

# 基于 Levenberg-Marquardt 算法的旋转双棱镜指向偏差修正

姜玉鑫<sup>1,2</sup>, 孙建锋<sup>3\*</sup>, 侯培培<sup>1</sup>, 韩荣磊<sup>1,2</sup>, 任伟杰<sup>1,2</sup>, 从海胜<sup>1,2</sup>, 张龙坤<sup>1</sup>, 李超洋<sup>1</sup>, 许玲玲<sup>1,2</sup>, 张正伟<sup>1</sup>

<sup>1</sup>中国科学院上海光学精密机械研究所空间激光传输与探测技术重点实验室, 上海 201800;

<sup>2</sup>中国科学院大学, 北京 100049;

<sup>3</sup>中国科学院上海光学精密机械研究所航天激光工程部, 上海 201800

**摘要** 针对旋转双棱镜系统指向误差较大、误差源较多等指向精度较差的问题,提出了一种新的旋转双棱镜指向偏差修正方案。采用非近轴光线追迹方法建立旋转双棱镜指向模型和二维转台指向模型,在全视场区域内均匀选取若干点,比较旋转双棱镜理论出射光束与实际出射光束的偏差,通过 Levenberg-Marquardt 迭代算法对旋转双棱镜前镜和后镜的转角误差、楔角和折射率进行修正。在整个视场区域内修正后,指向最大偏差由 8.37 mrad 变为 3.75 mrad,平均指向偏差由 4.00 mrad 变为 1.38 mrad,并且当俯仰角较小时,修正效果较好;在俯仰角小于 15° 的视场区域进行单独修正后,最大指向偏差变为 1.51 mrad,平均偏差变为 0.84 mrad。所提修正方法提高了旋转双棱镜的指向精度,对旋转双棱镜指向偏差的补偿修正具有一定的参考价值。

**关键词** 光通信; 自由空间激光通信; 旋转双棱镜; Levenberg-Marquardt 算法; 最小二乘法; 误差校正

中图分类号 O435

文献标志码 A

DOI: 10.3788/CJL220634

## 1 引言

一个空间激光通信终端通常由两大基本系统组成,即激光通信系统和光学跟瞄系统,前者用于两颗卫星之间的信息传输,后者用于它们之间的瞄准、捕获和跟踪(PAT)<sup>[1-5]</sup>。传统的光学跟瞄系统一般采用万向转架和万向转镜实现光束大角度偏转<sup>[6]</sup>,但此类结构的体积和惯量大,动态性能差,反应时间慢且对振动敏感,不利于载体平台的安装及载体姿态平衡。与传统的结构相比,旋转双棱镜体积小,具有优异的视轴调整功能<sup>[7]</sup>,能够使光束实现大角度偏转,更适用于空间激光通信。然而,旋转双棱镜由两个共轴的楔形棱镜组成<sup>[8-9]</sup>,出射光线与楔形棱镜的旋转角度之间并非线性关系,这就造成了旋转双棱镜出射光束的解算比较困难,而且旋转双棱镜误差来源很多,必须经过修正才能得到较为准确的指向。

对于旋转双棱镜小角度指向的正向解算,可以采用一级近似或者三级近似<sup>[10]</sup>;对于大角度指向的正向解算,可以采用非近轴矢量光线追迹方法<sup>[11]</sup>。文献[12]对旋转双棱镜正向解算的一级近轴近似方法和非近轴光线追迹方法进行了比较,结果表明,非近轴光线追迹方法更能准确描述光束的指向;但该文并

没有考虑旋转双棱镜的系统误差对光束指向的影响。文献[13]只研究了旋转双棱镜的系统误差对光束指向的影响,并没有对误差进行修正。文献[14]采用数学补偿法通过指向误差和转角误差的关系构建补偿方程,过程比较复杂,而且只对旋转双棱镜的转角误差进行了修正。本团队采用非近轴光线追迹方法建立了旋转双棱镜指向模型和二维转台指向模型,并采用一种新方法对旋转双棱镜前镜和后镜的转角误差、楔角和折射率进行了修正。

## 2 基本原理

### 2.1 Levenberg-Marquardt 算法

Levenberg-Marquardt(LM)算法的关键是在待估算参量领域内用模型函数 $l$ 对误差函数 $f$ 作线性近似,忽略二阶以上的导数,将非线性优化问题转化成线性优化问题,并利用线性最小二乘法求解<sup>[15-19]</sup>。在当前点距离最优点较远时,LM法相当于最速下降法,沿着梯度的负方向迭代,寻找最优点;在当前点距离最优点较近时,LM法相当于 Gauss-Newton 法,在信赖域内迭代,寻找最优点,既保证了收敛方向又保证了收敛速度<sup>[15]</sup>。

在无约束最优化问题中,目标函数通常由若干个函数的平方和构成,这类函数一般可以写成

收稿日期: 2022-03-04; 修回日期: 2022-05-05; 录用日期: 2022-05-25; 网络首发日期: 2022-06-06

基金项目: 国家自然科学基金(91938302)、中国科学院战略性先导科技专项(XDB43030400)

通信作者: \*sunjianfengs@163.com

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m [f_i(x)]^2, x \in \mathbf{R}^n, \quad (1)$$

式中:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。一般要求  $m \geq n$ , 把极小化这类函数的问题

$$\exists x^* \in \mathbf{R}^n, \text{st. } \min F(x) = F(x^*) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m [f_i(x^*)]^2 \quad (2)$$

称为最小二乘优化问题。

如果  $f$  有连续的二维偏导数, 则可将  $f$  泰勒展开成

$$f(x+h) = f(x) + J(x)h + O(\|h\|^2) \simeq l(h) \equiv f(x) + J(x)h, \quad (3)$$

式中:  $J$  为雅可比矩阵,  $J \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 。该矩阵中第  $i$  行第  $j$  列的元素为

$$[J(x)]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x). \quad (4)$$

将式(3)代入式(1), 得

$$F(x+h) \simeq L(h) \equiv \frac{1}{2} l(h)^T l(h) = \frac{1}{2} f^T f + h^T J^T f + \frac{1}{2} h^T J^T J h = F(x) + h^T J^T f + \frac{1}{2} h^T J^T J h. \quad (5)$$

LM法是在 Gauss-Newton法的基础上加了一个阻尼项  $\mu I$ , 避免了  $J^T J$  不是正定矩阵的情况。 $h_{lm}$  是  $F$  的一个下降方向,

$$J^T f + (J^T J + \mu I) h_{lm} = 0, \mu > 0. \quad (6)$$

阻尼系数  $\mu$  既影响步长的方向, 也影响步长的大小。 $\mu$  的初始值与矩阵  $A_0 = J^T(x_0)J(x_0)$  中元素的大小有关, 即

$$\mu_0 = \max(a_{ii}^{(0)}). \quad (7)$$

$\mu$  的更新由增益比  $\rho$  决定,

$$\rho = \frac{F(x) - F(x + h_{lm})}{L(0) - L(h_{lm})}. \quad (8)$$

依据文献[15], 当  $\mu$  按照下述规则进行替换时, 能够达到更好的迭代效果, 即:

$$\begin{cases} \text{if } \rho > 0, \mu = \mu \cdot \max\left\{\frac{1}{3}, 1 - (2\rho - 1)^3\right\}, \nu = 2, \\ \text{if } \rho \leq 0, \mu = \mu \cdot \nu, \nu = 2\nu \end{cases} \quad (9)$$

当  $\rho > 0$  时,  $h_{lm}$  为  $F$  的下降方向,  $x$  更新为  $x + h_{lm}$ ; 当  $\rho \leq 0$  时, 不更新。即

$$\begin{cases} \text{if } \rho > 0, x = x + h_{lm} \\ \text{if } \rho \leq 0, x = x \end{cases}. \quad (10)$$

进行下一次迭代, 直到达到指定迭代次数或者  $|F(x) - F(x + h_{lm})|$  满足要求。

## 2.2 旋转双棱镜模型

旋转双棱镜指向模型如图1所示。首先建立坐标系,  $z$  轴与光轴方向重合, 入射光束沿着  $z$  轴;  $x$  轴垂直于水平面, 竖直向上为正方向; 依据右手定则确定  $y$  轴方向。入射光束用  $A_1$  表示, 棱镜  $\Pi_1$  内传播的光束用  $A_2$  表示。因为棱镜  $\Pi_1$  的右侧界面与棱镜  $\Pi_2$  的左侧界面

平行, 不会改变光束的传播方向, 所以棱镜  $\Pi_2$  内传播的光束与  $A_2$  保持一致, 出射光束用  $A_3$  表示。棱镜  $\Pi_1$  的左侧界面法线用  $N_1$  表示, 棱镜  $\Pi_2$  的右侧界面法线用  $N_2$  表示, 棱镜  $\Pi_1$  的楔角为  $\alpha_1$ , 棱镜  $\Pi_2$  的楔角为  $\alpha_2$ , 棱镜  $\Pi_1$  和棱镜  $\Pi_2$  采用同一种材料制成, 折射率为  $n$ 。 $\theta_1$  和  $\theta_2$  为棱镜  $\Pi_1$  和棱镜  $\Pi_2$  绕  $z$  轴旋转的角度, 逆时针旋转为正, 顺时针旋转为负。

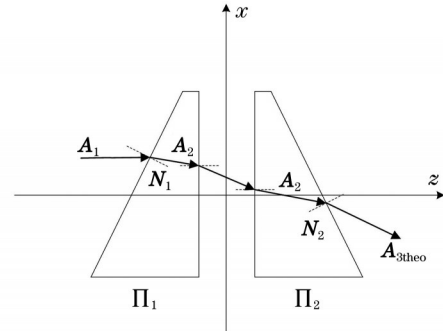


图1 光线在旋转双棱镜系统中的传播过程

Fig.1 Propagation process of light in rotating double prism system

入射光束沿着  $z$  轴, 入射光束的单位矢量为

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

棱镜  $\Pi_1$  左侧法线的单位矢量可以表示为

$$N_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(\alpha_1) \\ 0 \\ \cos(\alpha_1) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

由矢量折射定律可以得到棱镜  $\Pi_1$  内传播的光束  $A_2$  为

$$A_2 = \frac{1}{n} A_1 + \left\{ \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2 [1 - (A_1 \cdot N_1)^2]} - \frac{1}{n} (A_1 \cdot N_1) \right\} N_1. \quad (13)$$

棱镜  $\Pi_1$  右侧法线的单位矢量可以表示为

$$N_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(\alpha_2) \\ 0 \\ \cos(\alpha_2) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

再次根据矢量折射定律可以得到理论出射光束  $A_{3\text{theo}}$  为

$$A_{3\text{theo}} = nA_2 + \left\{ \sqrt{1 - n^2 [1 - (A_2 \cdot N_2)^2]} - n(A_2 \cdot N_2) \right\} N_2. \quad (15)$$

### 2.3 二维转台模型

二维转台通过力矩电机实现方位、俯仰方向的转动,精度较高。简单起见,建立的二维转台指向模型坐标系与旋转双棱镜指向模型初始坐标系一致。将旋转双棱镜放置在二维转台上,通过调节二维转台的方位角和俯仰角,使最终从旋转双棱镜出射的光束平行于光轴出射。旋转双棱镜的实际出射光束  $A_{3\text{real}}$  经过转动二维转台后沿着  $z$  轴出射,记为  $A_4$ 。  $C_1$  和  $C_2$  分别为二维转台的俯仰角转动矩阵以及方位角转动矩阵。  $\theta_y$  和  $\theta_x$  分别为二维转台转动俯仰角和方位角,顺时针转动为正,逆时针转动为负。

二维转台俯仰旋转  $\theta_y$ ,即绕  $y$  轴旋转,转动矩阵为

$$C_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) \end{bmatrix}; \quad (16)$$

二维转台方位旋转  $\theta_x$ ,即绕  $x$  轴旋转,转动矩阵为

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\sin(\theta_x) \\ 0 & \sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

旋转双棱镜的实际出射光束  $A_{3\text{real}}$  经二维转台俯仰和方位转动后,出射光束为

$$A_4 = C_2 C_1 A_{3\text{real}}, \quad (18)$$

即

$$A_{3\text{real}} = C_1^{-1} C_2^{-1} A_4. \quad (19)$$

经二维转台转动后,最终的出射光束沿着  $z$  轴,即

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

### 2.4 误差修正原理

将棱镜  $\Pi_1$  的旋转角度  $\theta_1$ 、楔角  $\alpha_1$ ,棱镜  $\Pi_2$  的旋转角度  $\theta_2$ 、楔角  $\alpha_2$ ,以及两个棱镜的折射率  $n$  代入旋转双棱镜公式——式(15),可以直接推导出理论出射光束  $A_{3\text{theo}}$ ;实际出射光束  $A_{3\text{real}}$  可以通过实际测量得到的二维转台的方位角  $\theta_x$  和俯仰角  $\theta_y$  求解出。

$\phi_1$ 、 $\varphi_1$  和  $\phi_2$ 、 $\varphi_2$  分别为  $A_{3\text{theo}}$  和  $A_{3\text{real}}$  的方位角和俯仰角。  $x_1$ 、 $y_1$  和  $x_2$ 、 $y_2$  分别为光束  $A_{3\text{theo}}$  和  $A_{3\text{real}}$  打在距离旋转双棱镜  $L$  处光屏上光斑的横坐标和纵坐标,它们的表达式分别为

$$x_1 = L \cdot \tan(\phi_1) \cdot \cos(\varphi_1), \quad (21)$$

$$y_1 = L \cdot \tan(\phi_1) \cdot \sin(\varphi_1), \quad (22)$$

$$x_2 = L \cdot \tan(\phi_2) \cdot \cos(\varphi_2), \quad (23)$$

$$y_2 = L \cdot \tan(\phi_2) \cdot \sin(\varphi_2). \quad (24)$$

理论光束与实际光束之间的偏差用  $f_i$  表示,

$$f_i = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{L}, \quad (25)$$

式中:  $f_i$  为误差函数;  $x_1$  和  $y_1$  为理论值;  $x_2$  和  $y_2$  为实际值。

旋转双棱镜的误差主要包括棱镜  $\Pi_1$  的转角误差  $\Delta\theta_1$ 、棱镜  $\Pi_2$  的转角误差  $\Delta\theta_2$ 、棱镜  $\Pi_1$  的楔角误差  $\Delta\alpha_1$ 、棱镜  $\Pi_2$  的楔角误差  $\Delta\alpha_2$ ,以及棱镜  $\Pi_1$  和棱镜  $\Pi_2$  的折射率误差  $\Delta n$ 。根据式(15),改变旋转双棱镜的参数  $\Delta\theta_1$ 、 $\Delta\theta_2$ 、 $\Delta\alpha_1$ 、 $\Delta\alpha_2$  以及  $\Delta n$ ,就会改变出射光束的理论值  $A_{3\text{theo}}$ 。  $f_i$  是关于  $x$  的函数,

$$x = [\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta n]^T, \quad (26)$$

$x$  的初始值为理想情况,即各误差全为零,即  $x = [0, 0, 0, 0, 0]^T$

假设实验有  $m$  组数据,

$$f = [f_1, f_2, \dots, f_m]^T, \quad (27)$$

目标是找出合适的  $x$  值,使  $F(x)$  最小,  $F(x)$  为误差评价函数,

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (f_i)^2. \quad (28)$$

$f$  的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\theta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\alpha_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\alpha_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \Delta n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \Delta\theta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \Delta\theta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \Delta\alpha_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \Delta\alpha_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \Delta n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \Delta\theta_1} & \frac{\partial f_m}{\partial \Delta\theta_2} & \frac{\partial f_m}{\partial \Delta\alpha_1} & \frac{\partial f_m}{\partial \Delta\alpha_2} & \frac{\partial f_m}{\partial \Delta n} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

$h_{lm}$  可由下式求得

$$J^T f + (J^T J + \mu I) h_{lm} = 0, \mu > 0. \quad (30)$$

$\mu$  的初始值与矩阵  $A_0 = J(x_0)^T J(x_0)$  中元素的大小有关,

$$\mu_0 = \max(a_{ii}^{(0)}). \quad (31)$$

把求得的  $h_{lm}$  代入

$$\rho = \frac{F(x) - F(x + h_{lm})}{L(0) - L(h_{lm})}, \quad (32)$$

可以求得  $\rho$ 。把求得的  $\rho$  代入

$$\begin{cases} \mu = \mu \cdot \max\left\{\frac{1}{3}, 1 - (2\rho - 1)^3\right\}, \nu = 2, \text{ when } \rho > 0 \\ \mu = \mu\nu, \nu = 2\nu, \text{ when } \rho \leq 0 \end{cases}, \quad (33)$$

可以求得  $\mu_0$ 。

当  $\rho > 0$  时,  $h_{lm}$  为  $F$  的下降方向,  $x$  更新为  $x + h_{lm}$ ; 当  $\rho \leq 0$  时,  $x$  不更新。即

$$\begin{cases} \text{when } \rho > 0, x = x + h_{lm} \\ \text{when } \rho \leq 0, x = x \end{cases} \quad (34)$$

进行下次迭代,直到达到指定迭代次数或者  $|F(x) - F(x + h_{lm})|$  满足要求。

### 2.5 LM 法初始值分析

本文对旋转双棱镜  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  的转角误差、楔角误差和折射率误差进行修正,误差评价函数选用五元函数。5 个维度上的偏导数比较难同时为零,即比较难陷入局部极值,但也不能避免陷入局部极值的情况。

图 2 是选取 3125 个不同初始值得到的优化后的最小误差

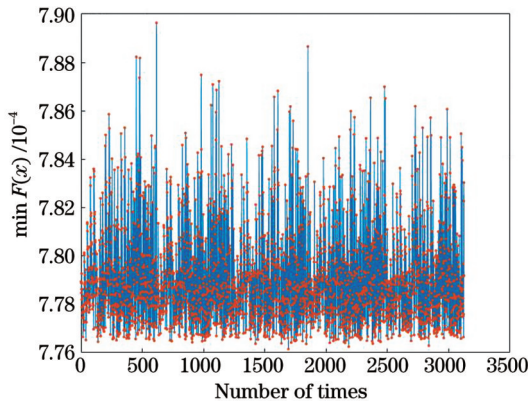
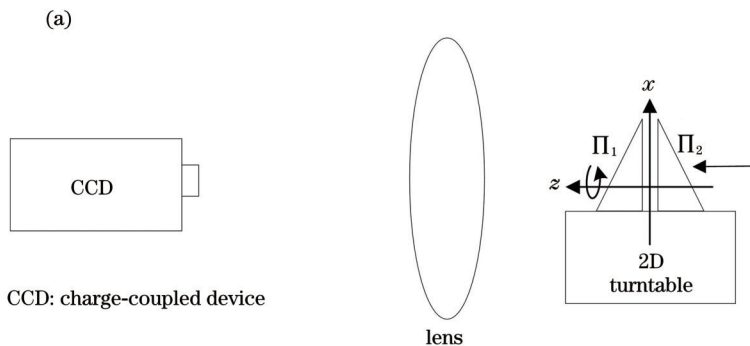


图 2 不同初始值情况下,优化后的最小误差评价函数值

Fig. 2 Optimized minimum error evaluation function value in the case of different initial values



CCD: charge-coupled device

lens

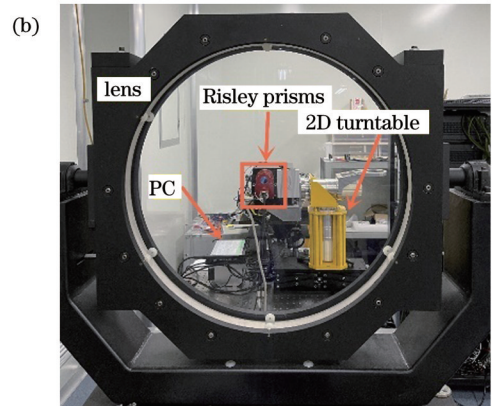


图 3 旋转双棱镜误差修正实验平台。(a)原理图;(b)实物图

Fig. 3 Error correction experiment platform of Risley prisms. (a) Schematic; (b) physical map

### 3.1 选点

本文对棱镜转角误差、棱镜楔角误差以及棱镜折射率误差进行修正时并没有考虑入射角误差以及棱镜倾斜角误差<sup>[20-21]</sup>。为了使修正结果更加有效,在旋转双棱镜指向范围内均匀选点。根据旋转双棱镜的理论参数——棱镜  $\Pi_1$  的楔角  $5.5^\circ$ 、棱镜  $\Pi_2$  的楔角  $5.5^\circ$ 、棱镜材料硅在  $1550 \text{ nm}$  波长处的折射率  $3.4795$ 、旋转双棱镜中两棱镜的间距  $0.587 \text{ mm}$ ,计算得到了旋转双棱镜的理论俯仰角为  $0^\circ \sim 29.22^\circ$ ,理论方位角为  $0^\circ \sim 360^\circ$ 。本文采用非线性最小二乘法修正旋转双棱镜的指向误差。为使修正结果比较准确,需

差评价函数值。从仿真结果来看,优化后误差评价函数中的最大值和最小值之差占优化后误差评价函数中最大值的比例为  $1.71\%$ 。可见,不同的初始值对本实验的最终优化结果影响不大。只要最终误差评价函数收敛到比较小的位置(不必是最优位置),能满足使用要求就可以。

### 3 实验验证

为了验证旋转双棱镜指向偏差修正理论,建立了如图 3 所示的实验平台。本实验采用的是 Xenics 公司的 XEVA-1614 型 CCD 相机,该相机的响应波段为  $0.9 \sim 1.7 \mu\text{m}$ ,分辨率为  $320 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$ ,像元尺寸为  $30 \mu\text{m} \times 30 \mu\text{m}$ ,精度为  $2 \mu\text{rad}$ (按照  $15 \text{ m}$  焦距计算)。本实验采用的二维转台由工心(上海)科技有限公司生产,码盘静态分辨率约为  $20 \mu\text{rad}$ ,静态指向精度约为  $55 \mu\text{rad}$ 。旋转双棱镜放置在二维转台上,改变旋转双棱镜的棱镜  $\Pi_1$  和棱镜  $\Pi_2$  的旋转角度(旋转角度方向遵从右手螺旋定则),调节二维转台的方位角和俯仰角,使旋转双棱镜出射的光斑在  $15 \text{ m}$  外相机视场中央(透镜焦距为  $15 \text{ m}$ ,相机在透镜的焦点上),此时整个系统的出射光束沿着  $z$  轴,

$$\text{即 } A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

要尽可能多的点,但是每一个点都需要调节二维转台使实际出射光束进入 CCD 相机的视场中央,实验操作较为麻烦。经过权衡,选择了 69 个点。在光屏上均匀选取 69 个点,所选点在光屏上的位置如图 4 所示。

### 3.2 全部指向范围内整体修正

旋转双棱镜的整个视场区域为俯仰角  $0^\circ \sim 29.22^\circ$ ,方位角  $0^\circ \sim 360^\circ$ 。未修正时,棱镜  $\Pi_1$  的转角误差  $\Delta\theta_1=0$ ,棱镜  $\Pi_2$  的转角误差  $\Delta\theta_2=0$ ,棱镜  $\Pi_1$  的楔角误差  $\Delta n_1=0$ ,棱镜  $\Pi_2$  的楔角误差  $\Delta n_2=0$ ,棱镜  $\Pi_1$  和棱镜  $\Pi_2$  的折射率误差  $\Delta n=0$ 。未修正时,

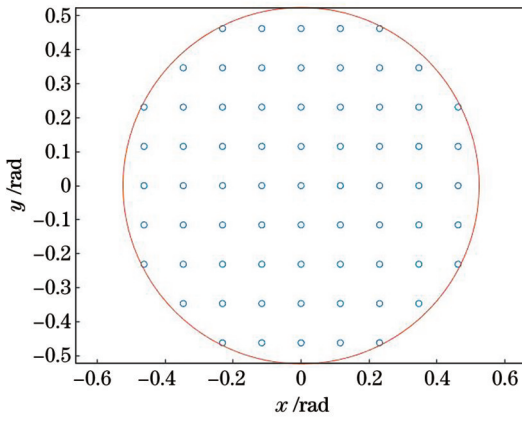


图 4 光屏上选取的理论点

Fig. 4 Theoretical points selected on light screen

理论点与实际点的偏差如图 5 所示,此时最大的指向偏差为 8.37 mrad,平均指向偏差为 4.00 mrad。

采用 LM 法对整体进行修正后,棱镜  $\Pi_1$  的转角误差  $\Delta\theta_1 = -0.5359^\circ$ ,棱镜  $\Pi_2$  的转角误差  $\Delta\theta_2 = -0.6676^\circ$ ,棱镜  $\Pi_1$  的楔角误差  $\Delta n_1 = 0.0834^\circ$ ,棱镜  $\Pi_2$  的楔角误差  $\Delta n_2 = -0.0621^\circ$ ,棱镜  $\Pi_1$  和棱镜  $\Pi_2$  的折射率误差  $\Delta n = 0.0282$ 。采用 LM 法对整体修正后,理论点与实际点的偏差如图 6 所示,此时的最大指向偏差为 5.33 mrad,平均指向偏差为 1.82 mrad。

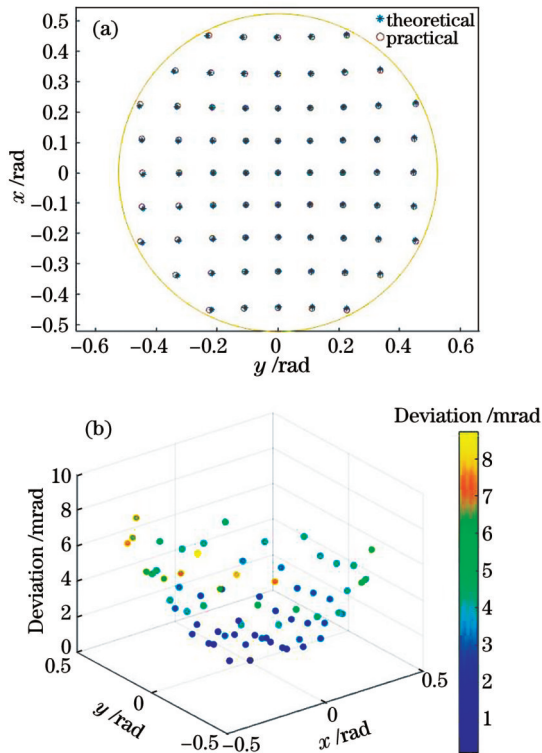


图 5 未修正时,理论点与实际点的偏差。(a)理论点与实际点在光屏上的偏差;(b)不同位置处理论点与实际点的偏差  
Fig. 5 Deviation of theoretical and actual points before correction. (a) Deviation of theoretical and actual points on light screen; (b) deviation of theoretical and actual points in different positions

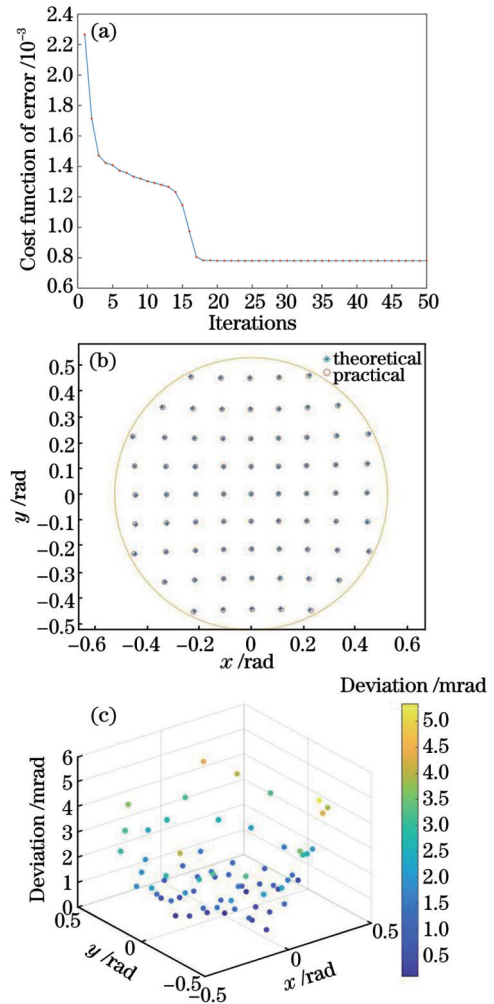


图 6 整体修正后,理论点与实际点的偏差。(a)误差代价函数随迭代次数的变化;(b)理论点与实际点在光屏上的偏差;(c)不同位置处理论点与实际点的偏差

Fig. 6 Deviation of theoretical and actual points after overall correction. (a) Cost function of error varies with iterations; (b) deviation of theoretical and actual points on light screen; (c) deviation of theoretical and actual points in different positions

利用 LM 法整体修正全部指向范围内的指向偏差,修正结果与未修正时相比,最大指向偏差和平均指向偏差都得到大幅改善。

### 3.3 误差分析

对旋转双棱镜的整个视场进行优化后,旋转双棱镜的指向精度有了一定提高,但该指向偏差依然较大,需要对旋转双棱镜进行进一步优化,以得到更高的指向精度。旋转双棱镜是用来完成空间激光通信过程中瞄准、捕获和跟踪任务的,其中的瞄准和捕获过程对旋转双棱镜的指向精度要求较高,而跟踪过程对旋转双棱镜指向精度的要求可以稍微降低(因为存在闭环控制系统)。

对旋转双棱镜  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  的转角误差、楔角和折射率进行修正后,旋转双棱镜整个实验系统依然存在许多其他误差。表 1 为部分未修正的误差源对旋转双棱

镜在俯仰角小于 15° 的区域以及整个视场造成的最大指向偏差。图 7 给出了初始入射光束相对于理想光轴方位角为 0.1°、俯仰角为 0.1°，且  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  竖直侧壁的法线方向与理想光轴方位角均为 0.1°、俯仰角均为 0.1° 时，实际出射光束与理论光束在不同方位角和俯仰角下的光束指向偏差。由图 7 可知：在俯仰角小于 15° 的区域内，最大指向偏差为 2.28 mrad；在整个视场中，最大指向偏差为 3.41 mrad。由表 1 和图 7 可以看

出，在初始光束与理想光轴之间的误差以及棱镜侧面倾斜误差一定的情况下，部分俯仰角比较大的位置会引入较大的指向偏差。当俯仰角较大时，二维转台需要转动比较大的角度才能使最终出射光束进入相机，这会引入较大平移量，从而导致旋转双棱镜的出射光束偏离透镜光轴，单透镜产生多种像差，同时导致大俯仰角下产生更大的指向偏差。

表 1 部分误差源对旋转双棱镜不同视场区域造成的最大指向偏差

Table 1 Maximum pointing deviation caused by some error sources to different fields of view of rotating Risley prisms

Error name	Error setting value / (°)	Maximum pointing deviation in the area with pitch angle less than 15° /mrad	Maximum pointing deviation in entire area /mrad
Pitch angle of incident beam	0.1	1.96	2.73
Azimuth of incident beam	0.1	$2.73 \times 10^{-6}$	$6.9 \times 10^{-6}$
Pitch angle of $\Pi_1$	0.1	0.46	0.48
Azimuth of $\Pi_1$	0.1	0.04	0.06
Pitch angle of $\Pi_2$	0.1	0.46	0.50
Azimuth of $\Pi_2$	0.1	0.04	0.38

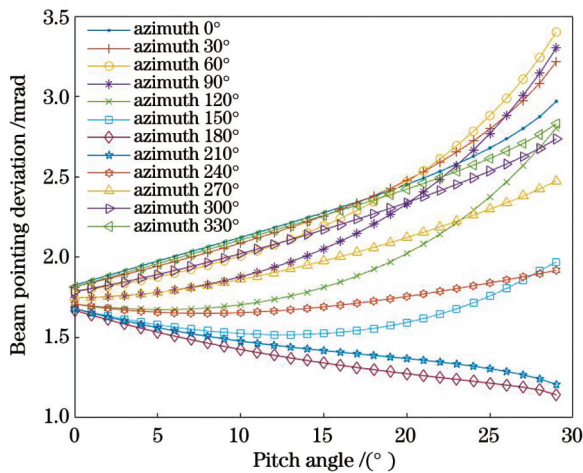


图 7 不同方位角和俯仰角下的光束指向偏差

Fig. 7 Beam pointing deviation at different azimuth and pitch angles

通过实验仿真可知，初始入射光束相对于理想光轴的误差会对旋转双棱镜的指向精度产生较大影响。为了获得更高的指向精度，在对  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  的转角误差、楔角和折射率进行修正的基础上，本文对初始入射光束相对于理想光轴的误差进行了修正。

另外，考虑到实际系统需要、旋转双棱镜在空间激光通信中的作用，以及未修正时的误差会对旋转双棱镜中俯仰角较大的位置产生更大的指向偏差，本文选择对俯仰角小于 15° 的点进行单独修正，使俯仰角小于 15° 的点具有更高的指向精度，以便完成瞄准和捕获任务，在全视场范围内完成跟踪任务。

### 3.4 增加对初始入射光束相对于理想光轴误差的修正

设初始入射光束相对于光轴的方位角为  $\Phi$ ，俯仰角为  $\theta$ ，则式(11)变为

$$A_1 = \begin{bmatrix} \sin(\Phi) \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ \cos(\Phi) \end{bmatrix}. \quad (35)$$

光束指向偏差  $f_i$  和误差评价函数  $F$  是关于  $x$  的函数，

$$x = [\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta n, \Phi, \theta]^T, \quad (36)$$

$x$  的初始值为理想情况，即各误差全为零，即  $x = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ 。

通过 LM 法增加对初始入射光束相对于理想光轴误差的修正后，棱镜  $\Pi_1$  的转角误差  $\Delta\theta_1 = -0.5123^\circ$ ，棱镜  $\Pi_2$  的转角误差  $\Delta\theta_2 = -0.5722^\circ$ ，棱镜  $\Pi_1$  的楔角误差  $\Delta n_1 = -0.0400^\circ$ ，棱镜  $\Pi_2$  的楔角误差  $\Delta n_2 = -0.0570^\circ$ ，棱镜  $\Pi_1$  和棱镜  $\Pi_2$  的折射率误差  $\Delta n = 0.0162$ ，初始光束俯仰角为 0.0558°，初始光束方位角为 25.1502°。采用 LM 法修正后，理论点与实际点的偏差如图 8 所示，此时的最大指向偏差为 3.75 mrad，平均指向偏差为 1.38 mrad。

### 3.5 俯仰角小于 15° 的点单独修正

利用 LM 法单独对俯仰角小于 15° 的点进行修正。修正后，棱镜  $\Pi_1$  的转角误差  $\Delta\theta_1 = -0.4422^\circ$ ，棱镜  $\Pi_2$  的转角误差  $\Delta\theta_2 = -0.5177^\circ$ ，棱镜  $\Pi_1$  的楔角误差  $\Delta n_1 = 0.0752^\circ$ ，棱镜  $\Pi_2$  的楔角误差  $\Delta n_2 =$

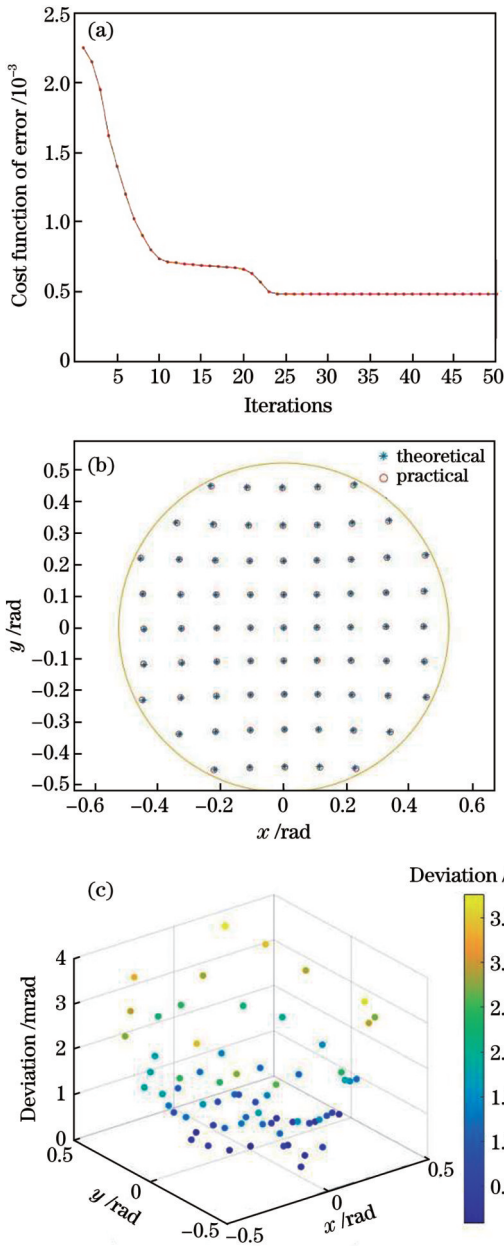


图8 增加对初始入射光束相对于理想光轴误差的修正后,理论点与实际点的偏差。(a)误差代价函数随迭代次数的变化;(b)理论点与实际点在光屏上的偏差;(c)不同位置处理论点与实际点的偏差

Fig.8 Deviation of theoretical and actual points after adding the correction for the error of initial incident beam relative to ideal optical axis. (a) Cost function of error varies with iterations; (b) deviation of theoretical and actual points on light screen; (c) deviation of theoretical and actual points in different positions

-0.0627°, 棱镜  $\Pi_1$  和棱镜  $\Pi_2$  的折射率误差  $\Delta n = 0.03095$ 。利用 LM 法单独对俯仰角小于 15° 的点进行修正后,理论点与实际点的偏差如图 9 所示,此时的最大指向偏差为 1.51 mrad,平均偏差为 0.84 mrad。

本文比较了旋转双棱镜理论下出射光束与实际出射光束的偏差,构建了误差评价函数,通过 LM 迭代算

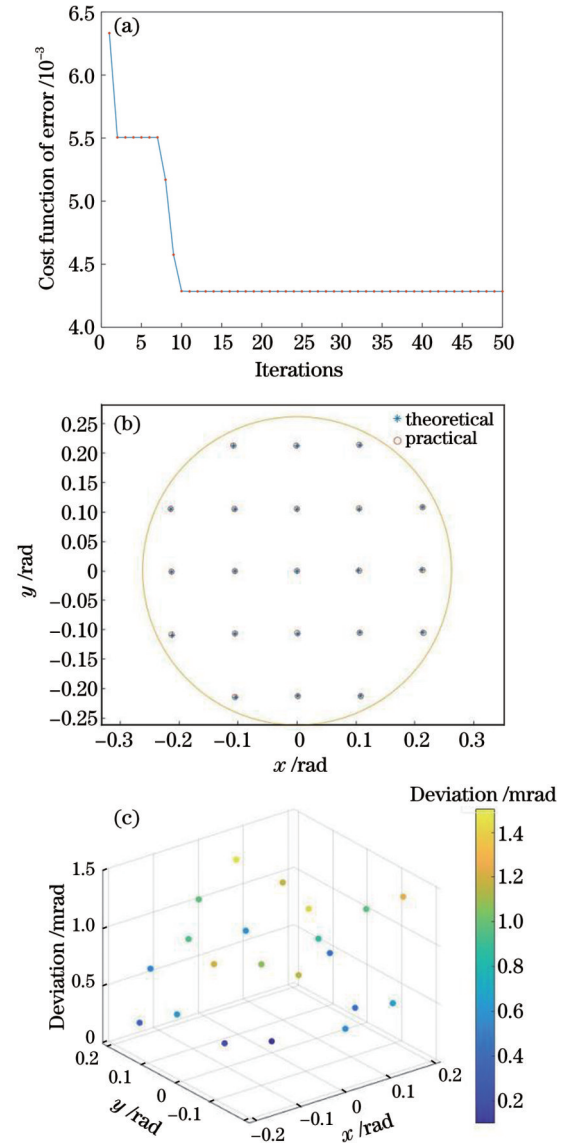


图9 俯仰角小于 15° 的点单独修正后,理论点和实际点的偏差。(a)代价函数随迭代次数的变化;(b)理论点和实际点在光屏上的偏差;(c)不同位置处理论点和实际点的偏差

Fig.9 Deviation of theoretical and actual points after individually correcting the points whose pitch angle is less than 15°. (a) Cost function of error varies with iterations; (b) deviation of theoretical and actual points on light screen; (c) deviation of theoretical and actual points in different positions

法对旋转双棱镜  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  的转角误差、楔角和折射率进行了修正。这是一种参数辨识方法,通过已有的不同位置处的实际出射光束数据,构建误差分析模型,实现了对旋转双棱镜  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  转角误差、楔角和折射率的修正,不用进行转角补偿。该旋转双棱镜误差修正方法是一种开环算法,相对于闭环算法需要通过反馈控制系统实时迭代旋转双棱镜  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  的转角来实现高精度指向来说,该方法可以提前修正旋转双棱镜的指向误差,使旋转双棱镜出射光束能够直接指向目标

位置,避免了反复迭代,节省了时间,使空间激光通信系统能够实现更快的跟瞄。

## 4 结 论

本文采用非近轴光线追迹方法建立了旋转双棱镜指向模型,在整个区域内均匀选取若干点,建立二维转台指向模型,实现了对旋转双棱镜实际出射光束的精确测量。比较旋转双棱镜理论出射光束与实际出射光束的偏差,通过 LM 迭代算法对棱镜  $\Pi_1$  的转角误差  $\Delta\theta_1$ 、棱镜  $\Pi_2$  的转角误差  $\Delta\theta_2$ 、棱镜  $\Pi_1$  的楔角误差  $\Delta\alpha_1$ 、棱镜  $\Pi_2$  的楔角误差  $\Delta\alpha_2$ ,以及棱镜  $\Pi_1$  和棱镜  $\Pi_2$  的折射率误差  $\Delta n$  等进行了优化。实验结果表明:在整个视场区域内修正后,最大指向偏差由 8.37 mrad 变为 3.75 mrad,平均指向偏差由 4.00 mrad 变为 1.38 mrad,并且当俯仰角较小时,修正效果较好;在俯仰角小于  $15^\circ$  的视场区域进行单独修正后,最大指向偏差变为 1.51 mrad,平均偏差变为 0.84 mrad。通过上述方法修正后,旋转双棱镜的指向精度大大提高,说明该修正方法对旋转双棱镜指向误差的补偿修正具有一定价值,有利于旋转双棱镜在空间激光通信中的应用。

本文针对旋转双棱镜的转角误差、楔角误差及折射率误差进行了修正。修正后,旋转双棱镜的指向精度得到了一定提高,但依然存在一些系统误差和随机误差。若想要进一步提升指向精度,可以考虑对棱镜厚度、两个棱镜侧面倾斜误差以及两个棱镜之间的间距等引起的指向偏差进行修正。经过上述处理后,旋转双棱镜的指向精度将会有更进一步的提升。

## 参 考 文 献

- [1] 刘立人. 卫星激光通信 I 链路和终端技术[J]. 中国激光, 2007, 34(1): 3-20.  
Liu L R. Laser communications in space I optical link and terminal technology[J]. Chinese Journal of Lasers, 2007, 34(1): 3-20.
- [2] 刘立人. 卫星激光通信 II 地面检测和验证技术[J]. 中国激光, 2007, 34(2): 147-155.  
Liu L R. Laser communications in space II test and verification techniques on the ground[J]. Chinese Journal of Lasers, 2007, 34(2): 147-155.
- [3] Wood R M. Laser communications in space[J]. Optics & Laser Technology, 1997, 29(2): ix.
- [4] 姜会林, 佟首峰, 张立中. 空间激光通信技术与系统[M]. 北京: 国防工业出版社, 2010: 1-22.  
Jiang H L, Tong S F, Zhang L Z. The technologies and systems of space laser communication[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2010: 1-22.
- [5] 徐森, 史浩东, 王超, 等. 空间目标多维度探测与激光通信一体化技术研究[J]. 中国激光, 2021, 48(12): 1206002.  
Xu M, Shi H D, Wang C, et al. Technology for integrating space object multidimensional detection and laser communication[J]. Chinese Journal of Lasers, 2021, 48(12): 1206002.
- [6] 吴从均, 颜昌翔, 高志良. 空间激光通信发展概述[J]. 中国光学, 2013, 6(5): 670-680.  
Wu C J, Yan C X, Gao Z L. Overview of space laser communications[J]. Chinese Optics, 2013, 6(5): 670-680.
- [7] 李安虎. 双棱镜多模式扫描理论与技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2016.  
Li A H. Double-prism multi-mode scanning theory and technology [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2016.
- [8] 漆勇, 沈英, 黄峰, 等. 基于旋转双棱镜的视场扩大方法和评价[J]. 光学学报, 2021, 41(16): 1611001.  
Qi Y, Shen Y, Huang F, et al. Method and evaluation of enlarging field of view based on rotational double prisms[J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(16): 1611001.
- [9] 周远, 陈英, 蒋国保, 等. 旋转双棱镜目标跟踪的非线性问题分析[J]. 光学学报, 2021, 41(18): 1823002.  
Zhou Y, Chen Y, Jiang G B, et al. Nonlinearity problem analysis of target tracking based on rotational double prisms[J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(18): 1823002.
- [10] Boisset G C, Robertson B, Hinton H S. Design and construction of an active alignment demonstrator for a free-space optical interconnect[J]. IEEE Photonics Technology Letters, 1995, 7(6): 676-678.
- [11] 孙建锋. 卫星相对运动轨迹光学模拟器的研究[D]. 上海: 中国科学院上海光学精密机械研究所, 2005.  
Sun J F. Research on the satellite trajectory optical simulator[D]. Shanghai: Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, the Chinese Academy of Sciences, 2005.
- [12] 周远, 鲁亚飞, 黑沫, 等. 旋转双棱镜光束指向解析解[J]. 光学精密工程, 2013, 21(6): 1373-1379.  
Zhou Y, Lu Y F, Hei M, et al. Analytic solution of optical beam steering based on rotational double prisms[J]. Optics and Precision Engineering, 2013, 21(6): 1373-1379.
- [13] 张鲁薇, 王卫兵, 王锐, 等. 基于正解过程的 Risley 棱镜光束指向控制精度分析[J]. 中国光学, 2017, 10(4): 507-513.  
Zhang L W, Wang W B, Wang R, et al. Analysis of beam steering control precision for Risley prisms based on forward solution[J]. Chinese Optics, 2017, 10(4): 507-513.
- [14] 邱赛, 盛磊, 高世杰, 等. 旋转双棱镜指向系统转角补偿偏差修正方法[J]. 光通信技术, 2021, 45(2): 41-45.  
Qiu S, Sheng L, Gao S J, et al. Correction method for angle compensation deviation of rotating biprism pointing system[J]. Optical Communication Technology, 2021, 45(2): 41-45.
- [15] Madsen K, Nielsen H B, Tingleff O. Methods for non-linear least squares problems[EB/OL]. (2004-04)[2021-05-04]. <http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/edoc/imm3215.pdf>.
- [16] Lampton M. Damping-undamping strategies for the Levenberg-Marquardt nonlinear least-squares method[J]. Computers in Physics, 1997, 11(1): 110-115.
- [17] Lourakis M I A. A brief description of the Levenberg-Marquardt algorithm implemented by levmar[EB/OL]. (2005-02-11)[2021-02-05]. <https://users.ics.forth.gr/~lourakis/levmar/levmar.pdf>.
- [18] Levenberg K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1944, 2(2): 164-168.
- [19] Loke M H, Dahlin T. A comparison of the Gauss-Newton and quasi-Newton methods in resistivity imaging inversion[J]. Journal of Applied Geophysics, 2002, 49(3): 149-162.
- [20] Huang F, Ren H, Shen Y, et al. Error analysis and optimization for Risley-prism imaging distortion correction[J]. Applied Optics, 2021, 60(9): 2574-2582.
- [21] 邱赛, 盛磊, 高世杰, 等. 激光通信旋转双棱镜系统误差对指向精度的影响[J]. 光学精密工程, 2021, 29(6): 1281-1290.  
Qiu S, Sheng L, Gao S J, et al. Influence of laser communication Risley prism system error on pointing accuracy[J]. Optics and Precision Engineering, 2021, 29(6): 1281-1290.



# Correction of Pointing Deviation of Risley Prisms Based on Levenberg-Marquardt Algorithm

Jiang Yuxin<sup>1,2</sup>, Sun Jianfeng<sup>3\*</sup>, Hou Peipei<sup>1</sup>, Han Ronglei<sup>1,2</sup>, Ren Weijie<sup>1,2</sup>, Cong Haisheng<sup>1,2</sup>, Zhang Longkun<sup>1</sup>, Li Chaoyang<sup>1</sup>, Xu Lingling<sup>1,2</sup>, Zhang Zhengwei<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Key Laboratory of Space Laser Communication and Detection Technology, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academic of Sciences, Shanghai 201800, China;

<sup>2</sup>University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

<sup>3</sup>Department of Aerospace Laser Engineering, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800, China

## Abstract

**Objective** A space laser communication terminal generally comprises two basic systems: a laser communication system and an optical tracking system. The former is for information transmission between two satellites, and the latter is for pointing, acquisition, and tracking (PAT). The space laser communication system is advancing toward miniaturization and is lightweight. However, traditional optical tracking and sighting systems usually use gimbal turrets and gimbal turning mirrors to attain significant beam angles. Furthermore, such structures are large in size, large in inertia, poor in dynamic performance, slow in response time, and sensitive to vibration, which is not conducive to the installation of the carrier platform and the balance of the carrier posture. Compared with the traditional structure, Risley prisms are small in size, have excellent viewing axis adjustment function, and can realize large-angle deflection of the beam; therefore, the rotating biprism is more suitable for space laser communication. However, since Risley prisms are composed of two coaxial wedge prisms, there is no linear relationship between the outgoing light and the wedge prism's rotation angle, making it challenging to solve the outgoing beam of Risley prisms. Additionally, there are several error sources of Risley prisms, and the pointing is not sufficiently accurate. Therefore, it should be corrected to obtain a more precise pointing, which can be used in space laser communication.

**Methods** A new method of correcting the pointing deviation of Risley prisms is proposed to aim at the problem of poor pointing accuracies, including the significant pointing error of Risley prisms and more error sources. This study uses a non-paraxial ray tracing method to establish a Risley prism pointing model and a two-dimensional turntable pointing model. Many points are uniformly chosen in the entire field of view, and the deviation between the rotating double prism's theoretical and actual output beams is compared. The Levenberg-Marquardt iterative algorithm corrects the rotation angle error, wedge angle, and refractive index of the front and back mirrors of Risley prisms. Higher-precision pointing is achieved by correcting the inaccuracy of the initial incident beam relative to the ideal optical axis and separately correcting the region with a small pitch angle to address the issue of low pointing accuracy in the area with a big pitch angle.

**Results and Discussions** From the simulation findings of the final convergence of the Levenberg-Marquardt algorithm with various initial values, different initial values have little impact on the final optimization results of this experiment (Fig. 2). The entire field of view of Risley prisms is pitch angle  $0^\circ - 29.22^\circ$ , azimuth angle  $0^\circ - 360^\circ$ . After optimizing the whole area of view by the Levenberg-Marquardt algorithm, the maximum pointing deviation is 5.33 mrad and the average pointing deviation is 1.82 mrad (Fig. 6). It can be observed that the pointing error of the initial incident beam relative to the ideal optical axis will have a relatively large impact on the pointing accuracy of Risley prisms from the effect of the simulation error on the pointing deviation between the actual outgoing beam and the theoretical outgoing beam (Fig. 7). After adding the correction of the error of the initial incident beam relative to the ideal optical axis by the Levenberg-Marquardt algorithm, the maximum pointing deviation is 3.75 mrad and the average pointing deviation is 1.38 mrad (Fig. 8). After using the Levenberg-Marquardt algorithm to correct the points with a pitch angle of less than  $15^\circ$ , the maximum pointing deviation is 1.51 mrad and the average deviation is 0.84 mrad (Fig. 9).

**Conclusions** In this study, the non-paraxial ray tracing method is used to develop the pointing model of Risley prisms. Numerous points are evenly chosen in the entire area, and a two-dimensional turntable pointing model is shown to accurately measure the actual outgoing beam of the Risley prisms. Comparison is made between the deviation of the theoretical and real output beams of Risley prisms. The rotation angle error, wedge angle, and refractive index of the front and rear mirrors of Risley prisms are corrected via the Levenberg-Marquardt iterative procedure. After correction in the entire field of view, the maximum pointing deviation changes from 8.37 mrad to 3.75 mrad, and the average pointing deviation changes from 4.00 mrad to 1.38 mrad. Moreover, the correction effect is better when the pitch angle is small. For example, after individually correcting the field of view area with the pitch angle less than  $15^\circ$ , the maximum pointing deviation becomes 1.51 mrad and the average deviation becomes 0.84 mrad. This method improves the pointing accuracy of Risley prisms, and it has a particular reference value for correcting the pointing deviation of Risley prisms.

**Key words** optical communications; free space optical communication; Risley prisms; Levenberg-Marquardt algorithm; least squares method; error correction