

doi: 10.3788/lop47.042201

随机并行梯度下降算法用于次镜校准的仿真研究

韩杏子 俞 信 董 冰

(北京理工大学光电学院, 北京 100081)

摘要 将随机并行梯度下降(SPGD)算法应用于共轴三镜系统次镜, 无需进行误差测量, 可直接通过调节次镜的 6 个自由度, 寻求评价函数的最优值, 从而简化了次镜的校准。分析了影响随机并行梯度下降算法校正速度的主要因素, 并对其进行了优化。仿真计算结果表明, 在各参量选取合适的情况下, 系统峰谷值及均方根显著改善, 从而验证了 SPGD 算法用于校准次镜的可能性。

关键词 自适应光学; 次镜校正; 随机并行梯度下降算法

中图分类号 TB851 OCIS 220.3620 220.1080 文献标识码 A

Using Stochastic Parallel Gradient Descent Control Algorithm to Calibrate Second Mirror in Three-Mirror System

Han Xingzi Yu Xin Dong Bing

(College of Optoelectronic, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract The primary method for calibrating a co-axial three-mirror system is the computer-aided alignment method, and it is complicated for having to calculate wavefront error. Stochastic parallel gradient descent (SPGD) control algorithm is used to calibrate the second mirror of three-mirror system, with no need to calculate wavefront error. Through adjusting the six degrees of freedom of the second mirror directly, finding system extremal value and then calibrating system error, the calibrating process is predigested. The major factors that will affect computing speed of SPGD algorithm are analysed and optimized, and the simulation results show that SPGD algorithm can distinctly improve peak-valley value and root-mean-square of the system.

Key words adaptive optics; calibration of second mirror; stochastic parallel gradient descent control algorithm

1 引言

广泛应用于空间望远镜的共轴三镜系统主要由主镜、次镜和三镜组成^[1], 每个镜面均为非球面镜, 具有较强的消像差能力, 且结构紧凑。每个镜子的位置误差都会影响整个系统的成像质量。其中次镜通过几个支杆与主镜相连, 距离主镜较远, 容易偏离其中心位置, 另外, 次镜的 6 个自由度对系统像差十分敏感, 其 x , y 方向的微小偏移和旋转都会给系统带来明显误差(主要是彗差和像散), 结构比较复杂, 目前主要的研究方向集中于对分块主镜的校准, 对次镜的校准研究较少。现在对次镜的校准方法主要是计算机辅助装调法^[2,3], 通过测量波前误差, 反演解算出各个调节变量需要调整的具体数值, 从而进行校准。车驰聘等^[4]用基于矢量波相差的计算机辅助装调法实现了系统波相差均方根(RMS)小于 0.08λ (λ 为检测光波长), 黄一帆等^[3]对共轴三镜系统的计算机辅助装调进行了仿真和实验研究, 实现了校准后轴上视场峰谷(PV)值为 0.55λ , RMS 为 0.087λ 的结果。但是这种方法需要波前传感和测量装

收稿日期: 2009-08-02; 收到修改稿日期: 2009-10-09

作者简介: 韩杏子(1983—), 女, 博士研究生, 主要从事微小型自适应光学方面的研究。E-mail: xinger@bit.edu.cn

导师简介: 俞 信(1941—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事物理电子学方面的研究。E-mail: yuxin@bit.edu.cn

置, 结构比较复杂。

近年来, 基于系统性能指标直接优化的自适应光学控制技术, 由于其硬件实现上的简单性及对闪烁等复杂环境条件的适应性, 越来越受到自适应光学研究领域的重视。目前常用的无波前传感算法包括随机并行梯度下降(SPGD)^[5-7]算法、遗传算法(GA)^[8]、模拟退火(SA)^[9]算法等。其中随机并行梯度下降算法因其实现容易, 所有控制通道并行运算, 收敛速度快等优点, 得到了广泛应用^[10]。本文提出将SPGD算法用于次镜的校准, 简化了校准系统, 校准后系统性能明显提高。

2 SPGD 算法用于校准次镜位置误差原理

SPGD 算法原理主要发展于随机逼近理论和人工神经网络技术, 其算法原理: 设目标函数 J 为控制矢量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_N)$ 的函数, 即 $J(\mathbf{u}) = J(u_1, u_2, u_3, \dots, u_N)$, N 为控制矢量的个数。为了确定多元函数 $J(\mathbf{u})$ 达到极值时的控制矢量 \mathbf{u} , 首先给定 \mathbf{u} 一个初始值 \mathbf{u}^0 , 然后从 \mathbf{u}^0 出发, 沿着 $J(\mathbf{u})$ 减小(变大)的方向逐步修正 \mathbf{u} 值的大小。

小幅随机扰动 $\{\delta u_j\} (j=1, 2, \dots, N)$ 并行施加到所有 N 个控制参数 $\{\delta u_j\}$, 由此造成的系统性能指标的变化

$$\delta J = J(u_1 + \delta u_1, \dots, u_j + \delta u_j, \dots, u_N + \delta u_N) - J(u_1, \dots, u_j, \dots, u_N), \quad (1)$$

根据泰勒公式

$$\delta J = \sum_{j=1}^n \frac{\partial J}{\partial u_j} \delta u_j + \frac{1}{2} \sum_{j,i} \frac{\partial^2 J}{\partial u_j \partial u_i} \delta u_j \delta u_i + \dots \quad (2)$$

考虑第 l 个控制变量 u_l , 乘积项 $\{\delta J \delta u_l\}$ 可以由已知的扰动 $\{\delta u_l\}$ 和测量得到的 δJ 求得。由(2)式可知

$$\delta J \delta u_l = \frac{\partial J}{\partial u_l} (\delta u_l)^2 + \Psi_l, \quad (3)$$

式中

$$\Psi_l = \sum_{j \neq l}^N \frac{\partial J}{\partial u_j} \delta u_j \delta u_l + \frac{1}{2} \sum_{j,i} \frac{\partial^2 J}{\partial u_j \partial u_i} \delta u_j \delta u_i \delta u_l + \dots \quad (4)$$

在(3)式中, $\delta J \delta u_l$ 的乘积项包括真正的梯度分量 J_L' 和噪声项 Ψ_l 。假设扰动 $\{\delta u_l\}$ 都是随机变量, 则对 $\delta J \delta u_l$ 求数学期望有

$$\langle \delta J \delta u_l \rangle = \frac{\partial J}{\partial u_l} \langle (\delta u_l)^2 \rangle + \langle \Psi_l \rangle, \quad (5)$$

式中

$$\langle \Psi_l \rangle = \sum_{j \neq l}^N \frac{\partial J}{\partial u_j} \langle \delta u_j \delta u_l \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j,i} \frac{\partial^2 J}{\partial u_j \partial u_i} \langle \delta u_j \delta u_i \delta u_l \rangle + \dots \quad (6)$$

在随机并行梯度下降算法中, 随机扰动 $\{\delta u_l\}$ 是独立变量, 它的统计平均值为零, 方差恒定, 即

$$\langle u_j \rangle = 0, \quad \langle \delta u_j \delta u_i \rangle = \sigma^2 \delta_{ji}, \quad (7)$$

式中 δ_{ji} 为克罗内克符号

$$\delta_{ji} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

另外, 随机扰动 $\{\delta u_l\}$ 的概率密度函数 $\{p(u_l)\}$ 关于平均值对称, 所以对于统计上独立的随机变量有

$$\langle \delta u_j \delta u_i \delta u_l \rangle = 0, \forall j, i, l. \quad (9)$$

另外, 由于 $(\delta u_l)^3$ 是概率密度对称的奇次中心矩, 所以有

$$\langle \delta(u_l)^3 \rangle = 0. \quad (10)$$

综上, (6)式可以写成

$$\langle \Psi_l \rangle = O(\sigma^4), \quad (11)$$

式中 $O(\sigma^4)$ 为无穷小量, 量级为 σ^4 。从而(5)式为

$$\langle \delta J \delta u_l \rangle = \frac{\partial J}{\partial u_l} \sigma^2 + O(\sigma^4), \quad (12)$$

两边同时除以 σ^2 得

$$\frac{1}{\sigma^2} \langle \delta J \delta u_l \rangle = \frac{\partial J}{\partial u_l} + O(\sigma^2). \quad (13)$$

由(13)式可以看出, 随机值 $\frac{1}{\sigma^2} \langle \delta J \delta u_l \rangle$ 从统计意义上讲, 是目标函数的真正梯度 $\{J'_l\}$ 的一个估计, 估计的精度为 $O(\sigma^2)$ [11]。

在优化 J 时, 为了达到最快的优化速度, 搜索的方向应该与梯度方向一致。这里选择服从伯努利分布 $B(N, 0.5)$ 的扰动值 $\{\delta u_l\}$, 采用双边扰动法, SPGD算法迭代过程为

$$\begin{aligned} u_l^+ &= u_l^{(m)} + \delta u_l / 2, & u_l^- &= u_l^{(m)} - \delta u_l / 2, & \delta J^+ &= J^+ - J, \\ \delta J^- &= J^- - J, & \delta J &= \delta J^+ - \delta J^-, & u_l^{m+1} &= u_l^{(m)} - \gamma \delta J \delta u_l^{(m)}. \end{aligned} \quad (14)$$

3 系统仿真

3.1 三镜系统的仿真

在Zemax软件里搭建大口径长焦距共轴三镜系统, 如图1所示。给次镜施加一定的误差, 然后通过次镜上使用SPGD算法进行校准。

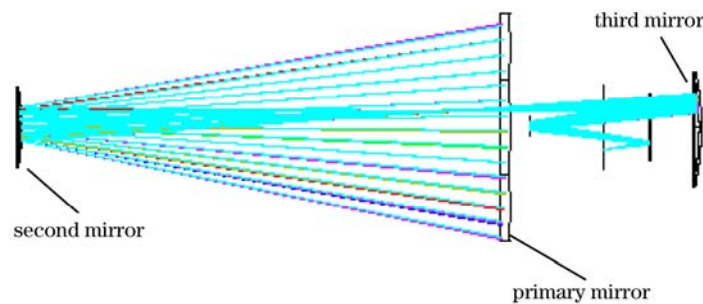


图1 共轴三镜系统
Fig.1 Coaxial three-mirror anastigmatic system

3.2 目标函数的选择

选择像斑均方根半径作为系统性能指标, 目标函数的最小值为 [12]

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\Delta x_{i,j})^2 (w_{i,j} / w_{\text{total}}) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\Delta y_{i,j})^2 (w_{i,j} / w_{\text{total}})}, \quad (15)$$

式中 $\Delta x_{i,j}, \Delta y_{i,j}$ 分别为像面某点到中心点在 x 和 y 方向的距离, $w_{i,j} / w_{\text{total}}$ 为该点对应的权重, 这里选取归

一化的点扩散函数值。选择像斑均方根半径作为目标函数可以避免实际中由于激光功率不稳定引起的目标函数的跳变，同时收敛速度快，校正过程较为平稳^[13]。

3.3 参数选择

SPGD算法主要有两个参数，迭代步长 $|\delta u_l|$ 和增益因子 γ 。这两个参数是相互关联的：当步长 $|\delta u_l|$ 较大时，会导致系统目标函数变化较大，则应该选择较小的增益因子 γ ，以防止控制参数一次改变过大，导致算法不稳定；反之，当步长 $|\delta u_l|$ 较小时，则可取较大的增益因子 γ 。

共轴三镜系统的次镜有6个自由度，分别是 x, y, z 轴的偏移和旋转， $\text{dec } x, \text{dec } y, \text{dec } z, \text{tilt } x, \text{tilt } y, \text{tilt } z$ 。由于这里研究的共轴三镜系统是轴对称的，所以 z 轴(即光轴)方向的旋转对这个系统没有影响，故只考虑剩下的5个自由度。步长原则上取每个自由度能引起目标函数明显变化的最小值。

增益采取自适应因子，较为普遍的自适应因子为

$$\gamma = aJ^b, \quad (16)$$

式中 a, b 为常数。这样选择的目的是使得求极值的过程中，当目标函数较大时得到较大的增益因子，当目标函数较小(即接近极值)时得到小的增益因子，这样既可以加快收敛速度，又可以使目标函数稳定收敛于极值。其中 b 值越大，则在目标函数较大和较小时迭代步长相差越大，此时 a 值应取较小值，反之，当 b 值越小， a 则应该取稍大的数值。仿真中发现，采取这样的自适应因子，在目标函数接近极值时，增益 γ 过小，函数变化太慢，故将(16)式修正为

$$\gamma = aJ^b + c. \quad (17)$$

式中 c 的选取是为了使得在目标函数比较小的时候增益因子不会过份的小，一般取一个比较小的数(本文取 $c=3$)。考虑到迭代过程的稳定性，选择 $b=1$ ，即让 γ 随目标函数线性变化。 $b=1$ 时不同 a 值系统评价函数迭代50次的变化情况如图2所示。可以看出，当 a 取值较小时，算法收敛较慢，当 a 取值偏大(大于25)时，目标函数起伏很大，算法不收敛。综合以上各因素，取增益

$$\gamma = 20J + 3. \quad (18)$$

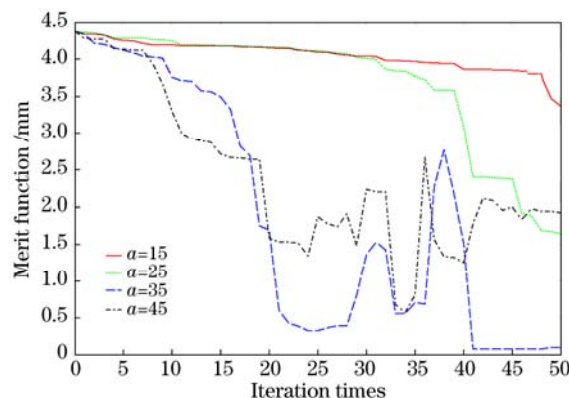


图2 不同 a 值评价函数随迭代次数变化情况
Fig.2 Change of merit with iteration times for different value of a

3.4 仿真结果

首先在Zemax里给次镜设置一定的误差($\text{dec } x=0.1, \text{dec } y=0.1, \text{tilt } x=0.1, \text{tilt } y=0.1, \text{dec } z=0.1$)，然后在Matlab里实现SPGD算法迭代过程。加了初始误差后的波面，如图3所示，RMS为 1.1766λ ，PV为 6.7021λ 。经过200轮迭代后的波面如图4所示，RMS为 0.0491λ ，PV为 0.1967λ 。目标函数变化曲线如图5所示。可见，目标函数稳步趋于极值。整个系统性能变化如表1所示。由表1可见，系统RMS和PV明显改善，斯特列尔比

(SR)从0.024增加为0.910, 系统性能明显变好。

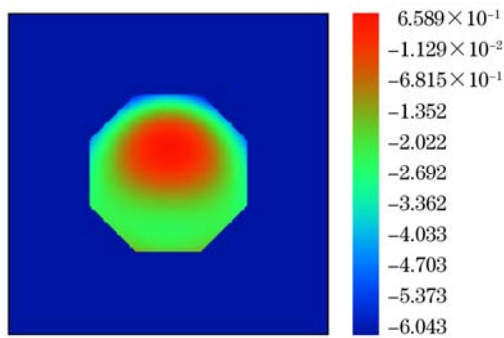


图3 初始波面
Fig.3 Initial wavefront

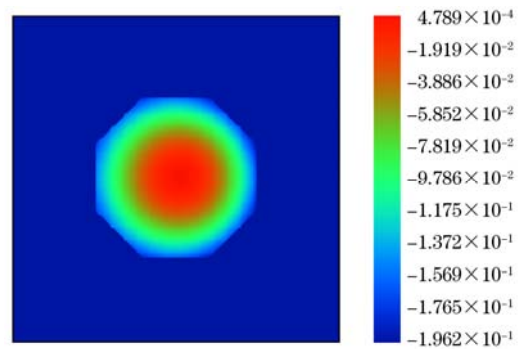


图4 SPGD 校正后的波面
Fig. 4 Corrected wavefront

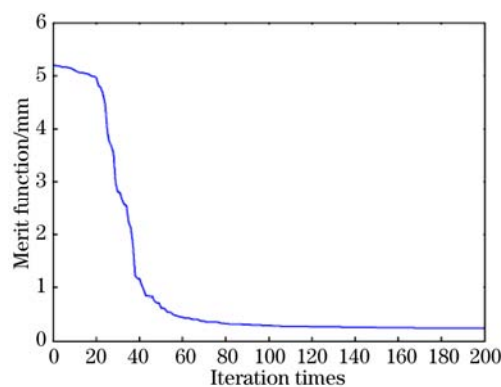


图5 评价函数变化曲线
Fig.5 Curve of iteration merit versus iteration times

表1 系统性能变化
Table 1 Change of system performances

	RMS	PV	SR	J
Initial value	1.1766 λ	6.7021 λ	0.024	5.1705
Final value	0.0491 λ	0.1967 λ	0.910	0.0142

4 结 论

通过仿真研究可知, SPGD 算法用于共轴三镜系统的次镜校准是可行的, 不仅简化了次镜的校准, 同时由于并行控制次镜的 5 个自由度, 加快了校准过程。但是, 本次仿真是在假设主镜及三镜没有误差, 只有次镜有一定误差的情况下进行的, 实际中并不知道是哪个镜子存在误差。在以后的研究中, 如果以主镜中心为基准调整次镜和三镜的话, 可以尝试将 SPGD 算法同时用于次镜和三镜, 同时调整这两个镜子的 12 个自由度, 寻求最优方案。

参 考 文 献

- Kevin Thompson, Tobias Schmid, Jannick Rolland. Alignment induced aberration fields of next generation telescopes[C]. *SPIE*, 2007, **6834**: 68340B
- Zhang Bin, Han Changyuan. Study on optimization of computer-aided alignment of a three-mirror off-axis aspherical optical system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(1): 54~58
张 斌, 韩昌元. 离轴非球面三反射镜光学系统装调中计算机优化方法的研究[J]. *光学学报*, 2001, **21**(1): 54~58
- Huang Yifan, Li Lin, Cao Yinhua. Computer-aided alignment for space telescope optical system[C]. *SPIE*, 2006, **6149**: 61490P
- Che Chicheng, Li Yingcai, Fan Xuewu *et al.*. Research on computer-aided alignment based on vector aberration theory[J]. *Acta*

- Photonica Sinica*, 2008, **37**(8): 1630~1634
车驰骋, 李英才, 樊学武 等. 基于矢量波像差理论的计算机辅助装调技术研究[J]. 光子学报, 2008, **37**(8): 1630~1634
- 5 Thomas Weyrauch, Mikhail A. Vorontsov, Thomas G. Bifano *et al.*. Microscale adaptive optics: wave-front control with a m-mirror array and a VLSI stochastic gradient descent controller[J]. *Appl. Opt.*, 2001, **40**(24): 4243~4253
- 6 Yang Huizhen, Li Xinyang, Jiang Wenhan. Simulation and analysis of stochastic parallel gradient descent control algorithm for adaptive optics system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(8): 1355~1360
杨慧珍, 李新阳, 姜文汉. 自适应光学系统随机并行梯度下降控制算法仿真与分析[J]. 光学学报, 2007, **27**(8): 1355~1360
- 7 Yang Huizhen, Chen Bo, Li Xinyang *et al.*. Experimental demonstration of stochastic parallel gradient descent control algorithm for adaptive optics system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(2): 205~210
杨慧珍, 陈波, 李新阳 等. 自适应光学系统随机并行梯度下降控制算法实验研究[J]. 光学学报, 2008, **28**(2): 205~210
- 8 Yang Ping, Xu Bing, Jiang Wenhan *et al.*. Study of a genetic algorithm used in an adaptive optical system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(9): 1628~1632
杨平, 许冰, 姜文汉 等. 遗传算法在自适应光学系统中的应用[J]. 光学学报, 2007, **27**(9): 1628~1632
- 9 Fan Shuwei, Zhang Xingzhi. Study of the global optimal method self-adaptation simulated annealing-genetic algorithm[J]. *Optics and Precision Engineering*, 1999, **7**(4): 16~21
樊叔维, 张兴志. 全局优化算法自适应模拟退火-遗传算法的研究[J]. 光学精密工程, 1999, **7**(4): 16~21
- 10 Yang Huizhen, Li Xinyang, Jiang Wenhan. Comparison of several stochastic parallel optimization control algorithms for adaptive optics system[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2008, **20**(1): 11~16
杨慧珍, 李新阳, 姜文汉. 自适应光学系统几种随机并行优化控制算法比较[J]. 强激光与粒子束, 2008, **20**(1): 11~16
- 11 Liu Jiaguo. Research in the Correction of Aero-optics Wavefront Error Using Adaptive Optics[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2008. 47~52
刘家国. 气动光学效应波前畸变的自适应光学校正研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2008. 47~52
- 12 Zhang Liangzhong, Jin Weiqi, Zhou Liwei. Computation on root mean square radius and modulation transfer function in imaging systems[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2000, **28**(8): 5~8
张良忠, 金伟其, 周立伟. 成像系统均方根半径及调制传递函数的计算[J]. 电子学报, 2000, **28**(8): 5~8
- 13 Chen Bo, Yang Huizhen, Zhang Jinbao *et al.*. Performances index and convergence speed of parallel gradient descent algorithm in adaptive optics of point source[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(5): 1144~1148
陈波, 杨慧珍, 张金宝 等. 点目标成像自适应光学随机并行梯度下降算法性能指标与收敛速度[J]. 光学学报, 2009, **29**(5): 1144~1148