

# 数字全息显微中常见重建算法比较

王广俊<sup>1,2</sup> 王大勇<sup>1</sup> 王华英<sup>3</sup>

(<sup>1</sup>北京工业大学应用数理学院, 北京 100022; <sup>2</sup>河南省计量科学研究院, 河南 郑州 450008)  
<sup>3</sup>河北工程大学理学院, 河北 邯郸 056038

**摘要** 基于理论分析和实验验证相结合的方法, 对数字全息显微术中常见的三种重建算法即菲涅耳变换算法、角谱算法和卷积算法做了比较研究。结果表明: 利用菲涅耳变换算法对离轴无透镜傅里叶变换数字全息进行重建时, 无重建距离的限制; 采用卷积重建法只能在最佳再现距离附近一个非常小的范围内才能获得高分辨率再现像; 而采用角谱重建法在略小于最佳再现距离及大于最佳再现距离较大范围内重建, 均能获得高分辨率的再现像。角谱重建法总体上优于卷积重建法。菲涅耳变换重建法简单、快捷, 是优化的重建算法。

**关键词** 数字全息; 无透镜傅里叶变换; 重建算法; 衍射积分

中图分类号 TB877 OCIS 090.1995 070.2575 文献标识码 A

## Comparison of Commonly Used Numerical Reconstruction Algorithms in Digital Holographic Microscopy

Wang Guangjun<sup>1,2</sup> Wang Dayong<sup>1</sup> Wang Huaying<sup>3</sup>

(<sup>1</sup>College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)  
<sup>2</sup>Henan Institute of Metrology, Zhengzhou, Henan 450008, China  
<sup>3</sup>College of Sciences, Hebei University of Engineering, Handan, Hebei 056038, China)

**Abstract** Based on theoretical analysis and experimental demonstration, three commonly used reconstruction algorithms in digital holographic microscopy, Fresnel transform algorithm, angular spectrum algorithm, and convolution algorithm, are investigated. It shows that the lensless Fourier transform digital hologram can be reconstructed at any distance by Fresnel transform algorithm. For convolution algorithm, the whole reconstructed image with high resolution can be acquired in an optimal reconstruction range or a small area around it. When the reconstruction distance is slightly smaller or larger than the optimal one, a high quality image can also be obtained by using angular spectrum algorithm. Angular spectrum algorithm is better than convolution algorithm as a whole. The Fresnel transform algorithm is time-efficient and simpler than the other two.

**Key words** digital holography; lensless Fourier transform; reconstruction algorithm; diffraction integral

### 1 引言

数字全息术是光学与光电技术、计算机技术的完美结合。该技术不仅具有高灵敏、高准确、高分辨率以及快速、无损测量等优点, 而且图像的存储、再现和传输非常方便、灵活, 这些优点使其特别适合于显微成像与测量。近年来, 数字全息技术得到了广泛的关注, 其应用范围涉及生命科学<sup>[1~4]</sup>、微机电系统<sup>[5,6]</sup>、

收稿日期: 2009-05-15; 收到修改稿日期: 2009-10-14

基金项目: 河北省自然科学基金(F2008000750)和河北省科学研究与发展计划(20090101D)资助课题。

作者简介: 王广俊(1965—), 男, 博士研究生, 正高级工程师, 主要从事光学信息处理和数字全息技术等方面的研究。

E-mail: wangguangjun88@yahoo.com.cn

导师简介: 王大勇(1966—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事数字全息方面的研究。E-mail: wdyong@bjut.edu.cn

半导体<sup>[5]</sup>、微光学<sup>[7,8]</sup>、粒子场等领域。

全息图的数值重建是数字全息技术中重要的一环。常见的重建算法有三种：基于菲涅耳衍射的菲涅耳变换重建法、基于瑞利-索莫菲衍射的卷积重建法和基于角谱理论的角谱重建法，它们均利用快速傅里叶变换(FFT)实现。近年来对于这三种重建算法的适用范围的讨论比较多<sup>[9-17]</sup>，但说法极不统一，甚至观点截然相反，本文结合理论分析及实验研究对数字全息常见三种算法的适用范围进行分析。

## 2 理论分析

### 2.1 菲涅耳变换重建法

设重建光波在 CCD 平面上的分布为  $C(x, y)$ ，根据菲涅耳衍射公式，略去无关紧要的常数相位因子，再现光场的复振幅分布为

$$U(x_i, y_i, z_i) = \exp\left[\frac{jk}{2z_i}(x_i^2 + y_i^2)\right] F\left\{C(x, y)H(x, y) \times \exp\left[\frac{jk}{2z_i}(x^2 + y^2)\right]\right\}_{f_x = \frac{x_i}{\lambda z_i}, f_y = \frac{y_i}{\lambda z_i}}, \quad (1)$$

式中  $z_i$  为重建距离， $i=1,2,3\cdots$ ， $H(x, y)$  为全息图强度分布函数， $F\{\cdot\}$  表示二维傅里叶变换。实际中， $F\{\cdot\}$  是通过 FFT 实现的。可见，菲涅耳变换重建法只需要一次傅里叶变换，其像平面与全息图平面之间满足抽样关系<sup>[18]</sup>

$$\Delta x_i = \frac{\lambda z_i}{M \Delta x}, \quad \Delta y_i = \frac{\lambda z_i}{N \Delta y}. \quad (2)$$

CCD 记录的全息图强度分布为

$$H(k\Delta x, l\Delta y) = H(x, y) \text{rect}\left(\frac{x}{M\Delta x}, \frac{y}{N\Delta y}\right) \sum_k \sum_l \delta(x - k\Delta x, y - l\Delta y), \quad (3)$$

式中  $M, N$  和  $\Delta x, \Delta y$  分别为 CCD 在水平和竖直方向的像元数及像元尺寸； $k, l$  是整数 ( $-M/2 \leq k \leq M/2 - 1$ ,  $-N/2 \leq l \leq N/2 - 1$ )。这里忽略了 CCD 像元在采样中的积分效应。

根据菲涅耳衍射理论，重建距离应满足条件<sup>[19]</sup>

$$z_i \geq \left\{ \frac{\pi}{4\lambda} \left[ \left( \frac{L_x}{2} + \frac{M\Delta x}{2} \right)^2 + \left( \frac{L_y}{2} + \frac{N\Delta y}{2} \right)^2 \right]^2 \right\}^{1/3}, \quad (4)$$

式中  $L_x, L_y$  为物体在  $x, y$  方向上的限度大小。然而，(4)式是菲涅耳衍射的充分条件，非必要条件。

根据数字全息原理，对于菲涅耳数字全息术，通常选取准直光波作为重建参考光波，即  $C(x, y) = 1$ ；对于无透镜傅里叶变换全息术，重建参考光波为轴上点源，使得(1)式傅里叶变换中的二次相位因子恰被抵消，再现像光场复振幅分布为

$$U(x_i, y_i, z_i) = \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda z_i}(x_i^2 + y_i^2)\right] F\{H(x, y)\}, \quad (5)$$

为了得到高分辨率的、分离的再现像，上述两种全息的记录距离  $z_0$  需要分别满足条件<sup>[20,21]</sup>

$$z_{0\min} = \max\left(\frac{4L_x + 2M\Delta x}{\lambda} \Delta x, \frac{4L_y + 2N\Delta y}{\lambda} \Delta y\right), \quad (6)$$

$$z_{0\min} = \max\left(\frac{4L_x}{\lambda} \Delta x, \frac{4L_y}{\lambda} \Delta y\right). \quad (7)$$

可见，对于离轴菲涅耳数字全息，允许的最小记录距离比菲涅耳衍射距离要大，因此，以大于或等于

最小记录距离进行重建,就可获得高质量的再现象。但以记录距离进行重建是优化的选择,因为此时相位场的获得相对简单;而对于离轴无透镜傅里叶变换显微数字全息,允许的最小记录距离比菲涅耳衍射距离要小。但由(5)式可知,离轴无透镜傅里叶变换数字全息的像强度等于全息图的傅里叶变换的模的平方,而全息图的频谱只有零级和正、负一级谱,因此对于强度重建,无论以多大的距离重建,得到的再现象看起来都是一样的,只是一个像元所表示的长度不同而已。这是无透镜傅里叶变换数字全息的一个重要特点。

## 2.2 卷积重建法

根据瑞利-索末菲衍射积分及全息原理,卷积重建算法表示为

$$U(x_i, y_i, z_i) = F^{-1}\{F[C(x, y)H(x, y)] \cdot F[g(x, y)]\}, \quad (8)$$

式中  $F^{-1}\{\cdot\}$  表示二维傅里叶逆变换,  $g(x, y)$  为衍射在自由空间的脉冲响应<sup>[19]</sup>

$$g(x, y) = \frac{1}{j\lambda} \frac{\exp[jk(z_i^2 + x^2 + y^2)^{1/2}]}{(z_i^2 + x^2 + y^2)^{1/2}}. \quad (9)$$

在数值重建中,卷积重建法需要完成3次快速傅里叶变换,但像平面与全息图平面具有相同的抽样间隔。用  $g(k\Delta x, l\Delta y)$  表示离散化的脉冲响应,其中  $(-M/2 \leq k \leq M/2 - 1, -N/2 \leq l \leq N/2 - 1)$  为整数,其传递函数为

$$G_{CV}(m\Delta f_x, n\Delta f_y) = F\{g(k\Delta x, l\Delta y)\}, \quad (10)$$

式中  $m, n$  为整数,且分别与  $k, l$  取值相同,  $\Delta f_x = \Delta x_i / (\lambda z_i)$ ,  $\Delta f_y = \Delta y_i / (\lambda z_i)$ 。  $G_{CV}$  的带宽近似为

$$2f_{x\max} = \frac{M\Delta x}{\lambda z_i}, 2f_{y\max} = \frac{M\Delta y}{\lambda z_i}. \quad (11)$$

尼奎斯特抽样要求

$$2f_{x\max} \leq \frac{1}{\Delta x}, 2f_{y\max} \leq \frac{1}{\Delta y}, \quad (12)$$

因此,重建距离应满足

$$z_i \geq \max\left(\frac{M\Delta x^2}{\lambda}, \frac{M\Delta y^2}{\lambda}\right). \quad (13)$$

如果重建距离比较小,则将发生混迭效应,再现像分辨率降低,图像质量退化。当重建距离较大时,传递函数带宽将有所下降,再现像分辨率也会有所降低。而当重建距离取(13)式中的等式时,不仅抽样条件被满足,且用于表示物场的通频带最宽,即用于表示再现像的像元数最多。因此,这种情况下再现像分辨率最高,这个距离成为最佳再现距离,用  $z_0$  表示。

## 2.3 角谱重建法

根据角谱理论,由角谱重建法得到的再现像光场的复振幅分布为<sup>[19]</sup>

$$U(x_i, y_i, z_i) = F^{-1}\{F\{C(x, y)H(x, y)\}G_{AS}(f_x, f_y)\}, \quad (14)$$

式中  $G_{AS}(f_x, f_y)$  为衍射在频域的传递函数,

$$G_{AS}(f_x, f_y) = \exp\left[jkz_i \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}\right]. \quad (15)$$

实际中,角谱重建法需完成两次快速傅里叶变换,且像平面与全息图平面具有相同的抽样间隔。尽管已经证明  $G_{AS}(f_x, f_y) = F\{g(x, y)\}$ ,但由于离散傅里叶变换与连续傅里叶变换之间存在差异,因此  $G_{AS}(m\Delta f_x, n\Delta f_y) \neq F\{g(k\Delta x, l\Delta y)\}$ 。但由于角谱理论和瑞利-索末菲公式都是对衍射的准确描述,角谱重建法与卷积重建法之间不应该有本质的差异,即认为两种重建算法适用范围恰好相反的观点是不正确的。

为了比较  $G_{AS}$  与  $G_{CV}$  之间的差异, 图 1 给出了不同重建距离处得到的  $G_{AS}$  和  $G_{CV}$  的相位分布。模拟计算参数:  $M=N=1024$ ,  $\Delta x=\Delta y=6.8\ \mu\text{m}$ ,  $\lambda=532\ \text{nm}$ , 由(12)式算得的最佳再现距离  $z_0=89.0\ \text{mm}$ 。由图 1 可见, 当  $z_i < z_0$  时, 二者之间的差异比较大, 只是在零频附近很小的范围内二者才相同; 当  $z_i = z_0$  时, 二者完全相同, 而且此时表示像光场的像元数最多, 像的分辨率最高; 当  $z_i > z_0$  时,  $G_{CV}$  存在通频带的限制, 且距离越远, 通频带越小, 而  $G_{AS}$  不存在通频带限制, 但在  $G_{CV}$  的通频带范围内二者没有差异。因此, 在远距离处重建时, 卷积重建法得到的像分辨率较差。此外, 比较图 1(a)~(d)可见, 图 1(a)比图 1(b)更加接近于图 1(c)和图 1(d)。因此, 角谱重建法优于卷积重建法。

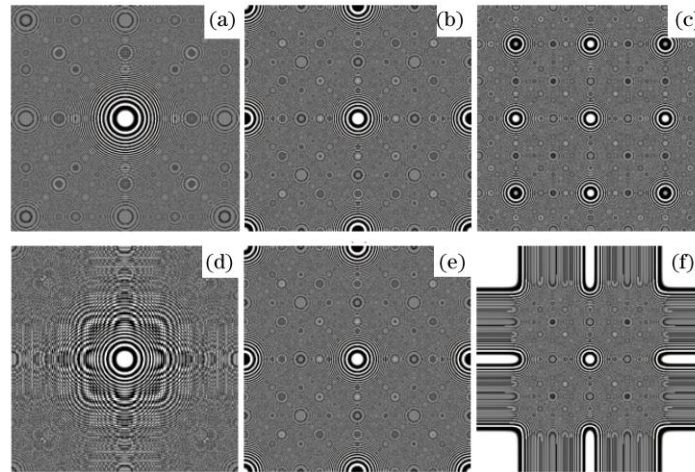


图 1 不同距离处传递函数(a),(c),(e)及脉冲响应的 FFT(b),(d),(f)的相位分布。(a),(b)51.1 mm; (c),(d)89.0 mm; (e),(f)135 mm  
Fig.1 Phase distributions of the transform function (a), (c), (e) and the FFT of impulse response (b), (d), (f) at different distances. (a), (b) 51.1 mm; (c), (d) 89.0 mm; (e), (f) 135 mm

需要指出的是, 卷积重建法和角谱重建法都不涉及二次相位因子, 因此, 即使对于无透镜傅里叶变换数字全息术, 也不涉及二次相位因子被抵消的情况, 所以关于卷积重建法和角谱重建法的结论无论对于何种记录光路均成立。

### 3 实验结果

采用离轴无透镜傅里叶变换数字全息记录光路<sup>[20]</sup>, 波长为 532 nm 的倍频 Nd:YAG 激光器作为照明光源, 用于记录全息图的 CCD 具有像元  $1317\ \text{pixel} \times 1035\ \text{pixel}$  大小  $6.8\ \mu\text{m} \times 6.8\ \mu\text{m}$ , 12 bit 灰度级输出。被记录物体是美国空军分辨率测试板, 成像区域大小为  $1.0\ \text{mm} \times 1.0\ \text{mm}$ 。

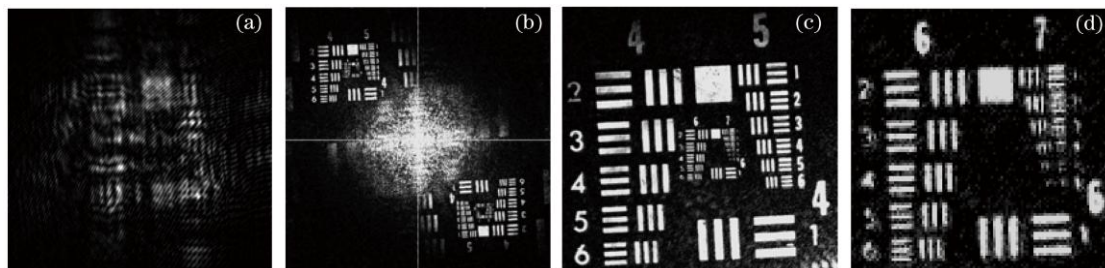


图 2 数字全息图(a)及由菲涅耳变换重建法得到的强度再现像(b~d)  
Fig.2 Digital hologram (a) and the intensity images reconstructed with Fresnel transform algorithm (b~d)

图 2(a)是实验所记录的全息图中心部分的放大图, 图 2(b)是根据菲涅耳变换重建法得到的强度再现像的二维分布, 图 2(c)是图 2(a)中左上角部分的放大图, 而图 2(d)是图 2(c)的中心放大像。

按照(3), (6)和(12)式算出的菲涅耳衍射最小距离、全息图最小记录距离及最佳再现距离分别为 135.2 mm,

51.1 mm 和 114.6 mm, 实验中实际记录距离是 44.5 mm<sup>[22]</sup>, 这是为了提高目标成像区域的分辨率, 采取了改进的记录条件<sup>[20]</sup>。

图 3 是利用卷积重建法对同一个全息图进行数值重建得到的不同距离处的强度重建像。可见, 重建距离小于最佳再现距离时, 再现像分辨率降低, 像质较差, 尤其是重建距离比最佳再现距离小得多时; 而当重建距离等于最佳再现距离时, 再现像与利用菲涅耳变换重建法得到的结果完全相同; 图 3(g)中正、负一级再现像发生了部分重叠, 图 3(h)的再现像分辨率比图 3(f)的稍差; 而图 3(i), (j)的再现像分辨率明显降低。

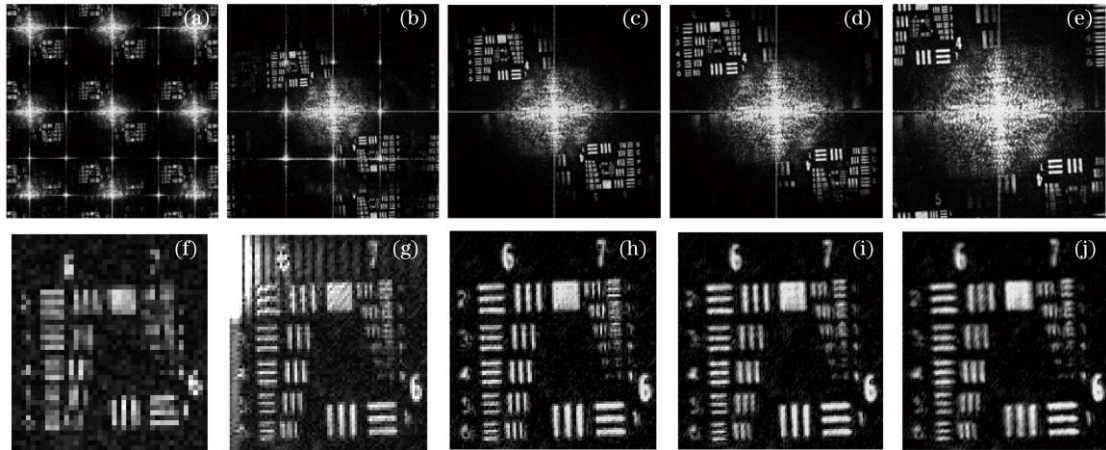


图 3 由卷积重建法得到的不同距离处的强度再现像。(a),(b) 44.5 mm; (c),(d) 89.0 mm;  
(e),(f) 114.6 mm; (g),(h) 133.5 mm; (i),(j) 168.4 mm

Fig.3 Intensity images reconstructed with convolution algorithm at different distances. (a),(b) 44.5 mm; (c),(d) 89.0 mm;  
(e),(f) 114.6 mm; (g),(h) 133.5 mm; (i),(j) 168.4 mm

图 4 是利用角谱重建法对同一个全息图进行数值重建得到的不同距离处的强度再现像。由图 4(a)~(d)可见, 当重建距离小于最佳再现距离时, 再现像质比较差, 但比相应距离下由卷积重建法得到的再现像质稍好。而当重建距离等于最佳再现距离时, 再现像与利用菲涅耳变换重建法及卷积重建法得到的结果完全相同。与卷积重建法不同的是, 当重建距离大于最佳再现距离时, 再现像的分辨率几乎没有降低, 但是当重建距离增大到一定值后, 正、负一级再现像发生部分重叠, 从而影响整个再现像光场的再现。因此, 利用角谱算法重建时, 在保证再现像不发生折叠的情况下, 应尽量选择大的重建距离。

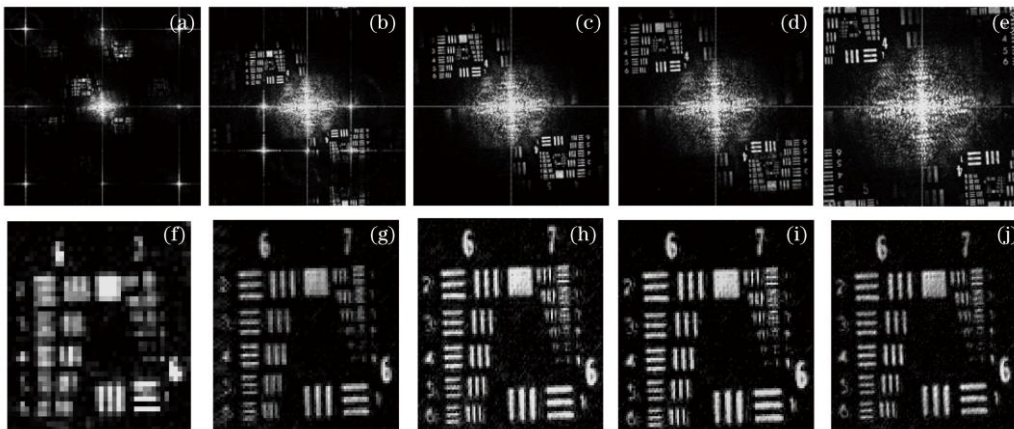


图 4 由角谱重建法得到的不同距离处的强度再现像。(a),(b) 44.5 mm; (c),(d) 89.0 mm;  
(e),(f) 114.6 mm; (g),(h) 133.5 mm; (i),(j) 168.4 mm

Fig.4 Intensity images reconstructed with angular spectrum algorithm at different distances. (a),(b) 44.5 mm; (c),(d) 89.0 mm;  
(e),(f) 114.6 mm; (g),(h) 133.5 mm; (i),(j) 168.4 mm

## 4 结 论

对数字全息常见的三种重建算法进行了理论分析和比较, 通过离轴无透镜傅里叶变换数字全息实验进



行了验证。结果表明,对于离轴无透镜傅里叶变换数字全息,采用菲涅耳变换重建算法重建时无重建距离的限制;采用卷积重建法只能在最佳再现距离附近一个非常小的范围内才能获得高分辨率再现像;而采用角谱重建法在略小于最佳再现距离及大于最佳再现距离较大范围内重建,均能获得高分辨率的再现像。对于菲涅耳数字全息术,只要记录时满足最小记录距离及参考光偏置要求,以记录距离进行重建是优化的选择。角谱重建法总体上优于卷积重建法。

### 参 考 文 献

- 1 B. Kemper, G. Bally. Digital holographic microscopy for live cell applications and technical inspection[J]. *Appl. Opt.*, 2008, **47**(4): A52~A61
- 2 T. Colomb, E. Cuche, F. Charriere *et al.*. Automatic procedure for aberration compensation in digital holographic microscopy and applications to specimen shape compensation[J]. *Appl. Opt.*, 2006, **45**(5): 851~863
- 3 D. Carl, B. Kemper, G. Wernicke *et al.*. Parameter-optimized digital holographic microscope for high-resolution living-cell analysis[J]. *Appl. Opt.*, 2004, **43**(36): 6536~6544
- 4 C. J. Mann, K. Kim. Quantitative phase-contrast microscopy by angular spectrum digital holography [C]. *SPIE*, 2006, **6090**: 60900B
- 5 G. Udupa, B. Ngoi, H. Freddy *et al.*. Defect detection in unpolished Si wafers by shearography[J]. *Meas. Sci. Tech.*, 2004, **15**: 35~43
- 6 E. Novak. MEMS metrology techniques[C]. *SPIE*, 2005, **5716**: 173~181
- 7 K. Volker, J. H. Hans, W. Jptner. Application of digital holographic microscopy for inspection of micro-optical components[C]. *SPIE*, 2001, **4398**: 189~198
- 8 F. Montfort, Y. Emery, F. Marquet. Process engineering and failure analysis of MEMS and MOEMS by digital holography microscopy(DHM)[C]. *SPIE*, 2007, **6463**: 64630G
- 9 D. Y. Wang, J. Zhao, F. C. Zhang *et al.*. High-fidelity numerical realization of multiple-step Fresnel propagation for the reconstruction of digital holograms[J]. *Appl. Opt.*, 2008, **47**(19): D12~D20
- 10 F. C. Zhang, G. Pedrini, W. Osten. Reconstruction algorithm for high-numerical aperture holograms with diffraction-limited resolution[J]. *Opt. Lett.*, 2006, **31**(11): 1633~1635
- 11 M. Sypek, C. Prokopowicz, M. Gorecki. Image multiplying and high-frequency oscillations effects in the Fresnel region light propagation simulation [J]. *Opt. Express*, 2008, **42**(11): 3158~3164
- 12 F. Shen, A. Wang. Fast-Fourier-transform based numerical integration method for the Rayleigh-Sommerfeld diffractin formula [J]. *Appl. Opt.*, 2006, **5**(6): 1102~11120
- 13 A. Sterm, B. Javidi. Analysis of practical sampling and reconstruction from Fresnel fields [J]. *Opt. Eng.*, 2004, **43**(1): 239~250
- 14 F. C. Zhang, G. Pedrini, W. Osten. Aberration free reconstruction algorithm for high numerical aperture digital hologram [C]. *SPIE*, 2006, **6188**: 618814
- 15 P. Picart, J. Leval. General theoretical formulation of image formation in digital Fresnel holography [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2008, **25**(7): 1744~1761
- 16 J. Zhao, D. Y. Wang, J. J. Xie *et al.*. Comparison of reconstruction algorithms in lensless Fourier transform digital holography [C]. *SPIE*, 2007, **6832**: 683208
- 17 Zhong Liyun, Zhang Yimo, Lü Xiaoxu *et al.* Some quantitative analysis about digital holographic reconstructed image [J]. *Chinese J. Lasers*, 2004, **31**(5): 570~574  
钟丽云, 张以谟, 吕晓旭 等. 数字全息图再现像的分析计算[J]. *中国激光*, 2004, **31**(5): 570~574
- 18 Wang Huayin, Wang Guangjun, Zhao Jei *et al.*. Imaging resolution analysis of digital holographic microscopy [J]. *Chinese J. Lasers*, 2007, **34**(12): 1670~1675  
王华英, 王广俊, 赵洁 等. 数字全息显微成像的分辨率分析[J]. *中国激光*, 2007, **34**(12): 1670~1675
- 19 J. W. Goodman. Introduction to Fourier Optics Third edition[M]. K. C. Qin, P. S. Liu, J. B. Chen *et al.*. trans. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2006
- 20 H. Y. Wang, D. Y. Wang, J. Zhao *et al.*. Simple and robust digital holography for high-resolution imaging[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2008, **6**(3): 165~167
- 21 H. Y. Wang, D. Y. Wang, J. J. Xie. Recording conditions of digital holography[C]. *SPIE*, 2007, **6279**: 62791J
- 22 H. Y. Wang, J. Zhao, G. J. Wang *et al.*. Imaging technique for three-dimensional microstructure by digital holography [C]. *SPIE*, 2007, **6832**: 683210