

二维小波变换在解调双载频条纹图中的应用

蔡义祥 陈文静 李思坤 赵 玥 许罗鹏

(四川大学光电子科学技术系, 四川 成都 610064)

摘要 从小波变换的基本原理出发,分析采用一维复 Morlet 小波变换在解调具有双载频分量的倾斜条纹图中存在的问题,利用二维小波变换具有方向选择的特点,提出采用由一系列二维复 Morlet 小波构造出的二维 Fan 小波对此类条纹图进行解调的方法。并对比了二者在处理倾斜变形条纹(含两个载频分量)的能力。结果表明,二维 Fan 小波变换由于在进行尺度伸缩的同时,还具有多个角度上的方向特性,可以提取特定方向上的信号,在解调倾斜变形条纹图中包含的相位信息中具有优势,可以更好地获取有用信息。

关键词 图像处理; 三维面形测量; 一维小波; 二维 Morlet 小波; 二维 Fan 小波

中图分类号 O438 **OCIS** 100.7410 120.2560 **文献标识码** A

Application of Two-Dimensional Continuous Wavelet Transform in Demodulating Fringe Pattern with Two Frequency Components

Cai Yixiang Chen Wenjing Li Sikun Zhao Yue Xu Luopeng

(Department of Opto-Electronics, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China)

Abstract Based on the basic principle of wavelet transform, the shortage of one-dimensional complex Morlet wavelet transform in demodulating the tilt fringe pattern with two carrier frequencies was analyzed. Then the method of two-dimensional (2-D) fan wavelet made up of a series of 2-D complex Morlet wavelet was proposed to demodulate such patterns. We compared the two methods through processing deformed fringe patterns with two carrier frequencies. The results show 2-D fan wavelet has better ability to obtain the useful information because it can analyze the signals by adjusting both the scaling factor and rotation angle to reach the optimal match between the singles and wavelet functions. That is, 2-D Fan wavelet has advantages to dispose two-frequency components grating patterns because of its multiple-directional property.

Key words image processing; three-dimensional shape measurement; one-dimensional wavelet; two-dimensional Morlet wavelet; two-dimensional Fan wavelet

1 引言

光学三维传感因具有非接触、精度高、测量速度快、自动化程度高等优点,广泛应用于机器视觉、自动加工、工业自动检测、实物仿型、生物医学等领域。傅里叶变换轮廓术^[1]由于只需获取一幅变形条纹图就可提取被测物体的三维面形信息,受到人们广泛关注并应用到光学条纹分析中。但傅里叶变换缺乏获取局域信息的能力,当条纹图中有用的频谱分量和无用信息之间存在混叠时,无法从有混叠的条纹中获取正确的相位信息。因此引入加窗傅里叶变换,但固定的窗口大小不能最优化地解决频谱混叠问题。由于小波变换具有良好的时-频局域分析特性,在处理非平稳信号方面具有先天的优势,近年被广泛应用于信号处理领域^[2]。随后,一维连续小波变换被引入到基于结构光投影的光学三维测量中,称为小波变换轮廓术。其实质是计算被处理条纹和子小波的相关操作,通过分析小波系数,从小波“脊”信息中求得条纹中包含的相位信息。近年来小波变换轮廓术得到深入研究。人们采用小波变换从混叠信号中提取有用信息^[2~4],消除条纹图的零频分量^[5],利用小波对噪声的免疫力处理噪声信号^[6]等。但是,当用一维小波变换处理倾斜条纹时(这在实际

收稿日期: 2009-12-28; 收到修改稿日期: 2010-01-28

基金项目: 国家自然科学基金(60677028)资助课题。

作者简介: 蔡义祥(1984—),男,硕士研究生,主要从事三维面形测量等方面的研究。E-mail: caiyx0611@sina.com

导师简介: 陈文静(1968—),女,教授,博士生导师,主要从事光信息处理、三维测量等方面的研究。

E-mail: chenwj0409@163.com

测量中经常遇见),由于沿小波移动方向上,条纹周期增大,等效波长减小,会减小测量精度,当出现局部频谱混叠时,甚至无法得到正确的结果。目前人们开展了二维连续小波变换在三维测量中的研究。由于二维小波除了可以同时两个方向上调整其尺度伸缩因子,还可以进行旋转操作,更容易得到准确的小波“脊”。因此二维小波开始受到广泛关注,被应用于三维面形测量中。

本文将二维小波应用于具有双载频分量的倾斜变形条纹的处理。分析一维复 Morlet 小波变换在解调具有双载频分量的倾斜条纹图中存在的问题,将二维 Fan 小波变换用于解调具有双载频分量的倾斜变形条纹图中包含的相位信息,可以获取更好解调效果。

2 基本原理

2.1 一维小波变换

小波变换轮廓术的测量光路如图 1 所示。变形结构光场可表示为

$$g(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[2\pi f_0 x + \phi(x, y)], \quad (1)$$

式中 f_0 为光栅像的载频, $a(x, y)$ 为物体条纹的背景分布, $b(x, y)$ 为对比度, $\phi(x, y)$ 为物体高度分布。对 $g(x, y)$ 沿条纹结构方向作一维小波变换, 设 $g(x, y)$ 在此方向上的一维分布表示为 $f(x)$, 其连续小波变换系数定义为

$$W_f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(x) \bar{\Psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \langle f(x), \bar{\Psi}_{a,b}(x) \rangle, \quad (2)$$

式中 $\bar{\Psi}(t)$ 为母小波 $\psi(x)$ 的复共轭, a 为小波函数的尺度伸缩因子, b 为平移因子。一维连续小波变换系数 $W_f(a, b)$ 的频域表示形式为

$$W_f(a, b) = \sqrt{a} \int F(\omega) \hat{\Psi}(a\omega) \cdot \exp(j\omega b) d\omega, \quad (3)$$

式中 $F(\omega)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶谱, $\hat{\Psi}(a\omega) = \int \bar{\Psi}(x') \exp(j\omega a x') dx', x' = \frac{x-b}{a}$ 。可见小波变换在频域表示为加权滤波操作。

若 $W_f(a, b)$ 的实部和虚部分别记为 $\text{Re}[W_f(a, b)]$ 和 $\text{Im}[W_f(a, b)]$, 则小波系数的幅值 $A(a, b)$ 和相位 $\varphi(a, b)$ 可分别表示为

$$A(a, b) = \sqrt{\{\text{Im}[W_f(a, b)]\}^2 + \{\text{Re}[W_f(a, b)]\}^2}, \quad (4)$$

$$\varphi(a, b) = \arctan\{\text{Im}[W_f(a, b)] / \text{Re}[W_f(a, b)]\}.$$

沿尺度轴方向上, 不同位置的小波变换幅值的最大值的连线定义为小波变换的“脊”。“脊”所对应的 a 就是最佳尺度, 记作 a_{rb} 。提取脊所对应的相位值, 得到含有物体高度信息的调制相位, 表示为

$$\phi(b) = \varphi(a_{rb}, b). \quad (5)$$

由于小波变换在空域描述为相关运算, 频域则对应为滤波操作^[7,8]。因此用一维小波变换处理具有双分量的倾斜条纹时, 由于沿小波移动方向上, 条纹周期增大, 等效波长减小, 会减小测量精度, 当存在严重局部频谱混叠时, 甚至无法得到正确的结果。

我们模拟了一维小波变换处理倾斜条纹图的情况, 并将之与处理单分量直条纹图对比。模拟图像尺寸: 256 pixel × 256 pixel, 条纹周期为 15 pixel。模拟物体如图 2(a) 所示。受到其调制的单分量条形条纹如图 2(b) 所示, 图 2(c) 和 (d) 为第 60 行 (100~145 列) 对应强度和局部频谱, 恢复出的面形及其误差分布分别如图 2(e) 和 (f) 所示。当条纹发生倾斜时, 沿小波变换方向条纹周期增大, 等效波长变大, 条纹分辨率变低, 测量精度降低。图 3(a) 为模拟的倾斜变形条纹图 (倾角 10°), 图 3(b) 和 (c) 为第 60 行 (100~145 列) 对应的强度和局部频谱。由于周期增大, 局部频谱存在一定混叠, 从倾斜条纹中恢复的形状误差较大。图 3(d) 和 (e) 分别为恢复出的面形及其误差分布。综上所述, 在处理倾斜条纹时, 应该选择二维小波变换。

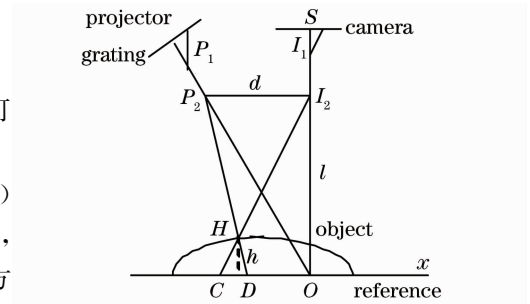


图 1 测量系统光路图

Fig. 1 Schematic diagram of optical geometry

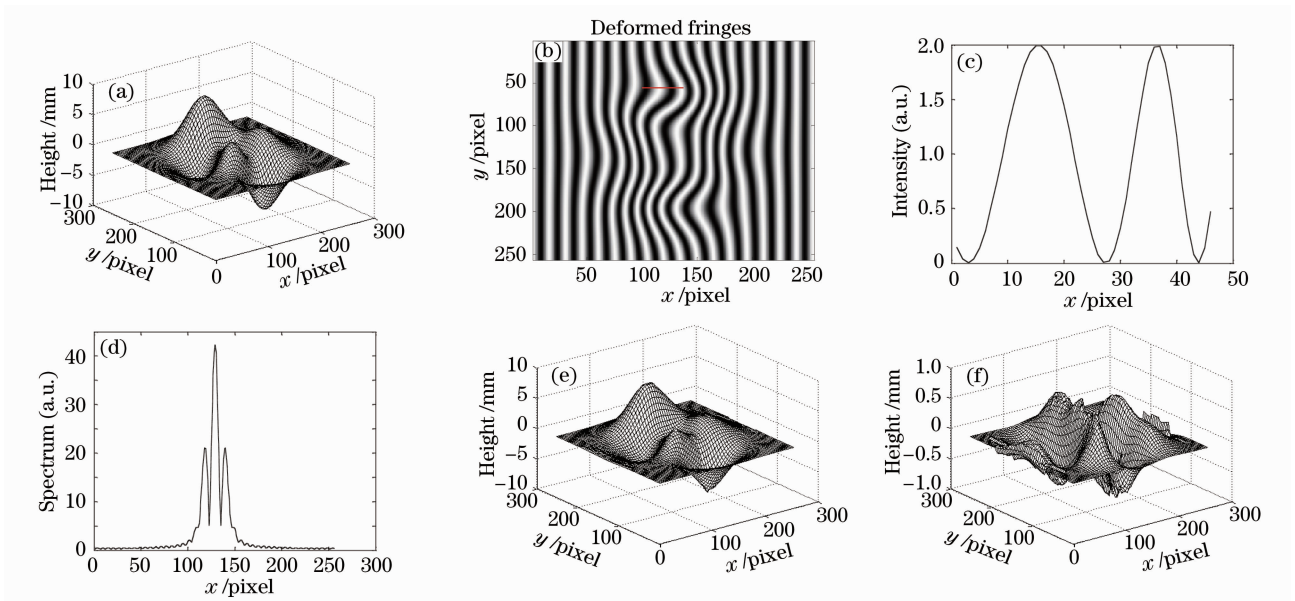


图2 (a)模拟物体,(b)单分量变形条纹,(c)第60行中(100~145列)对应的强度,(d)第60行中(100~145列)的局部频谱,(e)恢复出的面形,(f)误差分布

Fig. 2 (a) Simulated object, (b) deformed fringes with one frequency component, (c) local intensity from 100th to 145th column of the 60th row fringe, (d) local spectrum from 100th to 145th column of the 60th row fringe, (e) restored object, (f) error distribution

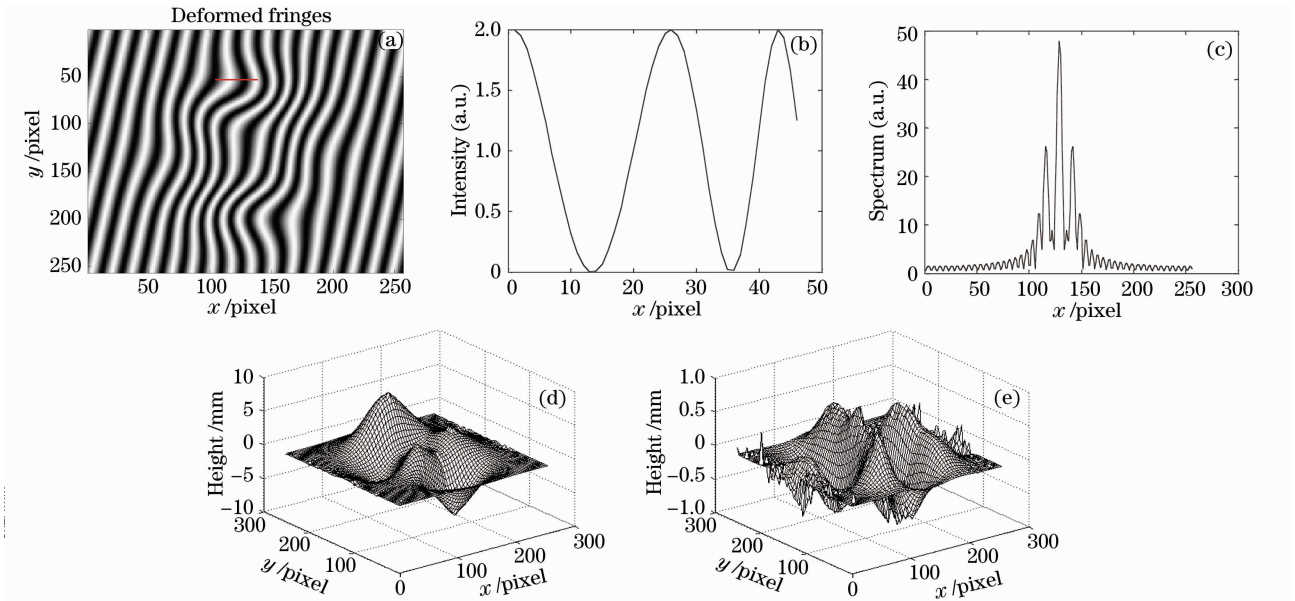


图3 (a)双分量变形条纹,(b)第60行中(100~145列)对应的强度,(c)第60行中(100~145列)的局部频谱,(d)恢复出的面形,(e)误差分布

Fig. 3 (a) Deformed fringe with two frequency components, (b) local intensity from 100th to 145th column of the 60th row fringe, (c) local intensity from 100th to 145th column of the 60th row fringe, (d) local spectrum from 100th to 145th column of the 60th row fringe, (e) restored object, (f) error distribution

2.2 二维小波变换

二维小波变换在进行尺度伸缩的同时,还可进行角度旋转,但要引进旋转因子。因此,二维小波变换可定义为

$$W(b, s, \theta) = \frac{1}{s^2} \iint f(x, y) \psi\left(\frac{x-b_x}{s}, \frac{y-b_y}{s}, r_\theta\right) dx dy = \frac{1}{s^2} \iint f(X) \psi[s^{-1} r_\theta^{-1}(X-b)] dX, \quad (6)$$

小波系数是一个 4 维数据,提供了更丰富的信息。式中 $X = (x, y)^T$, $b = (b_x, b_y)^T$, b_x, b_y 分别为 x, y 方向上的位移因子。而尺度伸缩因子为 sr_θ , $r_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 为角度因子, θ 为旋转角。由于 $f(X) = \int_{-\infty}^{\infty} F(W) \exp(jWX) dW$, $W = [\omega_x, \omega_y]$ 为角频率。则

$$W(b, s, \theta) = \frac{1}{s^2} \iiint F(W) \exp(jWX) dW \psi[s^{-1} r_\theta^{-1} (X - b)] dX \quad (7)$$

令 $(X - b) s^{-1} r_\theta^{-1} = X'$, 则

$$W(b, s, \theta) = r_\theta \iiint F(W) \exp[jW(sr_\theta X' + b)] dW \psi(X') dX' = r_\theta \iiint F(W) \exp(jWb) dW \psi(X') \exp(jWsr_\theta X') dX', \quad (8)$$

设 $\int \psi(X') \exp(jWsr_\theta X') dX' = \Psi(sr_\theta W)$, 则

$$W(b, s, \theta) = r_\theta \iiint_r F(W) \Psi(sr_\theta W) \exp(jWb) dW. \quad (9)$$

由(9)式可以看出二维小波变换除尺度伸缩和平移外,旋转因子的存在还使得二维连续小波变换具有“极化分析”的能力。可以选定特定方向上的信号进行处理。所以在分析倾斜条纹图中采用二维小波比一维小波更具优越性。图 4 为倾斜条纹的频谱分布示意图,设倾斜条纹的载频为 f_x, f_y , 则变形条纹的频谱分布在与 f_x 方向呈一定夹角的方向上。二维连续小波变换引入的旋转因子 θ , 通过调整子小波函数的尺度因子和自身的旋转方向,使得该子小波所对应的滤波窗能最佳地滤除每一局部变形条纹中的基频分量。此时得到的小波“脊”最准确,从中得到的相位值最佳,从而准确获取三维信息面形。

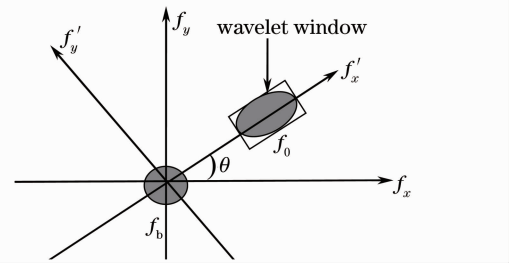


图 4 斜条纹频谱分布图

Fig. 4 Spectrum distribution of oblique fringe pattern

复 Morlet 小波在空域和频域都有很好的局域特性,是三维面形测量中常用的小波。我们采用由一系列二维复 Morlet 小波构造出的二维 Fan 小波对倾斜条纹图进行解调。

二维 Fan 小波由一系列不同角度的二维 Morlet 小波构成,表示为^[6]

$$\psi_F(x, y) = \sum_{j=0}^{N_\theta-1} \exp[ik_0(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j)] \exp\left(-\frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad (10)$$

其傅里叶频谱表示为

$$\hat{\psi}_F(s, r) = \sum_{k=0}^{N_\theta-1} \exp\{-1/2[(r - k_0 \cos \theta_k)^2 + (s - k_0 \sin \theta_k)^2]\}, \quad (11)$$

式中考虑容许条件, k_0 的取值在 5 ~ 6 之间^[6], 取 $k_0 = 5.336$, θ_j 为旋转角, 可以进行调整, 使得小波的方向同条纹的变形方向最接近。 $\theta_k = k\delta\theta$, $\delta\theta$ 为相邻的 Morlet 小波间的增长角度。图 5(a)~(c) 分别为一个 Fan

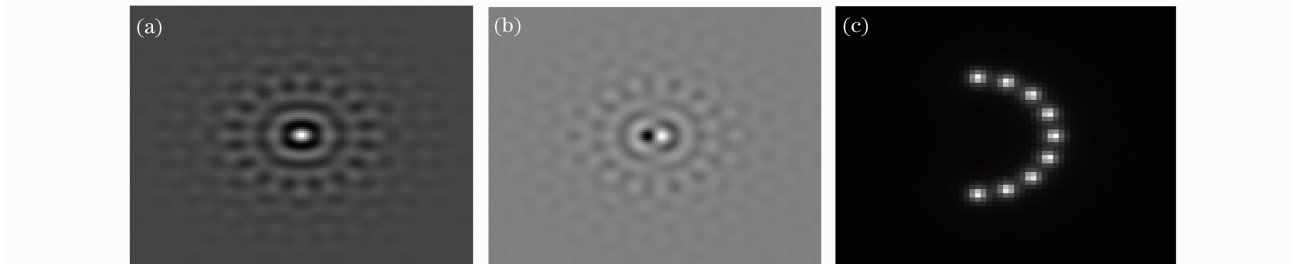


图 5 Fan 小波及其频谱

Fig. 5 Fan wavelet and its spectrum

小波的实部、虚部、频谱。此 Fan 小波由 8 个 Morlet 小波构成, $\delta\theta = \pi/8, N_\theta = 8$ 。

可以看出, Fan 小波由于其具有多方向性, 可以根据变形条纹的频谱自动找到进行角度调整的最佳方向, 从而能够正确获取物体面形信息, 所以 Fan 小波在处理双载频变形条纹时具有强大的优势。

3 计算机模拟

为了验证理论分析的正确性, 对比了一维连续小波变换和二维 Fan 小波变换在三维面形测量中的应用。变形条纹可表示为^[9]

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos\{2\pi[f_0 \cos(\theta)x + f_0 \sin(\theta)y] + \phi(x, y)\}, \quad (12)$$

模拟系统结构参量为 $L_0/d=1$, 模拟物体高度为 1.5 mm , $f_0 = 1/15, \theta = 10^\circ$ 。模拟物体 $\phi(x, y)$ 与变形条纹如图 6 所示。

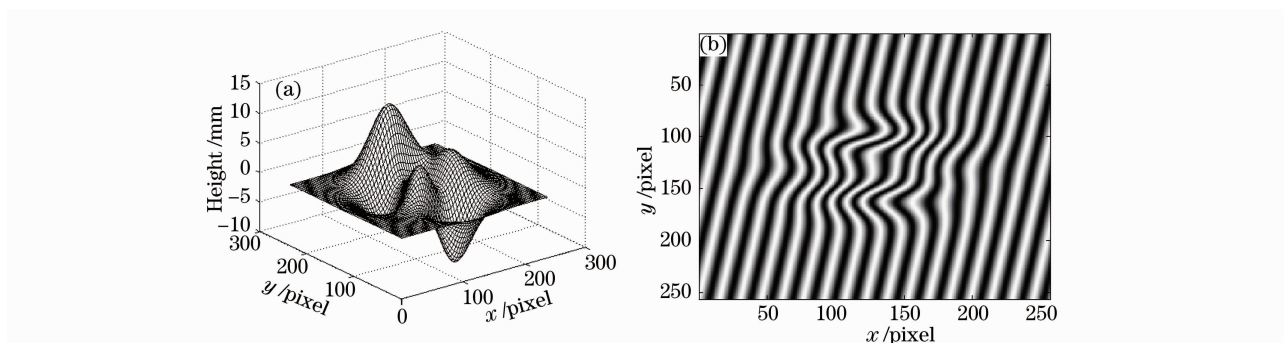


图 6 (a) 模拟物体, (b) 变形条纹

Fig. 6 (a) Simulated object, (b) deformed fringe pattern

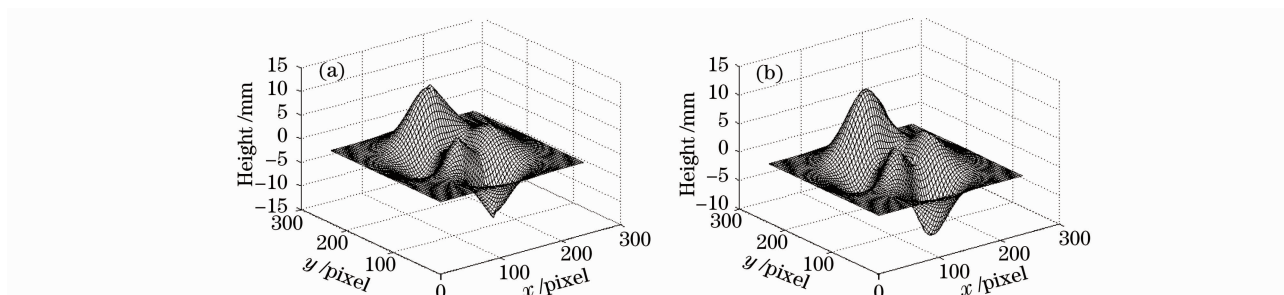


图 7 恢复物体。(a) 一维小波, (b) 二维 Fan 小波

Fig. 7 Restored object by 1D wavelet (a), 2D Fan wavelet (b)

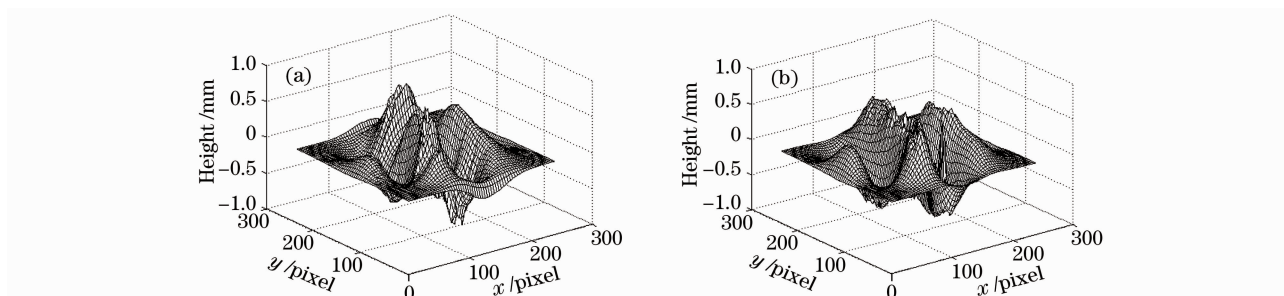


图 8 误差分布。(a) 一维小波, (b) 二维 Fan 小波

Fig. 8 Error distribution. (a) 1D wavelet, (b) 2D Fan wavelet

对变形条纹分别用一维小波和二维 Fan 小波进行处理^[10], 一维小波尺度因子为 $\{1:0.5:40\}$, 二维 Fan 小波尺度因子及角度因子分别为 $\{2:2:20\}, \{0, 0.25, 0.5\} \text{ rad}$, 两种方法恢复物体相位图及误差分布分别如图 7 与图 8 所示。

由图 7, 8 可以看出, 一维小波、二维 Fan 小波两种方法恢复物体最大误差分别为 $0.86, 0.75 \text{ mm}$ 。这是

由于一维小波只能通过调整尺度因子获取有用信息,而二维 Fan 小波可在多个方向上通过尺度和角度获取有用信息。

4 实验

为了验证分析的正确性,进行了实验。被测物体为两个心形物体。实验中采用敏通 TM1881CCD,16 mm 成像透镜,再通过 DT3152 图像采集卡采集条纹图。其中变形条纹如图 9 所示。一维小波恢复物体如图 10(a)所示,尺度因子为 $\{1:0.5:60\}$,二维 Fan 小波恢复物体如图 10(b)所示,尺度因子和角度因子分别为 $\{1:0.5:30\}$, $\{0:0.25:0.75\}$ rad。可见由于旋转角度因子的引入,在空域二维 Fan 小波可以更准确地做到与局部条纹图的匹配,在频域能更准确地滤出有用信息,所以二维 Fan 小波可以很好地恢复出物体的三维信息。而一维小波恢复出的物体存在较大的误差。此外,在 Matlab 7.1 平台上,两种方法的运算时间分别为 671 s 和 147 s。

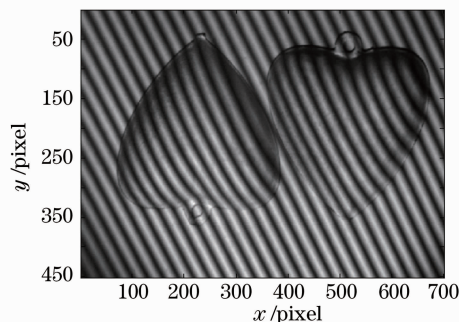


图 9 变形条纹

Fig. 9 Deformed fringe pattern

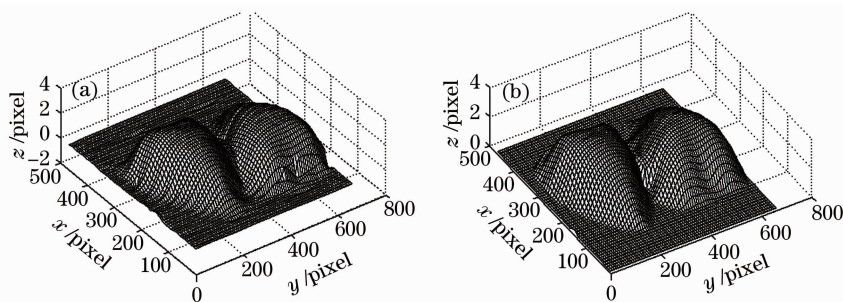


图 10 恢复物体。(a) 一维小波, (b) 二维 Fan 小波

Fig. 10 Restored object by 1D wavelet (a), 2D Fan wavelet (b)

5 结论

分析了一维复 Morlet 小波变换在解调具有双载频分量的倾斜条纹图中存在的问题,利用二维小波变换具有方向选择的特点:二维小波变换由于在进行尺度伸缩的同时,还可以进行坐标旋转,可以提取特定方向上的信号。将二维 Fan 小波(由一系列不同角度的二维复 Morlet 小波构成)变换用于解调具有双载频分量的倾斜变形条纹图中包含的相位信息,可以获取更好的解调效果,而且在运算时间上二维小波也具有较大的优势。计算机模拟和实验验证了我们的分析。

参考文献

- 1 Su Xianyu, Tan Xinsong, Xiang Liqun *et al.*. Complex object shape measurement using FTP method[J]. *Acta Optica Sinica*, 1998, **18**(9): 1228~1233
苏显渝,谭新松,向立群等. 基于傅里叶变换轮廓术的复杂三维物体测量[J]. *光学学报*, 1998, **18**(9): 1228~1233
- 2 Xu Qinghong, Zhong Yuexian, You Zhifu. Study on phase demodulation technique base on waveform[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(2): 1617~1622
许庆红,钟约先,由志福. 基于小波变换的解相技术研究[J]. *光学学报*, 2000, **20**(2): 1617~1622
- 3 Weng Jiawen, Zhong Jingang. Apply wavelet transform to phase analysis of spatial carrier-fringe pattern[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(4): 454~459
翁嘉文,钟金钢. 小波变换在载频条纹相位分析法中的应用研究[J]. *光学学报*, 2005, **25**(4): 454~459
- 4 Jinggang Zhong, Jiawen Weng. Spatial carrier fringe pattern analysis by means of wavelet transform: wavelet transform profilometry [J]. *Appl. Opt.*, 2004, **43**(26): 4993~4998

- 5 M. A. Gdeisat, A. Z. Abid, D. R. Burton *et al.*. Spatial fringe pattern analysis using the two-dimensional continuous wavelet transform employing a costfunction[J]. *Appl. Opt.*, 2007, **20**(8): 6120~6126
- 6 M. A. Gdeisat, D. R. Burton, M. J. Lalor. Spatial carrier fringe pattern demodulation by use of a two-dimensional continuous wavelet transform[J]. *Appl. Opt.*, 2006, **1**(12): 8722~8732
- 7 Sun Juan, Chen Wenjing, Su Xianyu *et al.*. Study the measurement range of wavelet transform profilometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(4): 647~653
孙娟,陈文静,苏显渝等. 小波变换轮廓术的测量范围研究[J]. 光学学报, 2007, **27**(4): 647~653
- 8 Li Sikun, Chen Wenjing, Su Xianyu. Phase unwrapping guided by amplitude of wavelet ridge coefficients in wavelet transform profilometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(4): 715~721
李思坤,陈文静,苏显渝. 小波变换轮廓术中用小波脊系数幅值引导相位展开的研究[J]. 光学学报, 2008, **28**(4): 715~721
- 9 Wenjing Chen, Xianyu Su, Yiping Cao *et al.*. Fourier transform profilometry based on a fringe pattern with two frequency components[J]. *Optik*, 2006, **24**(5):57~62
- 10 Yet another wavelet toolbox(YAWTB), home page. <http://www.fyma.ucl.ac.be/profects/yawtb/>, (accessed 28,4,2009)