 并将其嵌入矩阵 \mathbf{g}_0 的中央 64×64 部分, 记所得矩阵为 φ_0 。使用 \mathbf{g}_0 和 φ_0 构造复图像 $f_0 = \mathbf{g}_0 \exp(i\varphi_0)$, 其支集 $S = \{(m, n) | 33 \leq m, n \leq 96\}$ 。

仿照(13)和(14)式,定义刻画重构相位精度的误差

$$\Delta_k = 1/|S| \sum_{(m,n) \in S} |\varphi_0^k(m,n) - \varphi_0(m,n) - d_k|, \quad (16)$$

式中

$$d_k = 1/|S| \sum_{(m,n) \in S} [\varphi_0^k(m,n) - \varphi_0(m,n)]. \quad (17)$$



图 4 用于构造复图像的实图像

Fig. 4 Real image for the construction of the complex image

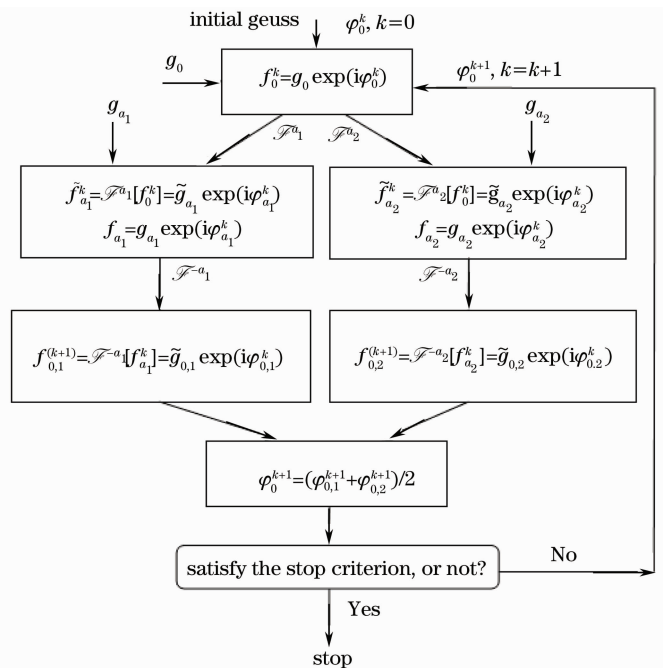


图 3 并行 G-S 算法的流程图

Fig. 3 Flow chart of parallel G-S algorithm

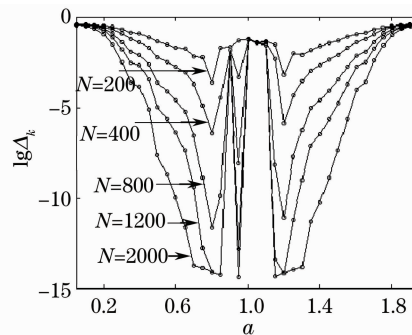


图 5 经典 G-S 算法对于问题

$\{0, a\} (a \in 1/20:1/20:39/20)$ 所得到的结果

Fig. 5 Results obtained by traditional G-S algorithm for problems $(0, a)$ ($a \in 1/20:1/20:39/20$)

首先考察经典 G-S 算法的效果。使用 Matlab 中的符号,把 DFRFT 级次的区间 $(0, 2)$ 离散为 $1/20:1/20:39/20$ 。图 5 给出了与这些级次对应的迭代 200 次、400 次、800 次、1200 次和 2000 次后重构相位的误差。可以发现:1)对于较多的级次,用 G-S 算法迭代 2000 次或更少的次数便可以得到相当精确的结果,个别情形的 Δ_k 可达 10^{-15} 。2)定量的结果表明,对于级次 $a \in \{1/20:1/20:4/20, 36/20:1/20:39/20\}$,即使迭代 2000 次,所得相位的 Δ_k 仍处于 10^{-1} 的数量级;对于级次 $a \in \{5/20, 18/20, 20/20, 21/20, 22/20, 36/20\}$,迭代 2000 次,所得相位的 Δ_k 也仅是处于 10^{-2} 的数量级。

对于接近于 0 和 2 的级次, G-S 算法的不佳表现在文献中已有报道^[11,14]。但对于接近 1 的某些级次, G-S 算法仍不能很快收敛,这是在相关文献中未见报道的。

图 6 与图 7 所示的是利用三个级次的 DFRFT 的振幅,分别通过并行和串行 G-S 算法得到的误差 Δ_k 曲线;各子图所利用的复图像的 DFRFT 的振幅的级次分别为 $\{0, 1/20, a\}$, $\{0, 5/20, a\}$, $\{0, 10/20, a\}$, $\{0, 15/20, a\}$, $\{0, 20/20, a\}$, $\{0, 25/20, a\}$, $\{0, 30/20, a\}$, $\{0, 35/20, a\}$ 和 $\{0, 39/20, a\}$, 其中 $a \in \{1/20:1/20:39/20\}$ 。在这些级次组中,除了 0 之外,另一个固定的级次取的是关于 1 对称的几个值,如 $\{0, 1/20, a\}$ 中的 $1/20$ 与 $\{0, 39/20, a\}$ 中的 $39/20$ 。与图 5 相比,图 6 的 6 个子图中所示 Δ_k 曲线对应的迭代次数分别是其 $1/2$,图 7 的 6 个子图中所示 Δ_k 曲线对应的迭代次数分别是其 $2/3$ 。这样选择迭代次数是为了在相同的运算时间下比较这 3 种算法(事实上,执行一次并行和串行 G-S 迭代所需的 DFRFT 计算的次数是传统 G-S 迭代的 2 倍和 1.5 倍,而迭代中最主要的时间开销是 DFRFT 的计算)。

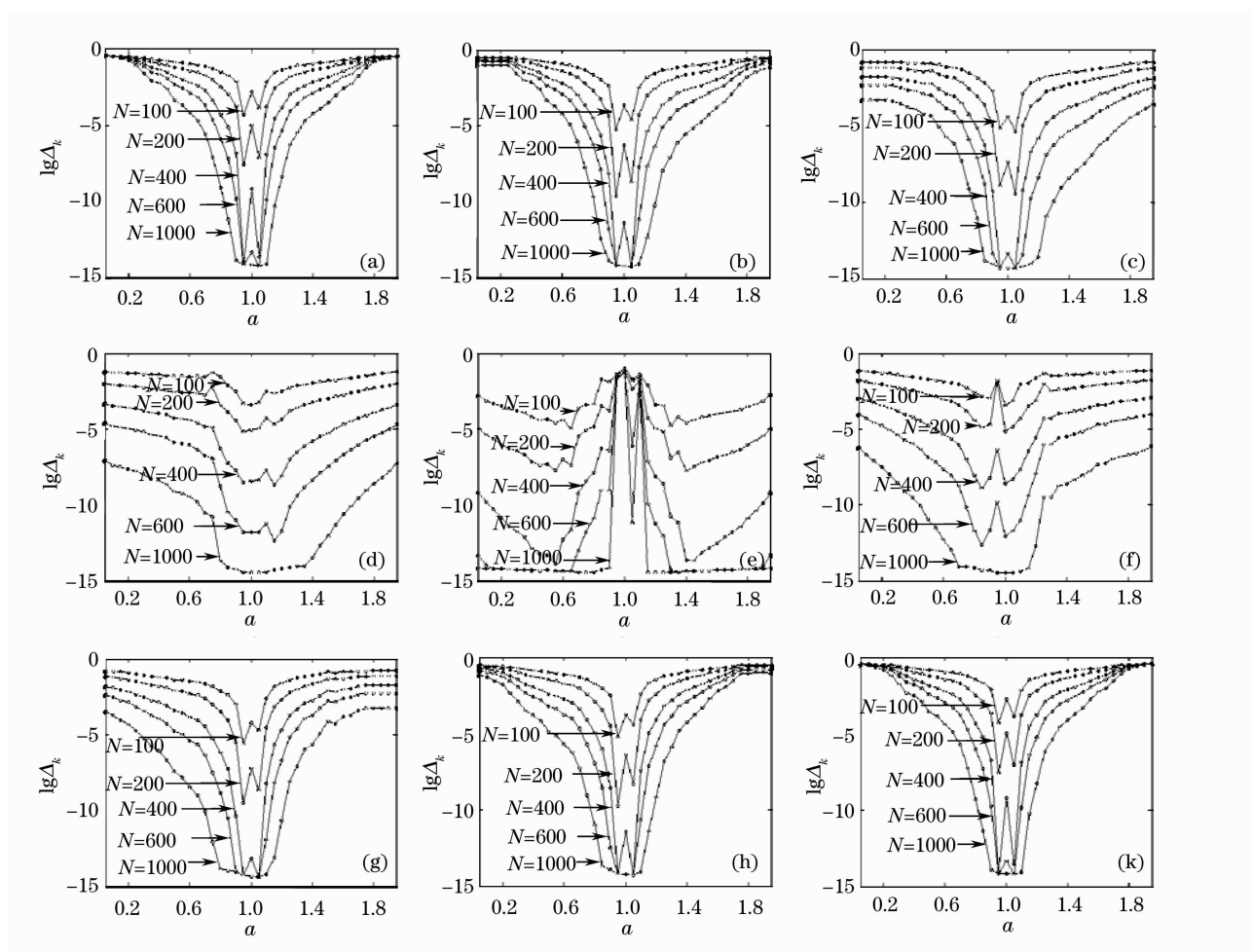


图 6 并行 G-S 算法得到的结果。(a) $\{0, 1/20, a\}$; (b) $\{0, 5/20, a\}$; (c) $\{0, 10/20, a\}$; (d) $\{0, 15/20, a\}$;
(e) $\{0, 20/20, a\}$; (f) $\{0, 25/20, a\}$; (g) $\{0, 30/20, a\}$; (h) $\{0, 35/20, a\}$; (k) $\{0, 39/20, a\}$

Fig. 6 Results obtained by parallel G-S algorithm. (a) $\{0, 1/20, a\}$; (b) $\{0, 5/20, a\}$; (c) $\{0, 10/20, a\}$;
(d) $\{0, 15/20, a\}$; (e) $\{0, 20/20, a\}$; (f) $\{0, 25/20, a\}$; (g) $\{0, 30/20, a\}$; (h) $\{0, 35/20, a\}$; (k) $\{0, 39/20, a\}$

由图 6 和图 7 可得到 2 点结论:1)与图 5 相比,对大多数情况而言,增加一个级次的 DFRFT 的振幅,能较大地提高重构相位的精度;当 3 个级次的间隔较大时(一般大于 $5/20$),这种效果更加明显。特别指出,这里所说的级次间的间隔是关于 1 对称的。准确地说,对于级次 a , $b \in [0, 2)$, 这里的间隔指 $\min(|a-b|, |a-(2-b)|)$ 。以图 7(c)为例,对于 $a = 19/20, 1, 21/20$, $N = 140$ 时所得相位的误差即可达到 10^{-10} 的数量级。2)对大多数情况而言,串行 G-S 算法的收敛速度比并行 G-S 算法要快,适用的级次范围也更广。通过图 6(c)与图 7(c)来说明这一点。由两个子图可以发现,串行 G-S 算法对所有级次在迭代 1000 次之后,所得结果的误差在 10^{-5} 的数量级及以下;而并行 G-S 算法在迭代 2000 次之后,仍有相当部分级次对应的误差在 10^{-5} 以上。

我们还构造了更多的复图像,并用上述方法研究了这3类G-S算法的执行效果,所得结果与上面的类似。也可以考虑级次个数大于3的情形,但这时级次的组合更加繁多,不易归纳特点。

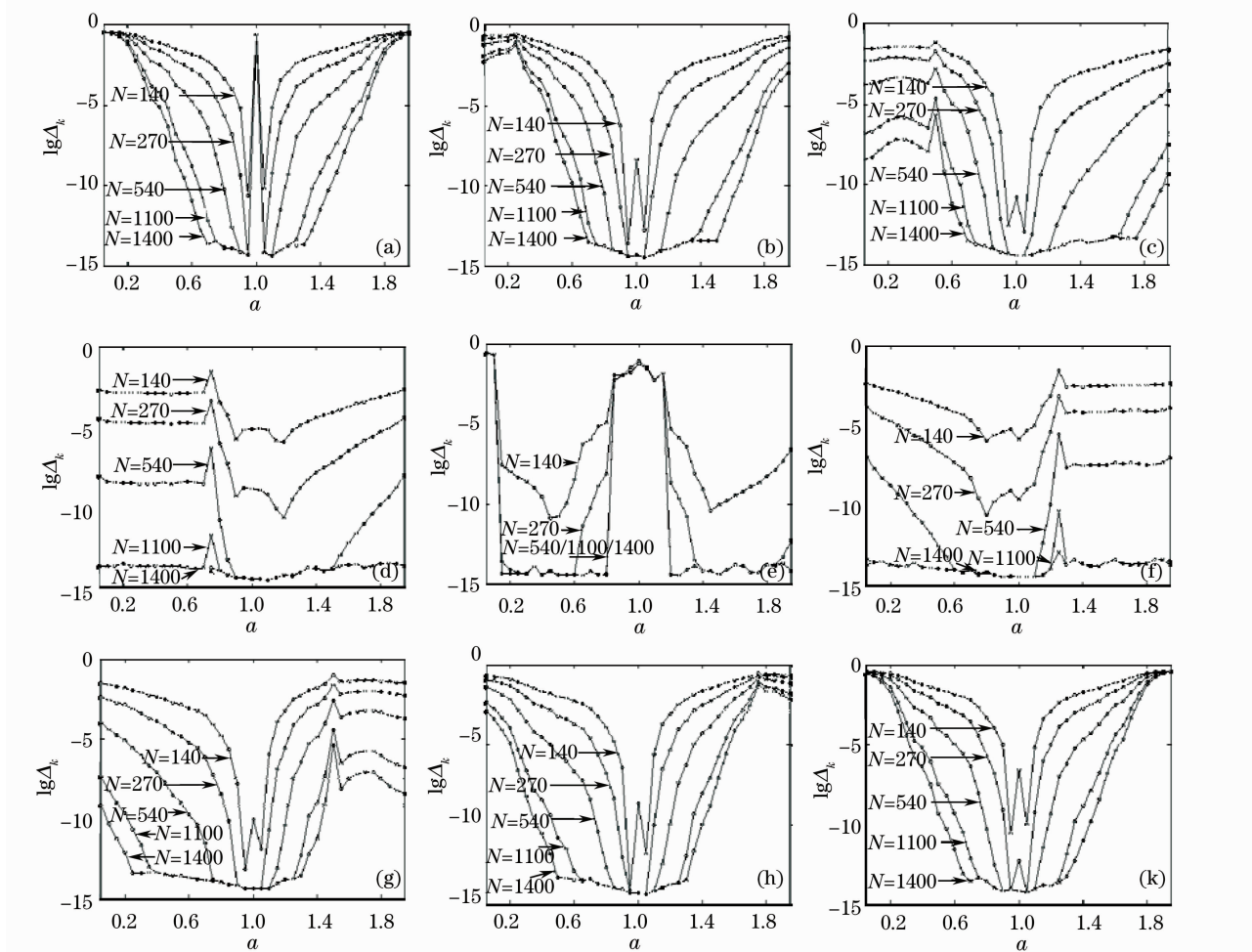


图7 串行G-S算法得到的结果。(a){0,1/20,a};(b){0,5/20,a};(c){0,10/20,a};(d){0,15/20,a};(e){0,20/20,a};(f){0,25/20,a};(g){0,30/20,a};(h){0,35/20,a};(i){0,39/20,a};(j){0,45/20,a};(k){0,50/20,a}

Fig. 7 Results obtained by serial G-S algorithm. (a){0,1/20,a};(b){0,5/20,a};(c){0,10/20,a};(d){0,15/20,a};(e){0,20/20,a};(f){0,25/20,a};(g){0,30/20,a};(h){0,35/20,a};(i){0,39/20,a};(j){0,45/20,a};(k){0,50/20,a}

4 结 论

对分数傅里叶域内复值信号和复值图像相位恢复问题的研究现状做了较详细的讨论。这方面研究的一个重要思路是借鉴经典傅里叶域中较成功的算法,如G-S算法和Y-G算法,有并行和串行两种实施方法。针对二维复值图像和DFRFT级次个数为3的情形,较系统地研究了这两种方法。结果表明,当3个级次在关于1对称的意义下的间隔较大时,这两种算法能重构出相当精确的相位;串行G-S算法的整体性能优于并行G-S算法。

在这类经典算法的框架之外,还讨论了一种基于非线性最小二乘的算法。这种算法首先将问题转化为最小二乘形式的最优化问题,然后采用Moré形式的L-M算法求解。对于一维复值信号的情况,基于任意两个级次的DFRFT振幅,本算法能得到相当精确的相位;即使对振幅含有中等噪声的情况,所得结果也比较满意。将这种算法推广到二维复值图像和噪声比较严重的情况是很有意义的。

参 考 文 献

- 1 H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky, M. A. Kutay. The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal

- Processing [M]. New York; Wiley, 2000
- 2 V. Namias. The fractional Fourier transform and its application to quantum mechanics [J]. *J. Inst. Maths. Appl.*, 1980, **25**: 241~265
 - 3 A. C. McBride, F. H. Kerr. On Namias's fractional Fourier transform[J]. *IMA J. Appl. Math.*, 1987, **39**: 159~175
 - 4 H. M. Ozaktas, D. Mendlovic. Fourier transforms of fractional order and their optical interpretation [J]. *Opt. Commun.*, 1993, **101**: 163~169
 - 5 D. Mendlovic, H. M. Ozaktas. Fractional Fourier transforms and their optical implementation; I [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(9): 1875~1880
 - 6 H. M. Ozaktas, D. Mendlovic. Fractional Fourier transforms and their optical implementation; II [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(12): 2522~2531
 - 7 H. M. Ozaktas. Image rotation, wigner rotation, and the fractional Fourier transform [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(10): 2181~2186
 - 8 D. Mendlovic, H. M. Ozaktas, A. W. Lohmann. Gradient-index fibers, wigner distribution functions, and the fractional Fourier transform [J]. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(26): 6188~6193
 - 9 L. B. Almeida. The fractional Fourier transform and time-frequency representation [J]. *IEEE Trans. Signal Process.*, 1994, **42**(11): 3084~3091
 - 10 H. M. Ozaktas, B. Barshan, D. Mendlovic *et al.*. Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**(2): 547~559
 - 11 Z. Zalevsky, D. Mendlovic. Gerchberg-Saxton algorithm applied in the fractional Fourier or the Fresnel domain [J]. *Opt. Lett.*, 1996, **21**(12): 842~844
 - 12 B. Dong, Y. Zhang, B. Gu *et al.*. Numerical investigation of phase retrieval in a fractional Fourier transform [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1997, **14**(10): 2709~2714
 - 13 W. Cong, N. Chen, B. Gu. Recursive algorithm for phase retrieval in the fractional Fourier transform domain [J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(29): 6906~6910
 - 14 M. G. Ertosun, H. Atli, H. M. Ozaktas *et al.*. Complex signal recovery from multiple fractional Fourier-transform intensities [J]. *Opt. Commun.*, 2005, **244**: 61~70
 - 15 M. G. Ertosun, H. Atli, H. M. Ozaktas *et al.*. Complex signal recovery from multiple fractional Fourier-transform intensities [J]. *Appl. Opt.*, 2005, **44**(23): 4902~4908
 - 16 T. H. Liao, Q. Gao. Image recovery from double amplitudes in fractional Fourier domain [J]. *Chin. Phys.*, 2006, **15**(2): 347~352
 - 17 Cui Yuanfeng, Liao Tianhe, Gao Qiong. Hybrid input-output algorithm for phase retrieval of 2-D complex image in fractional Fourier domain [J]. *J. Appl. Opt.*, 2008, **29**(4): 653~656
崔远峰, 廖天河, 高穹. 分数傅里叶域中二维复图像相位恢复的混合输入输出算法 [J]. *应用光学*, 2008, **29**(4): 653~656
 - 18 Cui Yuanfeng. The Phase Retrieval Problem of Complex Images in The Fractional Fourier Domain [D]. Zhengzhou: Information and Engineering University, 2008
崔远峰. 分数傅里叶域内复值图像的相位恢复 [D]. 郑州: 解放军信息工程大学, 2008
 - 19 R. Gerchberg, W. Saxton. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures [J]. *Optik*, 1972, **35**: 237~246
 - 20 J. R. Fienup. Phase retrieval algorithms: a comparison [J]. *Appl. Opt.*, 1982, **21**(15): 2758~2769
 - 21 Yang Guozhen, Gu Benyuan. On the amplitude-phase retrieval problem in optical system [J]. *Acta. Physica. Sinica.* 1981, **30**(3): 410~413
杨国桢, 顾本源. 光学系统中振幅和相位的恢复问题 [J]. *物理学报*, 1981, **30**(3): 410~413
 - 22 D. C. Dobson. Phase reconstruction via nonlinear least-squares [J]. *Inverse Probl.*, 1992, **8**: 541~557
 - 23 B. Hofmann, B. Kaltenbacher, C. Poschl *et al.*. A convergence rates result for tikhonov regularization in banach spaces with non-smooth operators [J]. *Inverse Probl.*, 2007, **23**: 987~1010
 - 24 H. H. Bauschke, P. L. Combettes, D. R. Luke. Phase retrieval, error reduction algorithm, and Fienup variants; a view from convex optimization [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2002, **19**(7): 1334~1345
 - 25 T. Alieva, M. J. Bastiaans, L. Stankovic. Signal reconstruction from two close fractional Fourier power spectra [J]. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2003, **51**(1): 112~123
 - 26 U. Gopinathan, G. Sita, T. J. Naughton *et al.*. Noninterferometric phase retrieval using a fractional Fourier system [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2008, **25**(1): 108~115
 - 27 D. F. McAlister, M. Beck, L. Clarke *et al.*. Optical phase retrieval by phase-space tomography and fractional-order Fourier transforms [J]. *Opt. Lett.*, 1995, **20**(10): 1181~1183
 - 28 A. Semichaevsky, M. Testorf. Phase-space interpretation of deterministic phase retrieval [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2004, **21**(11): 2173~2179
 - 29 C. Candan, M. A. Kutay, H. M. Ozaktas. The discrete fractional Fourier transform [J]. *IEEE Trans. Signal Process.*,

- 2000, **48**(5): 1329~1337
- 30 S. C. Pei, J. J. Ding. Closed-form discrete fractional and affine fourier transforms [J]. *IEEE Trans. Signal Process*, 2000, **48**(5): 1338~1353
- 31 S. C. Pei, M. H. Yeh, C. C. Tseng. Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections[J]. *IEEE Trans. Signal Process*, 1999, **47**(5): 1335~1348
- 32 S. C. Pei, M. H. Yeh. Two dimensional discrete Fourier transform [J]. *Signal Process*, 1998, **67**: 99~108
- 33 A. Bultheel, A. H. Sulbaran. Computation of fractional Fourier transform [J]. *Appl. And Comp. Harmon. Anal*, 2004, **16**: 182~202
- 34 A. Bultheel, A. H. Sulbaran. <http://www.cs.kuleuven.be/cwis/research/nalag/research/software/FRFT> (2004)
- 35 Gerchberg Saxton, Yang Gu. Algorithms for phase retrieval in a nonunitary transform system; a comparison [J]. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(2): 209~218
- 36 Q. Gao, T. H. Liao, Y. F. Cui. Solving the phase-retrieval problem of a complex signal in the fractional Fourier domain by nonlinear least-squares [J]. *Opt. Lett.*, 2008, **33**(15): 1899~1901
- 37 J. Nocedal, S. J. Wright. Numerical Optimization [M]. 1999, Berlin: Springer
- 38 Yuan Yaxiang, Sun Wenyu. Theory and Methods of Optimization [M]. Beijing: Science Press, 1997
袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1997