

# 各向异性色散左手材料三层平面波导 TM 模的传输特性

沈陆发<sup>1,2</sup> 王子华<sup>3</sup>

<sup>1</sup>湖州师范学院理学院, 浙江 湖州 313000

<sup>2</sup>浙江大学光及电磁波研究中心, 浙江 杭州 310058

<sup>3</sup>上海大学特种光纤与光接入网省部共建重点实验室, 上海 200072

**摘要** 对含左手材料的三层平面波导的 TM 振荡模进行了研究。利用麦克斯韦方程组,得到了 TM 振荡模的色散方程。根据该色散方程,考虑芯层厚度及模阶数对色散特性的影响,画出了相关 TM 模的色散曲线。从中可以发现,色散特性反常且具有双模简并的特性。此外,对波导中 TM 模的归一化功率流特性进行了相关的研究。结果显示,在一定的条件下, TM 振荡模的归一化功率流具有正、负和零。正的归一化功率流意味着能量在波导中正向传输;负的归一化功率流则说明了能量在波导中向后传输;而零归一化功率流则说明了能量静止于波导中。

**关键词** 集成光学;平面波导;左手材料;色散特性;归一化功率流

**中图分类号** TN252

**OCIS** 130.0130 130.3120 160.3918

**文献标识码** A

## Transmission Properties of TM Modes in Slab Waveguide with Anisotropy and Dispersion Left-Handed Materials

Shen Lufa<sup>1,2</sup> Wang Zihua<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Science College, Huzhou Teachers College, Huzhou, Zhejiang 313000, China

<sup>2</sup> Centre for Optical and Electromagnetic Research, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310058, China

<sup>3</sup> Key Laboratory of Specialty Fiber Optics and Optical Access Networks, Shanghai University, Shanghai 200072, China

**Abstract** A three-layer slab waveguide with left-handed material is investigated. Through Maxwell equations, a dispersion equation for TM oscillating guided modes is obtained and some mode dispersion curves are plotted, respectively. It is found that they have an abnormal dispersion property and two modes degeneracy near cutoff. Besides, the normalized power flux of TM oscillating guided modes in the slab waveguide is studied. The results reveal their power fluxes have positive value, negative value and zero. The positive or negative power flux means energy in waveguide travels forward or backward. But, zero power flux implies all energy is stored in the slab waveguide.

**Key words** integrated optics; slab waveguide; left-handed material; dispersion properties; normalized power flux

## 1 引言

左手材料是一种人工合成材料,当电磁波在其中传输时,它的电场、磁场以及波矢方向构成左手关系,而普通材料中它们三者却构成右手关系。由于左手材料的奇异特性和潜在的应用价值而引起了国内外学界的广泛兴趣。它的典型特性有负折射、逆 Doppler 效应、反向 Cherenkov 辐射<sup>[1]</sup>以及反向 Goose-Hanchen 位移<sup>[2,3]</sup>,慢光现象<sup>[4]</sup>等。由于上述这些反常特性,所以它有巨大的潜在应用。比如:理想透镜<sup>[5]</sup>、高效耦合

**收稿日期:** 2010-06-30; **收到修改稿日期:** 2010-07-27

**基金项目:** 上海市科委重点实验室项目(08DZ2231100)资助课题。

**作者简介:** 沈陆发(1963—),男,副教授,主要从事导波光学方面的研究。E-mail: shenlufa0410@sina.com

器<sup>[6,7]</sup>、低损耗 Terahertz 波导<sup>[8]</sup>等。Smith 等<sup>[9]</sup>在 2000 年制备了左手材料,由于纳米技术的发展,目前,左手材料在太赫兹波、光波段也已经成功制备<sup>[10,11]</sup>。Wang Z. H. 等<sup>[12,13]</sup>对不考虑材料色散、各向同性的左手材料波导进行了研究,发现如果基模的缺失,色散曲线随着模阶数的增加而左移;He Y. 等<sup>[14,15]</sup>对各向同性、考虑材料色散的左手材料进行了进一步的研究,发现如果基模的存在,色散曲线随着模阶数的增加而右移;Liu Z. 等<sup>[16]</sup>对各向异性、不考虑材料色散的左手材料波导进行了研究。Pan T. 等<sup>[17]</sup>对各向异性、色散左手材料波导进行了研究,然而,他们大多采用的是图解法和软件仿真的方法。但是图解法只是判断色散方程的解是否存在,而软件仿真也有它一定的内在局限性,本文采用数值计算的方法,从理论上对平面波导的导模特性进行了精确的研究。

本文考虑三层平面波导,它的覆盖层和衬底都为普通材料,而芯层为左手材料。一般而言,平面波导能传输 TE 和 TM 模,本文主要讨论 TM 模,TE 模将在其它文章中讨论。从麦克斯韦方程组出发,考虑各向异性的左手材料,得到了 TM 模的色散方程。根据色散方程,同时考虑了材料色散,画出了相应的色散曲线。此外,又对左手材料平面波导中 TM 模的能量传输特性进行了相应的研究。

## 2 TM 振荡模的色散方程及波导中功率流

### 2.1 TM 振荡模的色散方程

含左手材料的三层平面波导如图 1 所示。波导芯层的厚度为  $h$ ,考虑为各向异性的左手材料。它的介电常数矢量为  $\boldsymbol{\epsilon}_2(\epsilon_{2x}, \epsilon_{2y}, \epsilon_{2z})$  和磁导率矢量为  $\boldsymbol{\mu}_2(\mu_{2x}, \mu_{2y}, \mu_{2z})$ 。它的覆盖层和衬底为均匀的、各向同性的普通材料,它们的介电常数、磁导率分别为  $\epsilon_1, \epsilon_3$  和  $\mu_1, \mu_3$ 。同时,为了简化,把因子  $\exp[i(\omega t - \beta z)]$  在所有方程中进行了省略。该因子中的  $\omega$  和  $\beta$  分别是角频率和纵向传播常数。对于振荡模,电磁场在芯层是振荡的,而在覆盖层和衬底却是衰减的。对于 TM 模,它有  $H_y, E_x$  和  $E_z$  三个电磁分量。根据麦克斯韦方程,波导芯层中的电磁场应满足下列方程:

$$-i\beta E_x - \frac{\partial E_x}{\partial x} = i\omega\mu_{2y}H_y, \quad (1)$$

$$E_x = -\frac{\beta}{\omega\epsilon_{2x}}H_y, \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = -i\omega\epsilon_{2z}E_z, \quad (3)$$

在覆盖层和衬底中,只要将上述方程中的介电常数和磁导率改为对应介质的介电常数和磁导率,可以得到类似的电磁场方程。经过对电磁场方程的数学计算,可得平面波导中的磁场分布为

$$H_{y1} = H_1 \exp[-\alpha_1(x-h)], \quad x > h, \quad (4)$$

$$H_{y2} = H_2 \cos(k_2x - \varphi_s), \quad 0 < x < h, \quad (5)$$

$$H_{y3} = H_3 \exp(\alpha_3x), \quad x < 0, \quad (6)$$

式中  $H_1, H_2$  和  $H_3$  分别是波导各层介质中磁场的振幅,  $\alpha_1 = \sqrt{\beta^2 - k_0^2\epsilon_1\mu_1}$  和  $\alpha_3 = \sqrt{\beta^2 - k_0^2\epsilon_3\mu_3}$  分别为覆盖层和衬底中场衰减系数,  $k_2$  为横向传播常数,记为  $k_2 = \sqrt{(k_0^2\epsilon_{2x}\mu_{2y} - \beta^2)(\epsilon_{2z}/\epsilon_{2x})}$ ,  $k_0$  和  $\varphi_s$  分别为真空中的传播常数和相位常数。

根据边界的连续性条件,经过数学计算, TM 振荡模的色散方程为

$$k_2h - \arctan\left(\frac{\epsilon_{2z}\alpha_1}{\epsilon_1k_2}\right) - \arctan\left(\frac{\epsilon_{2z}\alpha_3}{\epsilon_3k_2}\right) = m\pi, \quad (7)$$

式中  $m$  为模阶数。

### 2.2 波导中 TM 模的功率流分布

波导中的功率流通过对坡印亭矢量在波导中的积分。对于 TM 振荡模,波导中各层介质的功率流为

$$P_i = \frac{\beta}{2\omega} \int \frac{1}{\epsilon_i} |H_{yi}|^2 dx \quad (i = 1, 2, 3). \quad (8)$$

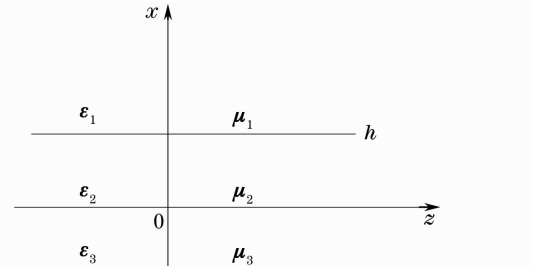


图 1 含左手材料三层平面波导结构示意图  
Fig. 1 Schematic geometry of a three-layer slab waveguide including left-handed materials

将(4)~(6)式代入(8)式,经过数学计算,波导中的功率流分布如下:

$$P_1 = \frac{\beta H_2^2}{4\omega \epsilon_1 \alpha_1} \cos^2(k_2 h - \varphi_s), \quad (9)$$

$$P_2 = \frac{\beta H_2^2}{4\omega \epsilon_{2x} k_2} [k_2 h + \sin(k_2 h) \cos(k_2 h - 2\varphi_s)], \quad (10)$$

$$P_3 = \frac{\beta H_2^2}{4\omega \epsilon_3 \alpha_3} \cos^2 \varphi_s, \quad (11)$$

式中  $P_1, P_2$  和  $P_3$  分别为波导的覆盖层、芯层以及衬底中的功率流。

为了得到波导中电磁场的能量传输特性,采用文献[18]的方法,对上述功率流进行归一化。

$$P_{\text{tot}} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{|P_1| + |P_2| + |P_3|}, \quad (12)$$

在普通介质中,能量传输的方向和波矢的方向一致,所以,当电磁波沿正向传输时,覆盖层和衬底中的功率流也应为正向传输,即  $P_1, P_3 > 0$ 。然而,当电磁波在左手材料中传输时,由于波矢的方向和能量传输的方向相反,所以,芯层中的功率流应小于零,即  $P_2 < 0$ 。根据(12)式,从数学角度看,发现有三种可能的情况存在:1) 当  $P_1 + P_3 > |P_2|$  时,即  $P_{\text{tot}} > 0$ ,此时波导中的能量向前传输;2) 当  $P_1 + P_3 < |P_2|$  时,即  $P_{\text{tot}} < 0$ ,此时波导中的能量向后传输;3) 当  $P_1 + P_3 = |P_2|$  时,即  $P_{\text{tot}} = 0$ ,此时的电磁波处于静止状态,所有的能量储存在波导中。

### 3 数值结果与讨论

根据左手材料的实际结构特点,应同时考虑其材料色散以及各向异性的基本特性。上述的色散方程,已经考虑了材料的各向异性;考虑材料色散,有实验建立的实验模型<sup>[18]</sup>。该模型的介电常数及磁导率随频率变化的表达式分别为

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \mu(\omega) = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad (13)$$

式中  $F=0.56$ ,  $\omega_0/2\pi=4$  GHz,  $\omega_p/2\pi=10$  GHz。当频率从 4.0 GHz 增加到 6.0 GHz,(13)式中的介电常数和磁导率同时小于零。考虑各向异性的左手材料,它的横向介电常数和磁导率都小于零,纵向的介电常数和磁导率都大于零,即:  $\epsilon_{2x} = \epsilon_{2y} = \epsilon(\omega)$ ,  $\epsilon_{2z} = 2$ ;  $\mu_{2x} = \mu_{2y} = \mu(\omega)$ ,  $\mu_{2z} = 1$ 。对于芯层中的传播常数  $k_2 = \sqrt{(k_0^2 \epsilon_{2x} \mu_{2y} - \beta^2)(\epsilon_{2z}/\epsilon_{2x})}$ ,由于横向和纵向介电常数异号,所以当  $\beta > k_0 \sqrt{\epsilon_{2x} \mu_{2y}}$  时,此时的模式我们称为 TM 振荡模;而当  $\beta < k_0 \sqrt{\epsilon_{2x} \mu_{2y}}$ ,  $k_2$  为纯虚数,将这些模称为 TM 表面模。

#### 3.1 TM 振荡模的色散特性

为了讨论左手材料对平面波导传输特性的影响,考虑改变芯层的厚度,以及改变该层介质的介电常数和磁导率,同时假定覆盖层和衬底具有固定的介电常数和磁导率,分别为  $\epsilon_1 = 3.0, \mu_1 = 1$  和  $\epsilon_3 = 2.25, \mu_3 = 1$ ,将对下列的两种情况进行讨论。

##### 3.1.1 模阶数对色散特性的影响

当波导芯层的厚度  $h=0.08$  m 时,根据(7),(13)式,画出了相应 TM 模的色散曲线,如图 2 所示。横轴为频率,纵轴为有效折射率。当频率从 4.0 GHz 增加到 6.0 GHz 时,共画出了 4 个  $\text{TM}_m$  模,  $m$  为模阶数,分别为 0, 1, 2, 3。当  $m=0$  时,基模是存在的,这不同于忽略材料色散、各向同性的含左手材料平面波导<sup>[12,13]</sup>。随着模阶数的增加,色散曲线右移,所对应的截止频率变大,这又不同于忽略材料色散、各向同性的左手材料平面波导<sup>[12,13]</sup>,而类似于普通介质平面波导导模的色散特性<sup>[19]</sup>。但是,根据它们的色散曲线,当频率增加时,有效折射率反而减小,这种色散为反常色散,它们的群速  $v_g = d\omega/(d\beta)$  应为小于零。负的群速说明电磁波能量向后传输,这种后向波现象正是反映了左手材料的基本特性。

##### 3.1.2 波导厚度对色散特性的影响

从图 2 可以发现,当模阶数从 0 增加到 3 时, TM 振荡模有类似的色散特性。通常对基模比较感兴趣,当  $m=0$  时,根据(7)式和(13)式,色散曲线随波导芯层厚度  $h$  变化的曲线如图 3 所示。随着  $h$  的增加,色散

曲线左移;而普通材料的平面波导,对应的色散曲线却随着  $h$  的增加而右移<sup>[19]</sup>。这是由于普通材料平面波导的有效厚度随着  $h$  的增加而增加,而左手材料平面波导的有效厚度,由于芯层的负介电常数、负磁导率,所以随着  $h$  的增加反而减小,这就产生了普通材料平面波导色散曲线右移而左手材料平面波导色散曲线左移。此外,在截止频率附近,对于相同的频率,有两个不同的有效折射率,这意味着此时波导中存在 TM 双模简并的特性。而且,随着  $h$  的增加,这种双模简并的特性逐渐变得不太明显。

当  $m=1$  时,根据(7)、(13)式,色散曲线随波导芯层厚度  $h$  变化的曲线如图 4 所示。随着  $h$  的增加,色散曲线左移,这和上述基模的色散曲线类似。当  $h=0.03$  m 和  $0.04$  m 时,色散曲线在截止频率附近也具有双值性,即波导中 TM 双模简并特性存在,但是,当  $h=0.05$  m 时,有效折射率随频率单调减小,双模简并现象消失。

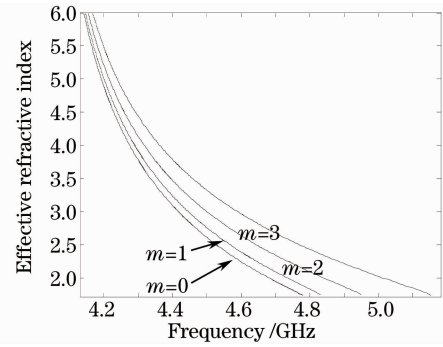


图 2  $TM_m$  ( $m=0,1,2,3$ ) 振荡模的色散曲线

Fig. 2 Dispersion curves for the  $TM_m$  oscillating guided modes depend on mode number and the effective-refractive-index is a function with frequency from 4 GHz to 6 GHz. As  $h$  fixed (0.08 m), and  $m$  increases from 0 to 3

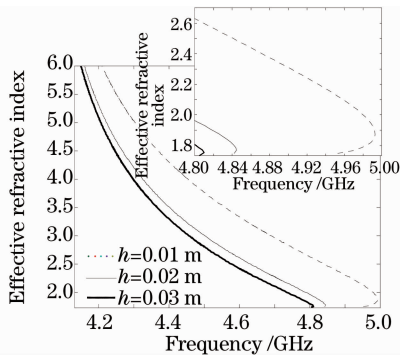


图 3  $TM_0$  振荡模色散曲线

Fig. 3 Dispersion curves for  $TM_0$  oscillating guided modes depend on waveguide thickness

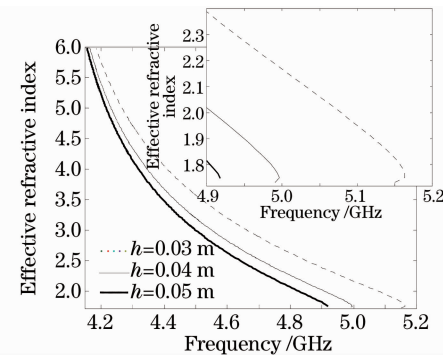


图 4  $TM_1$  振荡模的色散曲线

Fig. 4 Dispersion curves for  $TM_1$  oscillating guided modes depend on waveguide thickness

### 3.2 TM 振荡模的功率流特性

#### 3.2.1 模阶数对波导功率流的影响

当  $h=0.08$  m 时,根据(7)~(13)式,画出了 4 个 TM 模的归一化功率流随频率变化曲线,如图 5 所示。由图可知,随着频率的增加,芯层中的功率流逐渐减小。当  $m=0$  和 1 时,在不同的频域范围,它的归一化功率流可以大于零、等于零和小于零。在大部分的工作频率内, TM 模的归一化功率流小于零。但在很窄的工作频域, TM 模的归一化功率流小于零,这说明了波导中存在有能量沿不同方向传输的双模简并现象,只是由于频域太窄,所以在图 2 中没有明显地显示出来。当色散曲线的斜率大于零时,它有正的群速;反之,当色散曲线的斜率小于零时,它有负的群速。正的群速意味着能量向前传输,而负的群速则意味着能量向后传输。在正、负群速之间,一定存在群速为零。零群速意味着电磁波静止于波导内,所对应的为该模最大的工作频率。零群速的特性有益于新颖光开关以及高性能光存储器的设计。当  $m=2$  和 3 时,在低频区,归一化功率流能够为 1,则说明

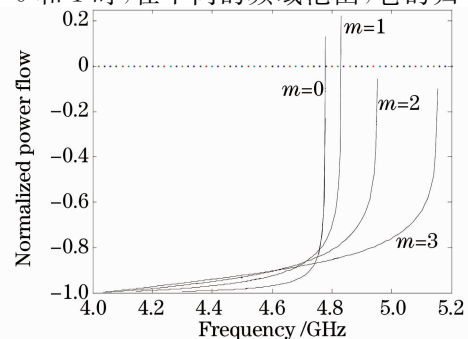


图 5  $TM_m$  振荡模 ( $m=0,1,2,3$ ) 的归一化功率流特性曲线

Fig. 5 Power flux curves for  $TM_m$  oscillating guided modes depend on mode number

了 TM 模的全部能量均集中在芯层中传输,覆盖层和衬底中均无能量。随着频率的增加,能量逐渐向覆盖层和衬底中转移,但芯层中能量始终大于覆盖层和衬底中的能量之和,即归一化功率流始终小于零。

### 3.2.2 波导厚度对功率流特性的影响

从图 5 可以发现, TM 模的归一化功率流特性曲线有类似的特性。当  $m=0$  时,改变芯层厚度  $h$  (0.01、0.02 和 0.03 m),根据(7)~(13)式, TM<sub>0</sub> 模的归一化功率流随频率变化的曲线如图 6 所示。在一定的频域内,归一化功率流有正向传输、反向传输及静止于波导中三种情况。随着  $h$  的增加,曲线向左下方移动,工作频率变小,芯层的功率流增加。此外,当  $h=0.01$  m 时,基模有较大的正向功率流,但是,随着  $h$  的增加,正向功率流逐渐变小。这是因为当  $h$  较小时,色散曲线的双值性比较明显,但随着  $h$  的增加,色散曲线的双值性减弱。

当  $m=1$  时,根据(7)~(13)式,芯层厚度分别为 0.03, 0.04 和 0.05 m, TM<sub>1</sub> 模的归一化功率流特性曲线如图 7 所示。随着  $h$  的增加,功率流曲线向左下方移动。这意味着导模的工作频率变小、芯层中的传输功率流增加。当  $h=0.03$  m 和  $h=0.04$  m 时,波导中的归一化功率流有正、负及零。这说明了在一定的频域内,该模的能量可以沿正向传输、反向传输及静止于波导内。当  $h=0.05$  m 时,该模的归一化功率流始终小于零,这说明了该模的能量在波导中总是反向传输。

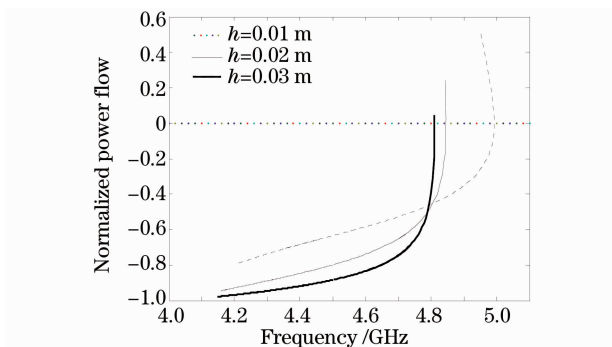


图 6 TM<sub>0</sub> 振荡模的归一化功率流特性曲线

Fig. 6 Power flux curves for TM<sub>0</sub> oscillating guided modes depend on waveguide thickness

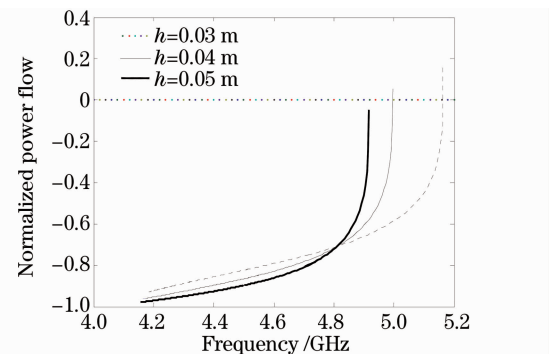


图 7 TM<sub>1</sub> 振荡模的归一化功率流特性曲线

Fig. 7 Power flux curves for TM<sub>1</sub> oscillating guided modes depend on waveguide thickness

## 4 结 论

对以具有各向异性、色散的左手材料为芯层,普通材料为覆盖层和衬底的三层平面波导进行了相关的研究。从麦克斯韦方程组出发,得到了 TM 振荡模的色散方程。根据色散方程,画出了相应的色散曲线。随着频率的增加,有效折射率减小,色散特性反常;在截止频率附近,出现双模简并的现象。此外,对 TM 振荡模的功率流特性进行了相关的研究。在某些工作频率下,该模的归一化功率流可以为正值、负值和零。正的归一化功率流说明能量向前传输;负的归一化功率流则说明能量向后传输;而零归一化功率流则说明能量被存储在波导中,这是一种新特性,有助于设计高性能的光开关及光耦合器等。

## 参 考 文 献

- 1 V. G. Veselago. Electrodynamics of substances with simultaneously negative electrical and magnetic properties[J]. *Sov Phys USPEKHI*, 1968, **10**(4): 509~517
- 2 P. R. Berman. Goos-Hänchen shift in negatively refractive media[J]. *Phys. Rev. E*, 2002, **66**: 067603
- 3 D. K. Qing, G. Chen. Goos-Hanchen shifts at the interfaces between left-and right-handed media[J]. *Opt. Lett.*, 2004, **29**(8): 872~874
- 4 J. L. He, Y. Jin, Z. Hong *et al.*. Slow light in a dielectric waveguide with negative-refractive-index photonic crystal cladding[J]. *Opt. Express*, 2008, **16**(15): 11077~11082
- 5 J. B. Pendry. Negative refraction makes a perfect lens[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, **85**(18): 3966~3969
- 6 S. Xiao, L. Shen, S. He. A novel directional coupler utilizing left-handed material[J]. *IEEE Photon Technol. Lett.*,

- 2004, **16**(1): 171~173
- 7 N. Engheta, R. W. Ziolkowski. A positive future for double-negative metamaterial[J]. *IEEE Trans. Micr. Theory Tech.*, 2005, **53**(4): 1535~1556
- 8 Chen Daru, Chen Haibin. A novel low-loss terahertz waveguide: polymer tube[J]. *Opt. Express*, 2010, **18**(4): 3762~3767
- 9 D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier *et al.*. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, **84**(18): 4184~4187
- 10 A. Berrier, M. Mulot, M. Swillo *et al.*. Negative refraction at infrared wavelengths in a two-dimensional photonic crystal [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, **93**(7): 073902
- 11 C. M. Soukoulis, S. Linden, M. Wegener. Negative refractive index at optical wavelengths [J]. *Science*, 2007, **315**(5808): 47~495
- 12 Z. Y. Xiao, Z. H. Wang. Dispersion characteristics of asymmetric double-negative material slab waveguides[J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2006, **23**(9): 1757~1760
- 13 Shen Lufa, Wang Zihua. Propagation properties of asymmetric metamaterial slab waveguide[J]. *J. Optoelectronics • Laser*, 2006, **17**(6): 688~692  
沈陆发, 王子华. 非对称含左手材料平面波导的传输特性[J]. *光电子·激光*, 2006, **17**(6): 688~692
- 14 Y. He, J. Zhang, C. F. Li. Guided modes in a symmetric five-layer left-handed waveguide[J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2008, **25**(12): 2081~2091
- 15 Shen Lufa, Wang Zihua. Guided modes in fiber with left-handed materials[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2009, **26**(4): 754~759
- 16 Z. Liu, L. Hu, Z. Lin. Enhancing photon tunnelling by a slab of uniaxially anisotropic left-handed material[J]. *Phys. Lett. A*, 2003, **308**: 294~301
- 17 T. Pan, G. Xu, T. Zang *et al.*. Study of a slab waveguide loaded with dispersive anisotropic metamaterials[J]. *Appl. Phys. A*, 2009, **95**: 367~372
- 18 I. V. Shadrivov, A. A. Sukhorukov, Y. S. Kivshar. Guided modes in negative-refractive-index waveguides[J]. *Phys. Rev. E*, 2003, **67**: 057602
- 19 T. Tamir. *Integrated Optics*[M]. Liang Minji, Zhang Fuchu Transl., Beijing: Science Press, 1982  
T. 塔米尔. *集成光学*[M]. 梁民基, 张福初译. 北京科学出版社, 1982