

doi: 10.3788/lop47.051005

# 非子采样 Contourlet 变换系数统计建模及 图像去噪应用

牛彦敏<sup>1</sup> 王旭初<sup>2</sup>

(<sup>1</sup>重庆师范大学信息科学与工程学院, 重庆 400030  
<sup>2</sup>重庆大学光电技术及系统教育部重点实验室, 重庆 400044)

**摘要** 融合拉普拉斯分布及广义高斯分布模型对非子采样 Contourlet 变换(NSCT)系数进行了统计建模分析。研究发现, NSCT 作为平移不变 Contourlet 变换, 系数在不同尺度和方向上均存在较大冗余, 在广义高斯分布性等方面需引入参数加以约束。根据建立的统计模型进行了医学图像去噪实验。结果表明, 和 Contourlet 及 NSCT 软硬阈值去噪等比较, 该建模方法提高了噪声估计精度, 增加了峰值信噪比, 改善了图像视觉效果。

**关键词** 图像处理; Contourlet 变换; 高斯混合模型; 图像去噪

中图分类号 O436 OCIS 100.2980 100.4994 文献标识码 A

## Statistical Modeling of Nonsampled Contourlet Transform Coefficients and Its Application to Image Denoising

Niu Yanmin<sup>1</sup> Wang Xuchu<sup>2</sup>

(<sup>1</sup>College of Information Science and Engineering, Chongqing Normal University, Chongqing 400030, China)  
<sup>2</sup>Key Laboratory of Optoelectronic Technologies and Systems, Ministry of Education, College of Optoelectronic Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract** A Laplace and generalized Gaussian mixture distribution-based method is proposed to explore the nonsampled Contourlet transform (NSCT) coefficients. The investigating result reveals that the NSCT, as a shift-invariant contourlet transform, obtains redundant coefficients in each scale and each direction, and its coefficients differ from those of Contourlet transform in aspects of general Gaussian distribution. The regularized parameters should be introduced to generalized Gaussian distribution model to enhance the coefficients distribution. The medical image denoising experimental results with comparison to similar Contourlet-based methods indicate the proposed modeling method improves the accuracy of noise estimation, increases the peak signal-noise ratio, and achieves better visual quality.

**Key words** image processing; Contourlet transform; generalized Gaussian distribution model; image denoising

### 1 引言

小波变换作为一种局域性时频联合的多分辨率分析工具, 近年来在图像处理领域已得到广泛应用。图像经过小波变换之后, 高频子带中的边缘、轮廓等重要信息的系数较高, 而平坦、同质等区域的系数较低, 突出重要系数就能实施图像去噪、融合、分割等任务。小波对点状奇异目标函数是最优基, 能以很少的重

收稿日期: 2009-08-26; 收到修改稿日期: 2009-10-27

基金项目: 重庆市自然科学基金(CSTC2009BB3192)和重庆师范大学基金(07XLQ09)资助课题。

作者简介: 牛彦敏(1975—), 女, 硕士, 讲师, 主要从事光电图像采集与处理, 图像处理与模式识别等方面的研究。

E-mail: niuym@cqu.edu.cn

要系数表达这类目标，但对图像轮廓、边缘和细节纹理等典型的线状奇异函数，由一维小波张量积得到的二维小波变换在捕获这类目标时需要更多的基函数。从系数分布来看，随着变换尺度增加，非零小波系数中不可忽略成分逐渐增多，最终表现为难以“稀疏”表达图像高维奇异性信息<sup>[1]</sup>。对此，近年提出的Ridgelet变换<sup>[2]</sup>、Curvelet变换<sup>[3]</sup>及Contourlet变换<sup>[4]</sup>等图像多尺度几何分析方法，通过突出基函数的时频局域性和非线性逼近性能来处理图像中局部性的点奇异、线奇异、曲线奇异等问题。其中Contourlet变换能有效克服其他变换的冗余性问题，被认为是一种真正意义上的二维图像稀疏表示方法。

Contourlet 变换以分段二次连续曲线更有效地捕获轮廓，变换系数的统计特性被认为类似于小波变换系数的统计特性，具有高峰度、长拖尾、聚集性和持续性。这些特点对基于 Contourlet 变换的图像去噪、融合等处理具有指导意义<sup>[5]</sup>。但在实际应用中，Contourlet 变换易产生划痕现象，其原因往往被归结于图像下采样、Contourlet 基函数正则性不够高，时频局域性尚不够强等，致使存在明显的频谱混叠。对此，文献[6]提出了非子采样 Contourlet 变换(NSCT)来克服 Contourlet 变换中频率混叠的本质不足，但 NSCT 系数的冗余成分明显多于 Contourlet 变换。在这种情况下，NSCT 变换系数的统计特点是否仍具有类似于 Contourlet 变换的特点尚不清楚。本文结合拉普拉斯分布、广义高斯分布等非高斯分布混合模型对 NSCT 层内系数进行了统计建模分析，并根据建立的统计模型结合 Bayes 最大后验估计对医学图像进行了去噪实验。

## 2 非子采样 Contourlet 变换

NSCT 通过取消子采样来克服 Contourlet 变换中频率混叠的本质不足，同时保留了 Contourlet 变换中的多分辨率、多方向性、局部定位、近邻界采样和各向异性等特点。NSCT 由非下采样金字塔(NSP)和非下采样方向滤波器组(NSDFB)两个平移不变部分组成<sup>[6]</sup>，其变换由子带分解和方向变换两步骤实现，首先对图像进行 NSP 多尺度分解以捕获奇异点，NSP 由两通道非下采样滤波器组(NSFB)对低频部分迭代滤波构成，下一级 NSFB 由上一级 NSFB 进行 2×2 行列升采样构成。如图 1(a)所示， $y_0$  为分解所得低频部分， $y_1, y_2, y_3$  为分解所得各高频部分。对于  $z^{2^j} = [z_1^{2^j}, z_2^{2^j}]$  ( $\wedge$  为取幂符号)，对应的  $k$  级 NSP 的等价滤波器可描述为

$$H_n^{eq}(z) = \begin{cases} H_1(z^{2^{n-1}}) \prod_{j=0}^{n-2} H_0(z^{2^j}) & 1 \leq n < 2^{k-1} \\ \prod_{j=0}^{n-2} H_0(z^{2^j}) & n = 2^{k-1} \end{cases} \quad (1)$$

(1)式意味着，原始图像经过一层分解之后，其中的低频图像并未进行下采样，而是对非下采样双通道滤波器进行插值，再和低频图像卷积。这样处理尽管增加了冗余，但使得  $j$  尺度下带通滤波器理想频域支撑区间限定为  $[-\pi/2^{(j-1)}, \pi/2^{(j-1)}]^2 / [-\pi/2^j, \pi/2^j]^2$ ，避免了频率混叠。NSDFB 采用类似于 NSP 的滤波器插值思路，根据等效易位关系去除了 DFB 中的下采样环节，代以 DFB 中的滤波器插值，构成图 1(b)所示的两

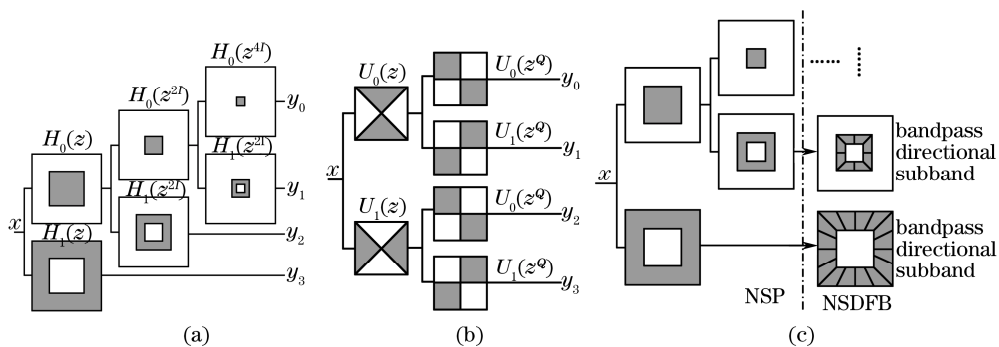


图1 NSCT 滤波器组成及滤波流程。(a)NSP 的结构；(b)NSDFB 的结构；(c)NSCT 滤波流程  
Fig.1 Components of NSCT pyramid and flowchart of NSCT filtering. (a)structure of NSP; (b)structure of NSDFB; (c) flowchart of NSCT filtering

通道非下采样迭代滤波器组。该滤波器组中下一级非下采样滤波器组由上一级非下采样滤波器组采用 Quincunx 矩阵  $\mathbf{Q} = (1 \ 1; 1 \ -1)$  升采样构成，从而具有平移不变性。

NSCT 具有类似于 Contourlet 变换的双层滤波器组结构，其基本流程如图 1(c)所示，图像首先经过 NSP 变换得到一系列带通图像，然后通过 NSDFB 变换形成一个低频子带和一系列带通方向子带。

### 3 NSCT 域系数分布模型

图像经过 NSCT 变换之后，各子带系数中大部分系数绝对值较小，少量系数绝对值较大，在直方图分布上表现出明显的高凸峰、长拖尾。为准确地对 NSCT 系数建模，首先考察 NSCT 各方向子带的系数分布。噪声图像及其 NSCT 系数分布的直方图如图 2 所示。可以看出，不同尺度下，系数直方图分布存在一定差异，随着尺度由粗到细，曲线总体呈逐渐平坦走势，峭度依次减小。因此采用单一统计模型难以准确揭示系数的分布规律，需要针对不同尺度下 NSCT 系数分布特点采用多种统计模型来逼近系数真实分布。

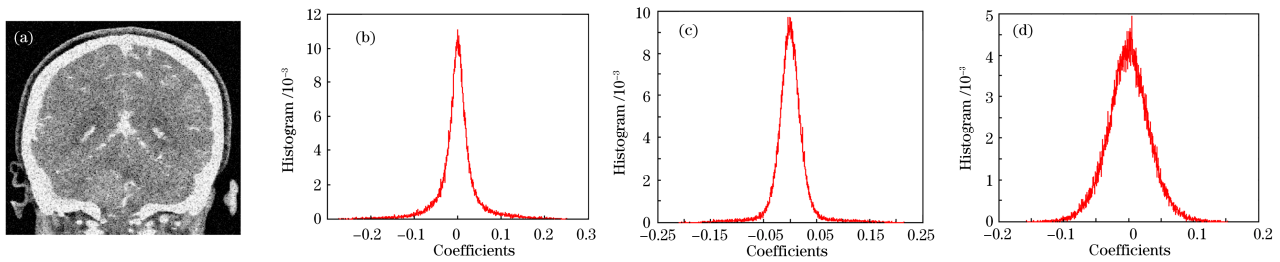


图 2 (a) 噪声图像; (b)~(d) 不同尺度及方向的 NSCT 系数直方图分布  
Fig.2 (a) Noisy image; (b)~(d) histograms of NSCT coefficients under different scales and directions

将各子带的 NSCT 系数看作是一个随机变量，利用分布模型来拟合，可由少量统计参数来描述图像的本质特征，有助于图像去噪、分割等后续处理。常用的尖峰型分布模型包括拉普拉斯分布、广义高斯分布 (GGD)、局部高斯分布、贝塞尔卡分布、混合高斯分布、点函数与高斯混合分布等，其中前两类分布模型最为常用。考虑 NSCT 系数分布特点，对于最粗尺度下的 NSCT 系数，采用拉普拉斯分布模型进行模拟，其表达式为

$$f(x) = \frac{k_1}{\sqrt{2}\sigma} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|x-\mu|}{\sigma}\right), \quad (2)$$

式中  $u$  和  $\mu$  分别为随机变量的均值和方差， $k_1$  为协调因子，通过逼近峰值附近的概率分布来控制模型的高度。该分布模型具有高尖峰，能较好模拟低尺度下 NSCT 系数分布。对于中间尺度下的 NSCT 系数，采用 GGD 进行模拟，其表达式为

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{k_2 \beta}{2\beta \Gamma(1/\beta)} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)^\beta, \quad (3)$$

式中  $\alpha$  和  $\beta$  分别为 GGD 的尺度参数和形状参数，用来控制分布曲线的宽度和衰减速度， $\mu, \sigma$  仍为变量的均值和方差， $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$  是 Gamma 函数。对  $\alpha$  和  $\beta$  可利用矩估计法获得，具体步骤为：1) 求取  $\hat{m}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i|$ ， $\hat{m}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2$ ；2)  $\hat{\beta} = R^{-1}(\hat{m}_1^2 / \hat{m}_2)$ ，其中  $R^{-1}$  为广义高斯参数比函数的反函数，可利用双曲线方法拟合获得<sup>[7]</sup>，即  $R^{-1}(x) = 0.2718 / (0.7697 - x) - 0.1247$ ；3) 求取  $\hat{\alpha} = \hat{m}_1 \Gamma(1/\beta) / \Gamma(2/\beta)$ 。

对于最细尺度的 NSCT 系数分布，由于突出了细节及噪声信号，细节分布曲线的峰值较为平坦，可视作为对水平方向进行了缩放，因此提出构建可变广义高斯分布模型 (VGGD) 来逼近该子带的系数分布，具体表达式为

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{k_3 \beta}{2\beta \Gamma(1/\beta)} \exp \left[ -\frac{|x - \mu|}{(\sigma + k_4 |x - \mu|)} \right]^\beta, \quad (4)$$

式中对于参数的求取仍然采用和中间尺度中GGD参数求取相同的方法,  $k_4$  为缩放协调因子, 可取 0.1~0.5, 实际中可根据多幅图像均值设定经验值。图3为以上3类模型对NSCT系数分布的模拟效果。从图中可看出, 这三类模型都比较接近NSCT系统真实分布, 较好地揭示了NSCT的系数分布特点。

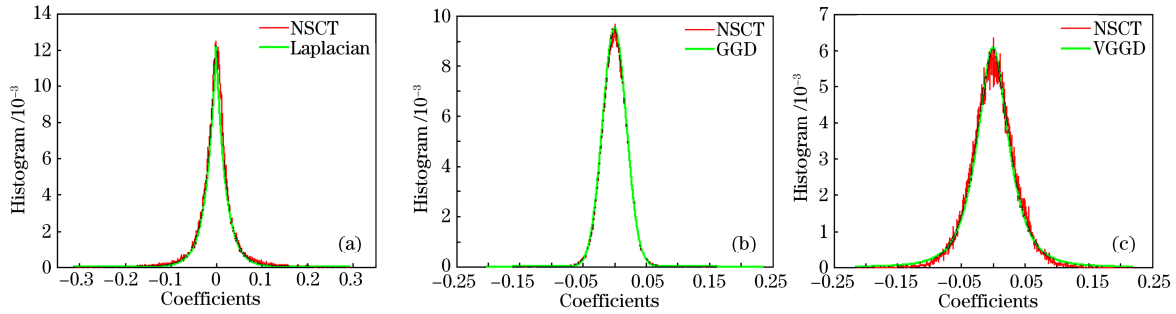


图3 不同尺度及方向的 NSCT 系数直方图分布及模型分布比较。(a)拉普拉斯分布模型; (b)广义高斯模型分布; (c)可变广义高斯分布模型

Fig.3 Model distributions versus histogram distributions of NSCT coefficients under different scales and directions.(a)Laplace distribution; (b)generalized Gaussian distribution; (c)variable generalized Gaussian distribution

#### 4 图像去噪实验

为验证NSCT系数建模的有效性, 对医学图像进行降噪处理实验。若图像受大量高斯噪声污染, 含噪图像可表示为  $g = x + \eta$ , 其中  $g$  为观测图像,  $x$  为不含噪声的原图,  $\eta$  为噪声,  $\eta \sim N(0, \sigma_n^2)$ 。经过正交变换之后, 图像的NSCT系数受到了互不相关、同分布、方差等于噪声方差的高斯噪声干扰, 可对应表示为  $y = c + n$ , 其中  $y, c, n$  分别为观测系数、真实系数和噪声系数。图像去噪的目的就是用  $y$  得到  $c$  的估计值  $\hat{c}$ , 使之尽可能接近真实图像。由Bayes框架下的最大后验估计(MAP)<sup>[8]</sup>, 可得

$$\hat{c} = \arg \max_{c \in R} [p_{c|y}(c|y)] = \arg \max_{c \in R} [p_{y|c}(y|c)p_c(c) / p_y(y)], \quad (5)$$

式中  $p_c(c)$  和  $p_y(y)$  分别为真实图像NSCT系数和含噪图像NSCT系数的分布, 取对数得

$$\hat{c} = \arg \max_{c \in R} [\ln p_{y|c}(y|c) + \ln p_c(c) - \ln p_y(y)] = \arg \max_{c \in R} [\ln p_{y|c}(y - c) + \ln p_c(c) - \ln p_y(y)]. \quad (6)$$

由于  $\ln p_y(y)$  已知, 在已知噪声分布情况下, 要得到估计值  $\hat{c}$  需知道原始图像的先验概率密度分布。利用NSCT系数建模分布作为  $p_c(c)$  的估计, 利用噪声方差估计  $p_{y|c}(y - c)$ 。噪声方差利用绝对值中值进行估计,  $\sigma_{j,k} = \text{med}(|y_{j,k}|) / 0.6745$ 。最后将估计的NSCT系数进行NSCT逆变换得到去噪图像。

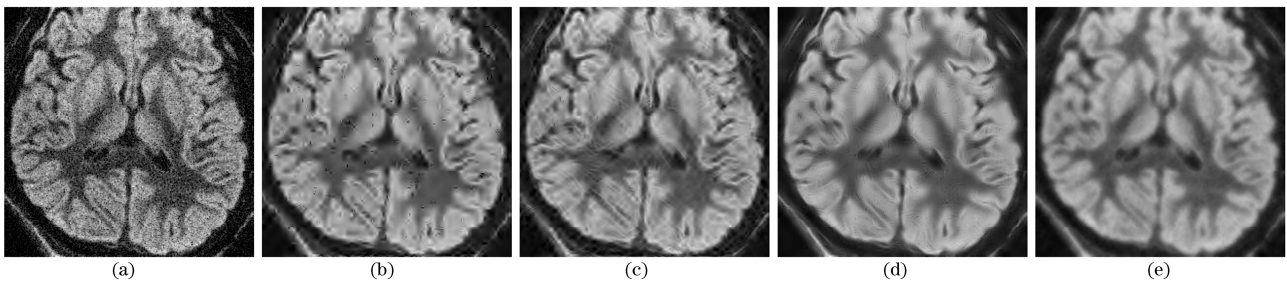


图4 MRI图像去噪效果(噪声标准差为30)。(a)加入噪声的MRI图像; (b)小波阈值去噪; (c)Contourlet软阈值去噪; (d)NSCT软阈值去噪; (e)本文方法

Fig.4 MRI image denoising example with the proposed method and other methods. The noisy intensity is 30. (a) noisy image; (b)denoised with wavelet thresholding; (c)Contourlet thresholding; (d)NSCT thresholding; (e)the proposed method

实验结果如图4, 可看出, 小波阈值去噪和Contourlet去噪都产生了划痕现象。NSCT软阈值去噪方法尽管能获得对比度较强、较光滑的图像, 但同时也增加了图像的部分伪细节信息。如图4(a)中部分脑白质本未相连, 但图4(d)中将其连接起来, 改变了这些关键信息的分布, 而在图4(e)则较好恢复了这些信息及脑灰质、脑白质、脑室、胼胝体、沟回等。表1列出了各种方法对CT图像和MRI图像去噪后的峰值信噪比, 其中 $I$ 为噪声强度。可见本文方法去噪总体效果要优于其他阈值去噪方法, 且优越性随噪声增加而明显。这主要缘于本文方法更好地考虑了尺度内变换系数的分布特点, 对噪声引起的分布变化有一定稳健性, 因而保证了去噪效果的稳定性。

表1 医学图像使用不同去噪算法的PSNR  
Table 1 PSNR of two CT and MRI images after processing by different denoising algorithms

	CT image				MRI image			
	$I=10$	$I=20$	$I=30$	$I=40$	$I=10$	$I=20$	$I=30$	$I=40$
Noisy image	28.62	22.57	19.82	16.86	28.41	22.96	19.04	17.28
Wavelet soft threshold	31.17	27.73	23.78	20.74	30.20	26.74	23.03	19.74
Contourlet soft threshold	31.22	27.92	23.95	20.88	30.23	26.85	23.20	19.91
NSCT soft threshold	32.15	28.34	24.42	21.03	30.64	27.01	24.04	20.36
Proposed method	32.09	28.21	24.41	21.10	30.43	26.93	24.12	20.45

## 5 结 论

通过分析非子采样 Contourlet 变换特点, 利用拉普拉斯分布、广义高斯分布及可变广义高斯分布对 NSCT 系数进行混合建模, 并应用于基于 Bayes 最大后验概率估计的图像去噪。实验结果表明, 本文方法对于零均值白噪声的滤除效果在一定程度上优于同类方法, 尤其在对细节图像噪声污染较重时的恢复效果较明显, 且本文方法计算量小, 去噪速度快。值得注意的是, 本文主要针对子带内系数分布特点进行建模, 而子带间 NSCT 系数分布也存在一定特点, 若将不同子带内的系数进行联合建模, 这类约束也将有利于揭示 NSCT 系数分布的内在特点, 从而取得更好的去噪效果。

## 参 考 文 献

- 1 J. L. Stack, E. J. Candès, D. L. Donoho. The curvelet transform for image denoising[J]. *IEEE Trans. Image Process.*, 2002, **11**(6): 670~684
- 2 E. J. Candès. Ridgelets: Theory and application[D]. CA:Stanford University, 1998
- 3 E. J. Candès, L. Demanet, D. L. Donoho *et al.*. Fast discrete curvelet transforms[J]. *Multiscale Model. Simul.*, 2006, **3**(5): 861~899
- 4 M. N. Do, M. Vetterli. The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation[J]. *IEEE Trans. Image Process.*, 2005, **14**(12): 2091~2106
- 5 D. D. Y. Po, M. N. Do. Directional multiscale modeling of images using the contourlet transform[J]. *IEEE Trans. Image Process.*, 2006, **15**(6): 1610~1620
- 6 A. L. D. Cunha, J. Zhou, M. N. Do. The nonsubsampling contourlet transform: theory, design, and applications[J]. *IEEE Trans. Image Process.*, 2006, **15**(10): 3089~3101
- 7 Wang Taiyue, Li Zhiming. A fast parameter estimation of generalized Gaussian distribution[J]. *Chinese J. Engineering. Geophysics*, 2006, **3**(3): 172~176  
汪太月, 李志明. 一种广义高斯分布的参数快速估计法[J]. *工程地球物理学报*, 2006, **3**(3): 172~176
- 8 R. O. Duda, P. E. Hart, D. G. Stork. *Pattern Classification*[M]. Malden: John Wiley & Sons, 2000