

适用于激光跟踪仪转站的改进平差方法

罗涛^{1,3}, 齐志军², 王巍¹, 何晓业^{1*}¹中国科学技术大学国家同步辐射实验室, 安徽 合肥 230029;²武汉大学测绘学院, 湖北 武汉 430079;³深圳综合粒子设施研究院, 广东 深圳 518107

摘要 激光跟踪仪的转站误差直接影响数据质量。最小二乘(LS)方法只考虑观测向量误差,加权总体最小二乘(WTLS)方法忽略转站模型的特点,两种算法均存在一些不足。针对激光跟踪仪坐标转换模型的特点,提出了结构约束总体最小二乘(SCTLS)方法。该方法能够顾及坐标观测值的相关性,提取误差矩阵的特殊结构,从而保证相同元素的改正数是一致的。同时对待估参数附加限制条件,保证旋转矩阵具有正交性。使用拉格朗日乘法严密推导算法的求解步骤,给出了精度评定的公式。仿真结果显示 SCTLS 法的估计参数偏差小于 WTLS 法,准确性更高;采用合肥光源控制网中的实测数据计算,验证 SCTLS 法的精度更高。与 LS 和 WTLS 算法相比,所提算法更加严密,能够有效减小转站中的误差积累。

关键词 测量; 激光跟踪仪; 结构约束总体最小二乘; 迭代算法; 转站精度

中图分类号 P207 文献标志码 A

DOI: 10.3788/CJL230555

1 引言

激光跟踪仪是一种高精度的空间三维坐标测量仪器,具有操作简单、测量精度高和测量范围广等优点,广泛应用于粒子加速器准直测量^[1-2]、大尺度工业测量^[3-4]和精密机械测量^[5-6]等领域。由于测件尺寸和测量环境的限制^[7-9],需要进行转站测量,然后将所有测站的数据转换到统一坐标系。转换精度将影响最终的数据质量,因此针对转站模型研究高精度的转换方法具有十分重要的意义。

如果只考虑目标坐标系的误差,可以通过建立 Gauss-Markov 模型采用最小二乘(LS)方法求解转换参数,其中旋转矩阵可以由罗格里格矩阵^[10]、四元数^[11]和欧拉角^[12]等不同形式表达。以上非线性模型需要迭代求解。为了提高算法效率,王德元等^[13]采用无需迭代的 Procrustes 方法依次求出旋转矩阵、尺度因子和平移向量。然而上述方法忽略了系数矩阵的误差,Gauss-Markov 模型并不严密,得到的参数统计上是有偏的^[14]。

为了解决该问题,众多学者引入总体最小二乘(TLS)方法求解转换参数。针对系数矩阵存在固定列的情况,使用基于奇异值分解的混合总体最小二乘方法求解参数^[15],该方法只能处理等精度的观测值;针对待估参数具有函数关系的情况,需要使用约束总体

小二乘方法^[16],该方法要求随机模型必须满足特定的形式,并不具有通用性;针对误差矩阵中的重复元素,使用基于变量投影法结构总体最小二乘方法^[17],但是需要定义大量稀疏矩阵,计算量较大;为了减小转换中的粗差影响,Ma 等^[18]在总体最小二乘迭代过程中进行粗差探测,但是算法的计算效率很低,影响其实用性。李丽娟等^[19]使用具有间接平差形式的加权总体最小二乘(WTLS)方法计算激光跟踪仪转站参数,通过实验验证其精度高于 LS 方法,然而依旧存在着一些不足:1)12 个待估参数中只有 7 个独立量,WTLS 没有考虑参数的函数关系,得到的旋转矩阵并不满足正交性,难以从中提取角度信息;2)误差矩阵中的重复元素具有结构性,WTLS 计算的相同元素改正数并不一致;3)直角坐标系的坐标由球面坐标系转换而来,具有相关性,WTLS 没有考虑点位坐标观测值的相关性,同时也缺少精度评定公式。

为了进一步完善 WTLS 法,本文采用结构约束总体最小二乘(SCTLS)方法求解转站参数。通过引入约束方程,确保旋转矩阵具有正交性。不同于引入多个稀疏矩阵^[17],本文仅引入 1 个矩阵用于提取误差矩阵的结构,从而确保重复元素的改正数是一致的。通过仿真数据和实测数据的解算,验证了本文算法的有效性,精度和准确度均较 WTLS 有所提升。

收稿日期: 2023-02-21; 修回日期: 2023-04-17; 录用日期: 2023-05-22; 网络首发日期: 2023-07-04

基金项目: 中国科学技术大学重要方向项目培育基金(WK2310000085)

通信作者: *xyhe@ustc.edu.cn

2 转站模型

如图 1 所示,在测站点架设激光跟踪仪,观测了定向点 P ,得到距离 d 、水平角 α 和天顶距 β ,根据球坐标和直角坐标的转换,计算定向点的笛卡儿坐标各分量^[20-22]:

$$\begin{cases} x = d \sin \beta \cos \alpha \\ y = d \sin \beta \sin \alpha \\ z = d \cos \beta \end{cases} \quad (1)$$

转站前后观测 n 个定向点,得到 $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ 和 $\mathbf{P}'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)^T$,其中 $i = 1, \dots, n$ 。两台激光跟踪仪进行转站相当于两个坐标系进行相似变换,令 s, \mathbf{R}_1 和 $\mathbf{t} = [t_1 \ t_2 \ t_3]^T$ 分别表示相似变换中的比例因子、旋转矩阵和平移参数,将 s 和 \mathbf{R}_1 合并为复合矩阵 $\mathbf{R} = s\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix}$ 。在两个测站使用激光跟踪仪观测了 n 个共同的定向点,顾及两个测站的误差,得到误差方程

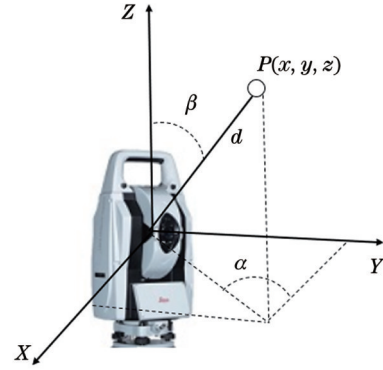


图 1 激光跟踪仪的坐标系

Fig. 1 Coordinate system of laser tracker

$$\mathbf{y} + \mathbf{e}_y = (\mathbf{A} + \mathbf{E}_A) \boldsymbol{\xi}, \quad (2)$$

式中: $\mathbf{y} = [x_1 \ y_1 \ z_1 \ \dots \ x_n \ y_n \ z_n]^T$ 为观测向量; $\mathbf{e}_y = [e_{x_1} \ e_{y_1} \ e_{z_1} \ \dots \ e_{x_n} \ e_{y_n} \ e_{z_n}]^T$ 为观测向量的误差向量; 和 $\boldsymbol{\xi} = [\text{vec}^T(\mathbf{R}^T) \ \mathbf{t}^T]^T$ 为待估参数向量, $\text{vec}(\)$ 为矩阵按行展开向量算子; \mathbf{A} 和 \mathbf{E}_A 为系数矩阵及其误差矩阵,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x'_1 & y'_1 & z'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x'_1 & y'_1 & z'_1 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & \\ x'_n & y'_n & z'_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x'_n & y'_n & z'_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x'_n & y'_n & z'_n & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{E}_A = \begin{bmatrix} e_{x'_1} & e_{y'_1} & e_{z'_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{x'_1} & e_{y'_1} & e_{z'_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{x'_1} & e_{y'_1} & e_{z'_1} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & \\ e_{x'_n} & e_{y'_n} & e_{z'_n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{x'_n} & e_{y'_n} & e_{z'_n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{x'_n} & e_{y'_n} & e_{z'_n} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

旋转矩阵 \mathbf{R} 虽然有 9 个矩阵元素,但它是由 3 个旋转角构成的正交矩阵,故转站模型中待估参数只有 7 个独立量。为了满足该要求,施加约束方程 $\mathbf{c}(\boldsymbol{\xi}) = 0$,根据矩阵 \mathbf{R} 的任意两个行向量的模相等并且互相正交,约束方程表达为^[16]

$$\begin{cases} [\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2 - \xi_5^2 - \xi_6^2 = 0] \\ [\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_7^2 - \xi_8^2 - \xi_9^2 = 0] \\ [\xi_1 \xi_4 + \xi_2 \xi_5 + \xi_3 \xi_6 = 0] \\ [\xi_1 \xi_7 + \xi_2 \xi_8 + \xi_3 \xi_9 = 0] \\ [\xi_4 \xi_7 + \xi_5 \xi_8 + \xi_6 \xi_9 = 0] \end{cases}. \quad (5)$$

进一步分析转站的随机模型,激光跟踪仪的精度可以从生产厂家说明书得到,将距离和角度观测值的

精度记为 σ_d, σ_α 和 σ_β ,其误差的单位分别为微米和角秒。令 ρ 表示弧度与角秒之间的转换,将式(1)进行泰勒展开并保留一阶项,点的坐标协方差矩阵为

$$\mathbf{D} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \sigma_d^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \mathbf{K}^T, \quad (6)$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \rho \sin \beta \cos \alpha & -d \sin \alpha \cos \beta & d \cos \alpha \cos \beta \\ \rho \sin \beta \cos \alpha & d \cos \alpha \sin \beta & d \sin \alpha \cos \beta \\ \rho \cos \beta & 0 & -d \sin \beta \end{bmatrix}. \quad (7)$$

矩阵 \mathbf{D} 是一个非斜对角矩阵,表明其直角坐标各分量具有相关性。观测值的改正数组成向量

$$\mathbf{e} = [e_{x_1} \ e_{y_1} \ e_{z_1} \ e_{x_2} \ \dots \ e_{x'_n} \ e_{y'_n} \ e_{z'_n}]^T. \quad (8)$$

根据式(6)得到所有观测值的随机模型为 $D_e = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1}$, 其中 σ_0^2 为单位权方差, 矩阵 Q 和 P 分别为协因数矩阵和权阵。

3 参数估计

3.1 公式推导

矩阵 E_A 由固定元素和重复出现的误差元素组成, 传统 WTLS 的处理方法是将 E_A 进行向量化, 即 $e_A = \text{vec}(E_A)$, 这样 e_A 中含有许多零元素和相关元素, 随机模型十分复杂。为了在数据处理过程中不改变其中的常数元素, 同时保证相同元素的改正数是一致的, 将式(2)进行变形得到

$$y - A\xi = [E_A \quad e_y] \begin{bmatrix} \xi \\ -1 \end{bmatrix} = Be, \quad (9)$$

式中: 矩阵 B 的作用是提取增广矩阵 $[E_A \quad e_y]$ 中独立的误差元素结构, 其具体表达式为

$$B = [-I_{3n} \quad I_n \otimes R], \quad (10)$$

式中: \otimes 是克罗内克算子; 矩阵 I 为单位矩阵。

约束方程是非线性的, 通过 LS 方法确定参数初值 ξ_0 , 将约束方程在 ξ_0 处线性化:

$$c(\xi) = c(\xi_0) + C(\xi - \xi_0). \quad (11)$$

在 $\min(e^T P e)$ 的准则下建立拉格朗日方程

$$\Phi(e, \xi, \lambda, u) = e^T P e + 2\lambda^T (y - A\xi - Be) + 2u^T [C\xi - C\xi_0 + c(\xi_0)], \quad (12)$$

式中: λ 和 u 为拉格朗日乘子; 函数 Φ 分别对 e, ξ, λ 和 u 求导等于 0, 得到

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial e} \Big|_{e, \xi, \lambda, u} = P\hat{e} - B^T \hat{\lambda} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_{e, \xi, \lambda, u} = (A + \hat{E}_A)^T \hat{\lambda} + C^T u = 0, \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \Big|_{e, \xi, \lambda, u} = y - A\hat{\xi} - B\hat{e} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \Big|_{e, \xi, \lambda, u} = C\hat{\xi} + c(\xi_0) - C\xi_0 = 0. \quad (16)$$

令 $\hat{N} = (A + \hat{E}_A)^T (\hat{B} Q \hat{B}^T)^{-1} (A + \hat{E}_A)^T$, $\hat{n}_1 = (A + \hat{E}_A)^T (\hat{B} Q \hat{B}^T)^{-1} (y + \hat{E}_A \hat{\xi})$ 和 $\hat{n}_2 = C\xi_0 - c(\xi_0)$, 从上述求导中化简得到误差向量 \hat{e} 和法方程:

$$\hat{e} = Q \hat{B}^T (\hat{B} Q \hat{B}^T)^{-1} (y - A\hat{\xi}), \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{N} & \hat{C}^T \\ \hat{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{n}_1 \\ \hat{n}_2 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

化简得到参数 $\hat{\xi}$ 的估计结果

$$\hat{\xi} = \hat{N}^{-1} \hat{n}_1 - \hat{C}^T (\hat{C} \hat{N}^{-1} \hat{C}^T)^{-1} (\hat{C} \hat{N}^{-1} \hat{n}_1 - \hat{n}_2). \quad (19)$$

最后进行精度评估, 单位权误差估计值 $\hat{\sigma}_0$ 、参数的

协因数矩阵 $Q_{\hat{\xi}}$ 和协方差矩阵 $D(\hat{\xi})$ 分别为

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_0 = \sqrt{\hat{e}^T P \hat{e} / (n - 7)} \\ Q_{\hat{\xi}} = \hat{N}^{-1} - \hat{N}^{-1} \hat{C}^T (\hat{C} \hat{N}^{-1} \hat{C}^T)^{-1} \hat{C} \hat{N}^{-1}. \\ D(\hat{\xi}) = \hat{\sigma}_0^2 Q_{\hat{\xi}} \end{cases} \quad (20)$$

3.2 迭代步骤

上述模型是一个非线性模型, 需要进行迭代求解, 具体的步骤如图 2 所示, 其中阈值 δ 为一个极小值, 实验中可以设置为 10^{-10} 。

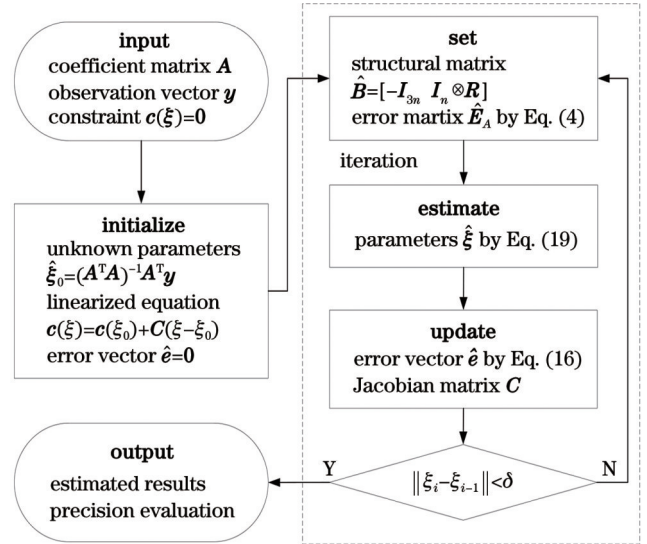


图 2 结构约束总体最小二乘求解流程

Fig. 2 Flow chart of solution to SCTLS

3.3 方法拓展

两台激光跟踪仪因仪器制造的差异, 尺度因子存在细微差异, 所以需要加入比例因子进行相似转换。当使用同一个激光跟踪仪在不同测站进行测量时^[23], 比例因子固定为 1, 对应的模型为刚体坐标转换。矩阵 R 为正交矩阵, 对应 6 个限制方程, 在式(5)的基础上增加约束方程

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 1 = 0, \quad (21)$$

其余步骤不变, 即可求出使用一台跟踪仪进行转站时的转换参数。

3.4 算法对比

表 1 从函数模型、随机模型和待估参数向量等不同方面总结一般的 WTLS 法与 SCTLS 法的区别。对比文献[16]的约束加权混合 TLS 方法和本文的 SCTLS 方法, 前者需要保证系数矩阵的随机模型具有特定的结构, 不能处理通用模型; 虽然能保证常元素的改正数为 0, 但是重复元素的改正数并不一致; 同时求解过程存在近似, 不是得到全局最优解。本文算法完善了上述不足, 提取函数模型中独立元素的结构, 算法更加严密。

表 1 WTLS 和 SCTLS 的对比
Table 1 Comparison between WTLS and SCTLS

Items	WTLS	SCTLS
Functional model	$\mathbf{y} + \mathbf{e}_y = (\mathbf{A} + \mathbf{E}_A)\boldsymbol{\xi}$	Eqs. (2) and (5)
Statistics model	$\text{blkdiag}(\mathbf{Q}_A, \mathbf{Q}_y)$	\mathbf{Q}_{ee}
Dimension of \mathbf{Q}	$13n \times 13n$	$6n \times 6n$
Character of \mathbf{Q}	Off-diagonal	Diagonal
Expression of \mathbf{e}	$\mathbf{e} = [\text{vec}^\top(\mathbf{E}_A) \mathbf{e}_y^\top]^\top$	Eq. (7)
Dimension of \mathbf{e}	$13n \times 1$	$6n \times 1$
Repeated elements	Different	Same
Character of $\hat{\mathbf{R}}_1$	Non-orthogonal	Orthogonal
Number of independent elements of $\boldsymbol{\xi}$	12	7
Precision evaluation	None	Eq. (19)

4 仿真与实验分析

上述内容详细给出 SCTLS 法的推导过程和算法流程。为了证明其有效性,采用仿真和真实测量数据进行分析验证。

4.1 仿真

因为实际测量中测量的真值很难得到,通过仿真添加随机误差模拟得到观测值,计算不同算法得出的参数估计值与真值的绝对偏差,进而衡量不同算法的准确度。

通过 MATLAB 模拟激光跟踪仪的转站测量,在 $10 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ 的空间内生成 6 个定向点和 2 个测站点,如图 3 所示。设置转换参数真值为

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0.905757 & 0.422361 & -0.034899 \\ -0.422022 & 0.906428 & 0.014441 \\ 0.039001 & -0.001107 & 0.999239 \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{t}} = [-3801.548 \quad 2432.402 \quad -775.688]^\top \end{cases} \quad (22)$$

根据激光跟踪仪的仪器精度,在距离和角度真值上添加 $\sigma_d = 0.8 \times 10^{-6} d$ 、 $\sigma_\alpha = 2''$ 和 $\sigma_\beta = 2''$ 的随机误差。

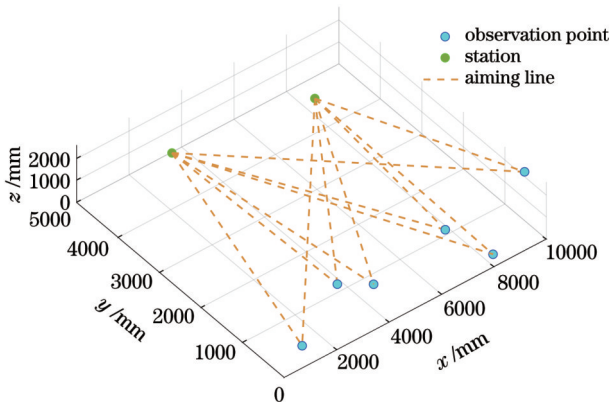


图 3 转站测量示意图

Fig. 3 Schematic diagram of measurement by different stations

差,分别采用以下三种算法求出计算转站参数:1) 本文提出的 SCTLS 法;2) WTLS 法;3) 经典的 LS 估计。重复仿真 100 次,每次结果矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 和平移参数 $\hat{\mathbf{t}}$ 的绝对偏差 $\epsilon(\hat{\mathbf{R}}) = \sum_{i=1}^9 |\hat{r}_i - \tilde{r}_i|$ 和 $\epsilon(\hat{\mathbf{t}}) = \sum_{i=1}^3 |\hat{t}_i - \tilde{t}_i|$ 如图 4 所示。表 2 统计了 100 次绝对偏差的均值。绝对偏差是衡量估计准确度的指标,绝对偏差越小,准确度越高。

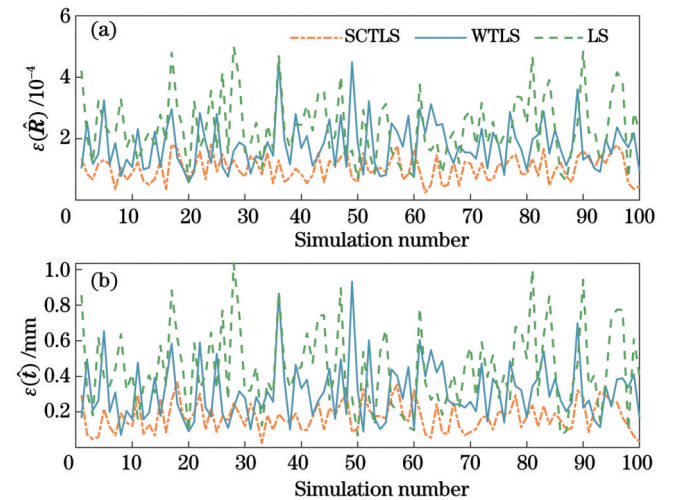


图 4 100 次仿真的绝对偏差。(a) $\epsilon(\hat{\mathbf{R}})$; (b) $\epsilon(\hat{\mathbf{t}})$

Fig. 4 Absolute bias in 100 simulations. (a) $\epsilon(\hat{\mathbf{R}})$; (b) $\epsilon(\hat{\mathbf{t}})$

表 2 绝对偏差的均值统计

Table 2 Average of absolute bias in simulation

Method	$\epsilon(\hat{\mathbf{R}}) / 10^{-4}$	$\epsilon(\hat{\mathbf{t}}) / \text{mm}$
SCTLS	1.144	0.196
WTLS	1.776	0.315
LS	2.698	0.510

从图 4 和表 2 可以看出:1)LS 估计的绝对偏差在三种算法中是最大的,验证了 LS 估计忽略系数矩阵的误差,得到的参数估值是有偏的;2)SCTLS 估计和 WTLS 估计的表现较 LS 估计有所提升,说明顾及两个测站的误差能够提高精度;3)SCTLS 法的两个绝对偏差均值分别为 WTLS 估计的 64.4% 和 62.2%,准确度明显提升,这是因为本文算法能够顾及函数模型中的系数矩阵的结构和待估参数的约束,数据处理方法更加严密。

4.2 测量数据

采用合肥光源升级改造过程中的两个位于储存环中测站的测量数据^[24],如表 3 所示,其中 P2~P4 为一级控制网点,HCG07~HCG11 为二级控制网点。采用了两台 Leica LTD840 激光跟踪仪,测距精度为 0.8 μm/m,测角精度为 ±2",通过式(6)计算得到坐标观测值的随机模型。LS 法因为在仿真中存在明显偏差,所以被排除在外。SCTLS 法和 WTLS 法的计算

结果为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{R}}_{\text{SCTLS}} = \begin{bmatrix} 0.833094 & -0.553133 & 0.000009 \\ 0.553133 & 0.833094 & -0.000083 \\ 0.000039 & 0.000074 & 1.000001 \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{t}}_{\text{SCTLS}} = [2250.421746 \quad 1558.254985 \quad 1619.210379]^T \end{cases}, \quad (23)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{R}}_{\text{WTLS}} = \begin{bmatrix} 0.833092 & 0.553137 & 0.000042 \\ -0.553132 & 0.833093 & 0.000056 \\ 0.000020 & -0.000099 & 1.000001 \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{t}}_{\text{WTLS}} = [2250.416246 \quad 1558.259738 \quad 1619.226406]^T \end{cases}. \quad (24)$$

对于 SCTLS 法, $\hat{\sigma} = 0.789582$, 旋转矩阵参数对应协因数为 $10^{-6} \times \begin{bmatrix} 2.4 & 2.0 & 7.4 \\ 1.9 & 2.4 & 5.6 \\ 5.9 & 7.2 & 1.8 \end{bmatrix}$, 平移参数的协因数为 $[0.011356 \quad 0.008215 \quad 0.014211]^T$; 对于 WTLS 法, $\hat{\sigma} = 0.907428$ 。

表 3 合肥光源中激光跟踪仪观测值
Table 3 Observations from laser tracker in Hefei Light Source

Number	Name	Laser tracker A observation			Laser tracker B observation		
		<i>d</i> /mm	α /($^\circ$)	β /($^\circ$)	<i>d</i> /mm	α /($^\circ$)	β /($^\circ$)
1	P2	5130.34	-149.7184	84.7385	3679.01	-89.9996	55.3951
2	P3	1804.06	-97.0605	74.8887	3679.01	-0.0035	55.3948
3	P4	2728.38	113.2676	80.0798	3678.79	89.9947	55.3928
4	HCG07	1410.30	121.7104	174.2693	2677.13	37.3065	85.3736
5	HCG08	4836.53	173.0513	106.8160	1969.89	-164.6853	83.5931
6	HCG09	4286.10	-171.1741	109.0869	1404.26	-122.2511	81.0910
7	HCG10	1819.21	123.8746	140.3887	2334.53	59.5167	84.6475
8	HCG11	3126.54	176.5045	116.5998	317.92	137.0496	46.4115

两种方法计算 P2 的误差矩阵分别为

$$\mathbf{E}_A^{\text{SCTLS}} = 10^{-2} \times \begin{bmatrix} 0.9 & -1.4 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & -1.4 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & -1.4 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & -1.4 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathbf{E}_A^{\text{WTLS}} = 10^{-2} \times \begin{bmatrix} 0.6 & -4.1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3 & 2.4 & 3.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & -0.1 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

其他点的误差矩阵形式和 P2 一致,因此仅列出该点的误差矩阵。图 5 给出两种方法的转站误差,即跟踪仪 A 测量的定向点经过转站后坐标和跟踪仪 B 定向点坐标的距离。

从上述结果中可以看出:1)本文算法通过限制条件,估计的旋转矩阵为正交矩阵,反算比例因子为 $s = 1.000001075$,绕 *z* 轴、*y* 轴和 *x* 轴的三个旋转角分别为 33.5822°、-0.0022° 和 0.0043°,其中绕 *y* 轴和 *x* 轴的旋转角接近于 0,说明两台激光跟踪仪基本处于整平状

态,*s* 接近 1 表明跟踪仪的尺度差异很小,而 WTLS 法没有考虑参数之间的函数关系,对应的 $\hat{\mathbf{R}}$ 的行向量之间不具有正交性,无法计算出比例参数和旋转参数。由此可见添加约束方程的合理性。2)本文算法的单位权中误差为 0.789582,小于 WTLS 法的 0.907428,同时 SCTLS 方法弥补了 WTLS 缺少精度评定的不足,从 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{R}}}$ 的量级(旋转矩阵和平移参数的协因数量级分别为 10^{-6} 和 0.01)看出本文算法参数内符合精度高。3)对比误差矩阵 $\hat{\mathbf{E}}_A$,本文算法的误差矩阵中每一行的

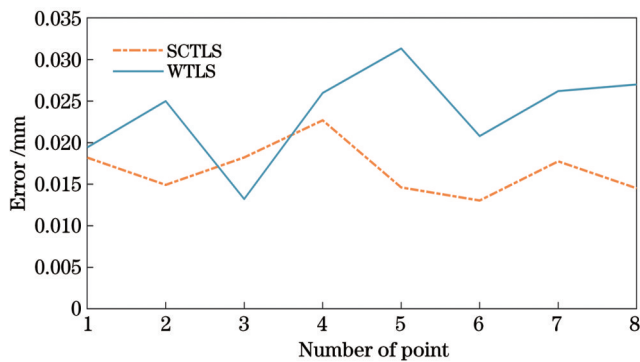


图 5 转站后的点位误差

Fig. 5 Errors of points after transformation

非零元素是相同的,和函数模型中的误差矩阵结构一致,而 WTLS 方法得到的误差矩阵中重复元素并没有规律,从而验证了本文结构矩阵的有效性。4)从图 5 可知,本文算法得到的绝大部分点转站误差小于 WTLS 算法结果,计算 SCTLS 和 WTLS 的转站平均点位误差分别为 0.016 mm 和 0.024 mm,进一步证明了本文算法在精度上有所改进。

5 结 论

在精密测量数据处理过程中,需要针对求解的模型特点设计对应的算法。本文针对转站模型的特点,采用结构约束总体最小二乘方法求解转换参数,通过引入结构矩阵和限制方程,确保误差矩阵中相同元素具有相同改正数、旋转矩阵具有正交性,完善了现有的 WTLS 算法,理论更加严密。实验结果显示:本文算法旋转矩阵和误差矩阵更加符合实际,旋转矩阵和平移向量的估计量精度和准确度更高,能够减小跟踪仪转站时的误差积累,具有一定的工程意义。本文的精度评定公式可以进一步指导减小转站误差,比如通过提高仪器测量精度来减小点位方差,以及研究更好的点位分布进而改善系数矩阵的结构,都能够进一步提高转站精度。目前研究还局限于两个测站之间的数据进行转换,实际过程中需要架设多个测站进行测量。下一步将拓展本文算法至多站激光跟踪仪数据转站融合,使其在粒子加速器准直二级控制网的数据处理等实际问题中具有应用价值。

参 考 文 献

- 王巍,李笑,罗涛,等.红外自由电子激光谐振腔的准直安装[J].中国激光,2022,49(23):2304003.
Wang W, Li X, Luo T, et al. Collimating installation of infrared free electron laser resonator[J]. Chinese Journal of Lasers, 2022, 49(23): 2304003.
- 王铜,董岚,梁静,等.中国散裂中子源准直控制网数据处理方法[J].强激光与粒子束,2021,33(10):104002.
Wang T, Dong L, Liang J, et al. Adjustment method of control network for alignment in CSNS[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2021, 33(10): 104002.
- 熊涛,李泷泉,李琦,等.基于组合测量的激光跟踪仪站位规划[J].激光与光电子学进展,2021,58(17):1712001.

- Xiong T, Li S G, Li Q, et al. Station planning of laser tracker based on combination measurement[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2021, 58(17): 1712001.
- 刘长春,曹庭分,叶海仙,等.大型精密光学系统准直误差分析方法及其应用[J].光学学报,2015,35(9):0922001.
Liu C C, Cao T F, Ye H X, et al. Precise collimation technology and assembling optical modules in high power laser facility[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(9): 0922001.
- 殷建,李明.基于激光跟踪仪的五轴机床旋转轴误差测量[J].中国激光,2015,42(4):0408005.
Yin J, Li M. Errors measurement for rotation axis of five-axis machine tool based on laser tracker[J]. Chinese Journal of Lasers, 2015, 42(4): 0408005.
- 陈洪芳,郑博文,石照耀,等.基于激光追踪仪多站位测量的 CMM 空域坐标修正方法[J].中国激光,2017,44(3):0304003.
Chen H F, Zheng B W, Shi Z Y, et al. CMM spatial coordinate correction method based on laser tracer multistation measurement [J]. Chinese Journal of Lasers, 2017, 44(3): 0304003.
- 王巍.合肥光源升级改造测量准直及测量精度的研究[D].合肥:中国科学技术大学,2016.
Wang W. Study on measurement collimation and measurement accuracy of Hefei Light Source upgrading and transformation[D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2016.
- 苗学策,丁克良,罗涛,等.激光跟踪仪自适应加权秩亏三维光束法平差[J].中国激光,2023,50(6):0604004.
Miao X C, Ding K L, Luo T, et al. Self-adaptive weighted rank-defect 3D bundle adjustment of laser tracker[J]. Chinese Journal of Lasers, 2023, 50(6): 0604004.
- Sahu R K. A review on application of laser tracker in precision positioning metrology of particle accelerators[J]. Precision Engineering, 2021, 71: 232-249.
- 姚吉利,韩保民,杨元喜.罗德里格矩阵在三维坐标转换严密解算中的应用[J].武汉大学学报(信息科学版),2006,31(12):1094-1096,1119.
Yao J L, Han B M, Yang Y X. Applications of Lodrigues matrix in 3D coordinate transformation[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2006, 31(12): 1094-1096, 1119.
- Shen Y Z, Chen Y, Zheng D H. A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm[J]. Journal of Geodesy, 2006, 80 (5): 233-239.
- Yang Y. Robust estimation of geodetic datum transformation[J]. Journal of Geodesy, 1999, 73(5): 268-274.
- 王德元,张晓琳,马强,等.多站大尺寸测量仪坐标系转换的 Procrustes 方法[J].光学精密工程,2014,22(4):949-955.
Wang D Y, Zhang X L, Ma Q, et al. Procrustes method in coordinate transformation on multi-station of large scale measurement[J]. Optics and Precision Engineering, 2014, 22(4): 949-955.
- 张贤达.矩阵分析与应用[M].北京:清华大学出版社,2004.
Zhang X D. Matrix analysis and applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.
- Zhou Y, Fang X. A mixed weighted least squares and weighted total least squares adjustment method and its geodetic applications [J]. Survey Review, 2016, 48(351): 421-429.
- 葛旭明,伍吉仓.三维基准转换的约束加权混合整体最小二乘的迭代解法[J].武汉大学学报(信息科学版),2012,37(2):178-182.
Ge X M, Wu J C. Iterative method of weight constraint total least-squares for three-dimensional datum transformation[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2012, 37(2): 178-182.
- 吕志鹏,隋立芬.基于变量投影的结构总体最小二乘算法[J].武汉大学学报(信息科学版),2021,46(3):388-394.
Lü Z P, Sui L F. Structured total least squares method based on variable projection[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2021, 46(3): 388-394.
- Ma Y Q, Liu S C, Li Q Z. An advanced multiple outlier detection algorithm for 3D similarity datum transformation[J]. Measurement,

- 2020, 163: 107945.
- [19] 李丽娟, 赵延辉, 林雪竹. 加权整体最小二乘在激光跟踪仪转站中的应用[J]. 光学精密工程, 2015, 23(9): 2570-2577.
Li L J, Zhao Y H, Lin X Z. Application of WTLS in coordinate transformation of laser tracker[J]. Optics and Precision Engineering, 2015, 23(9): 2570-2577.
- [20] 王金栋, 孙荣康, 曾晓涛, 等. 激光跟踪多站分时测量基站布局研究[J]. 中国激光, 2018, 45(4): 0404005.
Wang J D, Sun R K, Zeng X T, et al. Research on base station layout of multi-station and time-sharing measurement by laser tracker[J]. Chinese Journal of Lasers, 2018, 45(4): 0404005.
- [21] 周腾飞, 程效军, 黄凯, 等. 顾及随机误差的地面三维激光扫描仪自检校模型及其抗差解法[J]. 中国激光, 2021, 48(13): 1304002.
Zhou T F, Cheng X J, Huang K, et al. Self-calibration model of terrestrial three-dimensional laser scanners considering random errors and robust estimation solution[J]. Chinese Journal of Lasers, 2021, 48(13): 1304002.
- [22] 谭舸, 花向红, 陶武勇, 等. 基于激光跟踪仪的多测站地面激光扫描点云配准方法[J]. 中国激光, 2021, 48(17): 1710002.
Tan G, Hua X H, Tao W Y, et al. Multiview terrestrial laser scanning point cloud registration method based on laser tracker[J]. Chinese Journal of Lasers, 2021, 48(17): 1710002.
- [23] 李杰, 伍凡, 吴时彬, 等. 使用激光跟踪仪测量研磨阶段离轴非球面形[J]. 光学学报, 2012, 32(1): 0112002.
Li J, Wu F, Wu S B, et al. Using a laser tracker to measure the surface of off-axis aspheric mirror during grinding[J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(1): 0112002.
- [24] 何晓业, 王巍, 汪鹏, 等. 合肥光源升级改造准直控制网方案设计 & 实施[J]. 核技术, 2013, 36(10): 11-15.
He X Y, Wang W, Wang P, et al. Alignment control network scheme design and measurement of HLS upgrade[J]. Nuclear Techniques, 2013, 36(10): 11-15.

Improved Adjustment Method Applied in Transformation of Laser Tracker

Luo Tao^{1,3}, Qi Zhijun², Wang Wei¹, He Xiaoye^{1*}

¹National Synchrotron Radiation Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei 230029, Anhui, China;

²School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, Hubei, China;

³Institute of Advanced Science Facilities, Shenzhen (IASF), Shenzhen 518107, Guangdong, China

Abstract

Objective Due to the influence of object size and measurement environment, we usually use the laser tracker to measure at different positions and then fuse the observation data of different stations into the same coordinate system. The transformation error of the laser tracker directly affects the quality of the observation results, so it is significant to study the high-precision transformation adjustment method for the laser tracker. The traditional least squares (LS) method, as a widely used method, can only consider the error in the observation vector. This assumption does not satisfy the actual situation and the estimated parameters by LS are biased statistically. The existing weighted total least squares (WTLS) method can consider the random error in the coefficient matrix and observation vector at the same time. Although WTLS overcomes the shortcomings of the LS method, this method still has some problems. For example, the rotation matrix obtained by WTLS is not orthogonal and the error matrix by WTLS does not meet the structural characteristics.

Methods To overcome the shortcomings of the existing methods, we propose a new improved adjustment method suitable for the transformation of laser tracker, which is called the structured constrained total least squares (SCTLS) method. This new method does not require any limitations for the statistical model and can take into account the correlation of coordinate observations. SCTLS uses a new structure matrix to describe the special structure corresponding to the error matrix so that the corrections of the same elements are consistent. At the same time, this method imposes restrictions on the parameters to be estimated to ensure the orthogonality of the rotation matrix. Because the transformation model is nonlinear, we use the Lagrange multiplier method to rigorously derive and give the iterative solutions of the algorithm in detail. Finally, the first-order accuracy of the parameters is evaluated. The proposed method is able to handle both similar and rigid coordinate transformations by controlling the number of constraints. We compare the differences between the proposed algorithm and the WTLS method to show that the SCTLS algorithm is more rigorous.

Results and Discussions The simulations and measured experiments are designed to compare our algorithm with the LS method and WTLS method. In the simulations, we measure six observation points in two laser trackers stations. After adding random errors, the absolute biases corresponding to rotation and translation parameters for different methods are compared. The performance of the LS method is the worst, and the two absolute bias indicators of SCTLS are 64.4% and 62.2% of those of WTLS, respectively (Table 2), which means that the precision of our method has been significantly improved. The data from two stations in the storage ring of Hefei Light Source are selected to verify the effectiveness of our algorithm. The error of unit weight for SCTLS is 0.789582, which is smaller than that of the WTLS method. At the same time, it has been verified that the rotation matrix obtained by SCTLS is orthogonal and the corrections of repeated elements in the error matrix are consistent. However, the WTLS method does not obtain an orthogonal rotation matrix, which makes it difficult to calculate the rotation angle from the rotation matrix. At the same time, the

error matrix of WTLS is not structured. The average point errors after the transformation of SCTLS and WTLS are 0.016 mm and 0.024 mm, respectively (Fig. 5). The above results in the simulations and measured experiments prove the effectiveness of our algorithm, which can improve the adjustment accuracy of the transformation parameters.

Conclusions The proposed algorithm is more rigorous and makes some improvements based on the existing WTLS algorithm. By introducing constraint conditions and the structure matrix, the error accumulation in the transformation of the laser tracker can be effectively reduced. It should be noted that the proposed method is limited to the conversion of data between two measuring stations. In the actual process, multiple measuring stations need to be set up for measurement. In the next step, the proposed method will be extended to multi-station laser tracker data fusion, so that it will have higher application value in practical engineering problems.

Key words measurement; laser tracker; structured constrained total least squares; iterative algorithm; transformation accuracy