

## 基于希尔伯特分形超晶格结构的准相位匹配研究

吕家富<sup>1</sup>, 马博琴<sup>1\*</sup>, 王雪颖<sup>2</sup><sup>1</sup>中国传媒大学数据科学与智能媒体学院, 北京 100024;<sup>2</sup>中国传媒大学信息与通信工程学院, 北京 100024

**摘要** 准相位匹配技术是一种弥补相位失配的有效办法,在激光谐波产生和非线性光参量放大等方面备受关注。现有的准周期超晶格结构存在结构单一性问题,运用豪斯多夫维数计算方法,设计并制备出二维希尔伯特分形结构,将其应用到光学超晶格中。通过希尔伯特分形结构的衍射图与周期性结构的衍射图的对比,验证了希尔伯特分形结构可以提供丰富的倒易矢量,由此可产生波长为 543, 632, 696, 900 nm 的二次谐波,为超短脉冲激光等技术的发展提供了更多的选择。

**关键词** 非线性光学; 倒易矢量; 希尔伯特分形; 准相位匹配; 光学超晶格

中图分类号 O734

文献标志码 A

doi: 10.3788/CJL202249.0608001

## 1 引言

为了能够补偿由基频波和谐频波在非线性光子晶体中折射率不同导致的相位失配,Armstrong 等<sup>[1]</sup>提出了准相位匹配理论,即通过周期性地对非线性光子晶体的非线性极化率进行调制来弥补不同波长之间产生的相位差,进而提高非线性光学频率的转换效率。Yamada 等<sup>[2]</sup>通过外加电场极化方法制备出一维周期反转畴结构并验证了准相位匹配理论。南京大学团队进行了具有一维斐波那契准周期畴结构的准相位匹配实验并提出了多重准相位匹配理论,将准周期结构引入光学超晶格<sup>[3]</sup>。自提出准周期畴结构以来,此概念引起了人们对准周期调制介电体超晶格的关注与研究。经研究发现,基于二阶非线性极化率的准周期调制也能够用于非线性光学的相位匹配,即将准相位匹配由原来的周期结构推广至准周期结构。由于准周期结构的有序性低于周期结构,因此准周期畴结构具有更丰富的傅里叶分量,即在倒易空间中分布着更加广泛的倒易矢量。国内的研究团队已经证实了在一块非线性光子晶体上,经过与超短脉冲激光的相互作用,实现多阶次的高阶谐波产生<sup>[4-5]</sup>。在非线性光子晶体畴结

构的维度上,Berger<sup>[6]</sup>以六边形为例,首次将一维晶格结构拓展到二维晶格结构,这一发现再一次丰富了准相位匹配理论,为其提供了更加多元化的结构设计思路。

近年来,随着激光加工技术和光刻技术的不断优化和进步,传统的超晶格结构也在逐渐被新的结构取代,同时对超晶格材料的应用需求也越来越高,因此设计更加优良的光学超晶格结构具有重要意义。国内外学者对铌酸锂(LN)<sup>[7-10]</sup>、钽酸锂(LT)<sup>[11-12]</sup>、磷酸钛氧钾(KTP)<sup>[13-14]</sup>等光学超晶格材料在准相位匹配谐波产生<sup>[15-20]</sup>、涡旋光产生<sup>[21-23]</sup>、切伦科夫辐射<sup>[24]</sup>、飞秒激光擦除畴结构<sup>[25]</sup>等进行了较多的研究实验,其中:香港科技大学研究了 15 阶 H 型分形光栅的夫琅禾费衍射图案,发现衍射光在高空间频率范围内更加明显<sup>[26]</sup>;Mossoulina 等<sup>[27]</sup>对规则和随机康托集的衍射图信息进行了详细分析。虽然上述研究将准周期结构应用到光学超晶格中,但由于结构本身原因,相应准周期结构的非线性频率转换效率没有达到预期效果。

本文设计并制备了希尔伯特(Hilbert)分形超晶格结构,并将此结构应用到非线性光学高阶谐波产生的实验中。首先,介绍 Hilbert 分形超晶格结

收稿日期: 2021-06-28; 修回日期: 2021-07-27; 录用日期: 2021-08-05

通信作者: \*maboqin@cuc.edu.cn

构的基本原理与设计方法,并研究此分形结构的特点;然后,利用周期性结构衍射光栅来确定 Hilbert 分形结构的倒易矢量,进而分析得出此结构可实现准相位匹配的谐波输出。

## 2 Hilbert 分形及其结构设计

分形是将同样的形状以不同的规格无限重复下去形成的,例如谢尔宾斯基分形、Hilbert 分形等。分形的最主要特征是自相似性和分数维度。自相似性意味着分形结构具有尺度的周期重复性,常用迭代思想来描述。分数维度意味着分形结构具有很好的空间填充性。Hilbert 分形曲线是一条面积不为 0 的二维空间填充曲线,是无限空间中一条连续不可导的曲线,可宏观地定义为  $f_{HC}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{PHC-n}(x)$ ,其中  $f_{PHC}$  为有限空间中的伪 Hilbert 曲线, $n$  表示曲线阶数。

一般来说,在同一分辨率情况下,当阶数  $n \geq 5$  时,Hilbert 分形的细节将不易观察。图 1(a)为 3 阶 Hilbert 分形曲线结构示意图。假定空间边长为  $l$ ,空间被均分为  $2^3 \times 2^3$  个正方形,并以 4 个最小的正方形单元为一组,将正方形单元中心按图 1 所示的标号依次相连。其中,0 到 1、1 到 2、2 到 3 的连线称为一阶 Hilbert 分形曲线。曲线的拐点在正方形单元的中心,而 Hilbert 分形曲线正是由正方形单元的中心连线构成的。依次连接所有正方形单元中心,可得到  $n=3$  的 Hilbert 分形,其包含着 63 条线段,且每条线段长度为  $l/2^3$ 。按上述方法无限迭代下去就可以得到  $n$  阶 Hilbert 分形曲线,第  $n$  阶曲线包含着  $4^n - 1$  条线段,线段长为  $l/2^n$ 。在空间边长  $l$  不变的情况下,第  $n$  阶曲线的线段长度是第  $(n+1)$  阶的 2 倍。

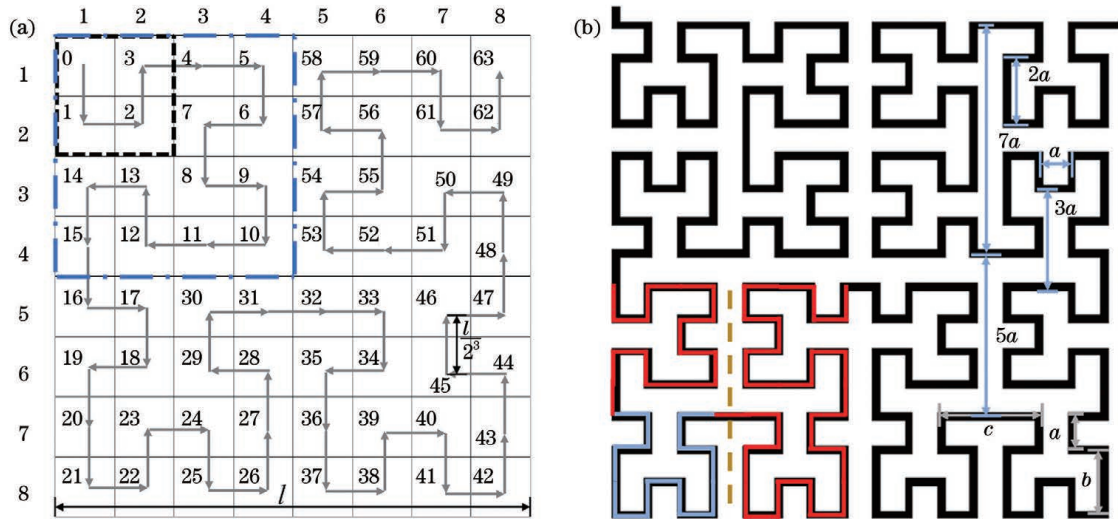


图 1 Hilbert 分形结构示意图。(a)3 阶 Hilbert 分形曲线结构示意图;(b)Hilbert 分形超晶格正空间结构的掩模版局部示意图  
Fig. 1 Schematic of Hilbert fractal structure. (a) Schematic of third-order Hilbert fractal curve structure; (b) a partial mask schematic of the positive space structure of Hilbert fractal superlattice

图 1(a)中黑色(虚线)和蓝色(点划线)线框内分别为 1 阶 Hilbert 分形曲线和 2 阶 Hilbert 分形曲线,可以看到,在 Hilbert 分形曲线迭代的过程中,每次迭代都会复制自身面积的 4 倍,同时分形曲线所占据空间的边长由 2 个正方形单元边长扩展到 4 个。因此,通过豪斯多夫维数的计算,可得出豪斯多夫维数  $D = \ln p / \ln q = \ln 4 / \ln 2 = 2$ ,其中  $q$  为曲线缩放比例, $p$  为恢复到缩放前所需低阶曲线的个数。相对于分形维数为 1.585 的谢尔宾斯基分形,Hilbert 分形在正空间有更丰富的空间矢量。随着分形阶数的增加,压缩的效率提高,该结构最终能够填满整个空间,并平铺成一个正方形。本实验根

据利用外加高压电场极化技术制备非线性光子晶体的要求,在  $1.4 \text{ cm} \times 1.4 \text{ cm}$  的方形区域内设计和制备出 Hilbert 分形超晶格结构。通过(1)式的计算,可得出在方形区域内 Hilbert 分形的最大阶数  $n$  为 10。

$$2^{n-1} \times 16.64 + (2^{n-1} - 1) \times 10.64 \leq 14000. \quad (1)$$

为了能够将 Hilbert 分形曲线更好地应用到光学超晶格实验中,将分形曲线线宽  $d$  设定为  $3 \mu\text{m}$ ,作为铌酸锂非线性光子晶体的极化反转区域。如图 1(b)所示,从 Hilbert 分形超晶格结构的正空间局部版图来看,Hilbert 分形是一个连续图形,也称“一笔画”,只有一组进出口,不存在任何交叉点。该

分形结构是从一维曲线经过一次次迭代向二维空间延伸,因此它在结构上的自相似性非常严格。如图 1(b)所示,红色框线的 3 阶 Hilbert 分形结构是由蓝色框线的 2 阶分形结构通过平移或旋转得到的。以此类推, $n$  阶 Hilbert 分形结构是由  $n-1$  阶分形结构通过平移或旋转得到的,这使得整个分形结构具有明显的自相似性和对称性,橙色虚线代表 3 阶 Hilbert 分形结构的对称轴。另外,在横向和纵向上存在一定数量且空间尺寸分别为  $13.64 \mu\text{m}$ 、 $27.28 \mu\text{m}$  和  $40.92 \mu\text{m}$  的长度单元  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ,它们之间重复交错排列,构成了 Hilbert 分形结构的基本框架。除此之外,Hilbert 分形结构正空间还存在尺寸为  $a$ 、 $2a$ 、 $3a$ 、 $5a$ 、 $7a$  的空间间距。当分形阶数增加到  $n$  时,分形结构中还会存在尺寸为  $(2^{n-1}-1)a$  的空间间距,这就使得在分形结

构倒易空间的横向和纵向上存在与倒易基矢  $k_a$  成倍数关系的倒易矢量,有助于实现多波段的频率转换。

### 3 实验结果与讨论

#### 3.1 周期性超晶格结构分析

图 2(a)~(c)所示分别为方形、正六边形和旋转  $30^\circ$  的正六边形三种周期性超晶格结构。从具有成熟数据基础的周期性结构出发,通过与 Hilbert 分形结构的对比,利用超晶格结构衍射图的倒易矢量分布计算法<sup>[24]</sup>,通过比例换算来计算 Hilbert 分形的倒易矢量。与 Hilbert 分形结构类似,也选择在  $1.4 \text{ cm} \times 1.4 \text{ cm}$  的区域内制备三种周期性超晶格结构,其周期  $\lambda$  为  $13.64 \mu\text{m}$ ,周期性结构的圆孔直径均为  $3 \mu\text{m}$ 。

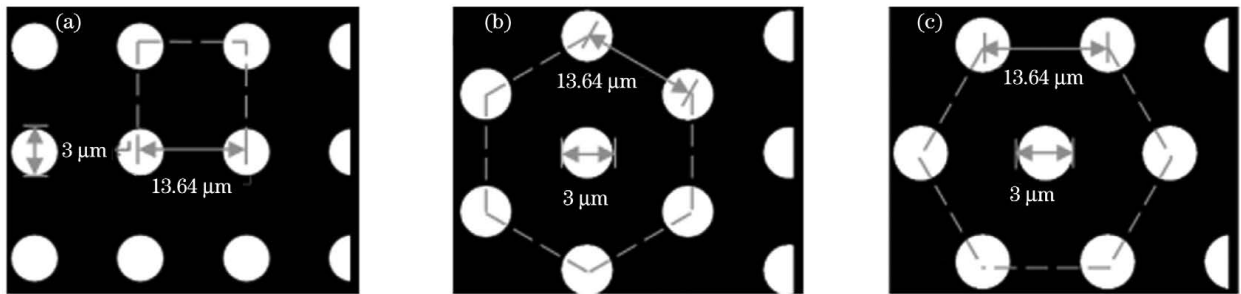


图 2 不同形状的周期性超晶格结构掩模版示意图。(a) 方形;(b) 正六边形;(c) 旋转  $30^\circ$  的正六边形

Fig. 2 Schematic of periodic superlattice structure masks with different shapes. (a) Square; (b) regular hexagon; (c) regular hexagon rotated by  $30^\circ$

通过夫琅禾费衍射实验来观察分析非线性光子晶体倒易空间中的倒易矢量分布,而光的衍射在数学上是二维傅里叶变换的直接体现。由衍射原理可知,通过对图像进行二维傅里叶变换即可得到对应的夫琅禾费衍射图。本文利用 MATLAB 软件设计了一套超晶格衍射仿真程序,并用波长为  $632 \text{ nm}$  的 He-Ne 激光器照射掩模版进行衍射实验,得到如图 3(a)~(c)所示的方形、正六边形和旋转  $30^\circ$  的正

六边形周期性超晶格结构衍射仿真图,右上角  $1/4$  部分为衍射实验图,虚线表示衍射点的基本形状,每种结构的仿真结果都与其实验结果非常吻合。从衍射实验图可以看出,方形结构的衍射点分布呈方形结构,六边形的衍射点分布呈六边形结构。其中,正六边形倒易空间的衍射点分布可以看成是由正空间格点旋转  $30^\circ$  得到的,这与 Berger<sup>[6]</sup>的研究结果完全一致。

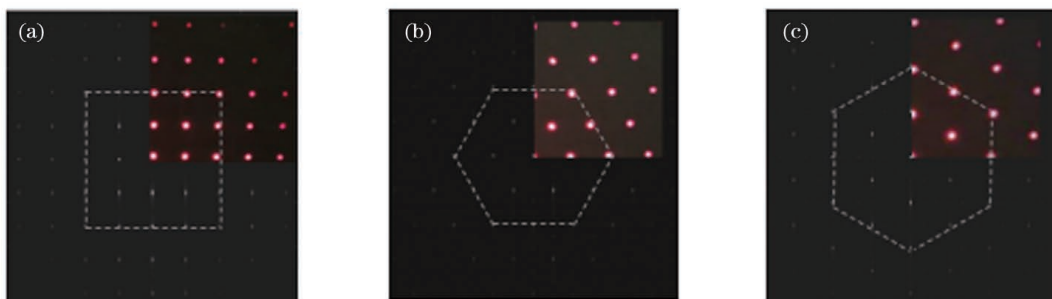


图 3 不同形状的周期性超晶格结构衍射的仿真图和实验图(插图)。(a) 方形;(b) 正六边形;(c) 旋转  $30^\circ$  的正六边形

Fig. 3 Simulation and experimental (inset) diagrams of periodic superlattice structure diffraction with different shapes. (a) Square; (b) regular hexagon; (c) regular hexagon rotated by  $30^\circ$

对一维周期性结构非线性光子晶体而言,倒易矢量大小  $\|\mathbf{G}_m\| = 2\pi m/\Lambda$ , 其中,  $\Lambda$  为周期,  $m$  为倒易矢量在水平方向上的阶数。倒易矢量  $\mathbf{G}_m$  在准相位匹配中被用来补偿相位失配量  $\Delta\mathbf{k}$ , 则准相位匹配条件可表示为

$$\mathbf{k}_{2\omega} - 2\mathbf{k}_\omega - \Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_{2\omega} - 2\mathbf{k}_\omega - \mathbf{G}_m = 0, \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{k}_\omega$ 、 $\mathbf{k}_{2\omega}$  分别为基频波和二次谐波的波矢。在二维结构下, 方形结构的倒易矢量大小  $\|\mathbf{G}_{m,n}^{\text{sq}}\|$  和正六边形结构的倒易矢量大小  $\|\mathbf{G}_{m,n}^{\text{hex}}\|$  具有不同的计算公式, 即

$$\|\mathbf{G}_{m,n}^{\text{sq}}\| = \frac{2\pi}{\lambda} \times \sqrt{m^2 + n^2}, \quad (3)$$

$$\|\mathbf{G}_{m,n}^{\text{hex}}\| = \frac{2\pi}{\lambda} \times \sqrt{m^2 + n^2 + mn}, \quad (4)$$

式中:  $n$  为二维结构中倒易矢量在垂直方向上的阶数。

本文以铌酸锂非线性光子晶体中  $m=1, n=0$  (或  $m=0, n=1$ ) 的二次谐波产生为例进行说明。将得到的倒易矢量代入动量守恒公式和铌酸锂晶体的 Sellmeier 公式, 便可得出方形、正六边形和旋转  $30^\circ$  的正六边形超晶格结构产生的二次谐波波长。在衍射实验中, 衍射屏和掩模版的距离为 15 cm。经测量, 方形、正六边形和旋转  $30^\circ$  的正六边形衍射图中心区域相邻衍射强点之间的距离分别为 5.56 mm、5.8 mm 和 5.8 mm, 误差范围在 6% 以

内。在基频波和谐频波共线的条件下, 当  $m=1, n=0$  (或  $m=0, n=1$ ) 时, 方形和正六边形可采用一维周期性结构的倒易矢量计算方法, 可得出  $\|\mathbf{G}_{1,0}\|$  或  $\|\mathbf{G}_{0,1}\|$  为  $0.460 \mu\text{m}^{-1}$ , 对应的输入波长为 1352 nm, 二次谐波波长为 676 nm; 当  $m=1, n=1$  时, 代入 (3) 式和 (4) 式, 可得出方形和六边形的  $\|\mathbf{G}_{1,1}\|$  分别为  $0.650 \mu\text{m}^{-1}$  和  $0.796 \mu\text{m}^{-1}$ , 对应的输入波长为 1194 nm 和 1114 nm, 二次谐波波长为 597 nm 和 557 nm。

### 3.2 Hilbert 分形结构超晶格分析

图 4(a) 为利用波长为 632 nm 的 He-Ne 激光器照射 Hilbert 分形结构所产生的衍射图。可以看出, 在 Hilbert 分形超晶格结构的倒易空间中, 斑点在横轴和竖轴上等距离分布, 并且随着斑点与中心的距离增大, 亮度逐渐减弱。这是因为在正空间的水平和垂直方向上分布着大量相互垂直的空间基矢。除此之外, 还存在着围绕横、竖两轴线对称分布的衍射斑点。斑点的亮度随斑点到轴线和中心的距离增大而逐渐减弱。在 Hilbert 超晶格结构的倒易空间中, 利用倒易矢量的线性组合可以实现大范围连续波可调谐的相位补偿, 若适当调整结构密度, 则有可能实现倒易矢量的全方向覆盖, 即可以满足高阶谐波产生所需的准相位匹配条件。图 4(b) 为 Hilbert 分形结构的衍射仿真图, 仿真结果与实验结果基本吻合。

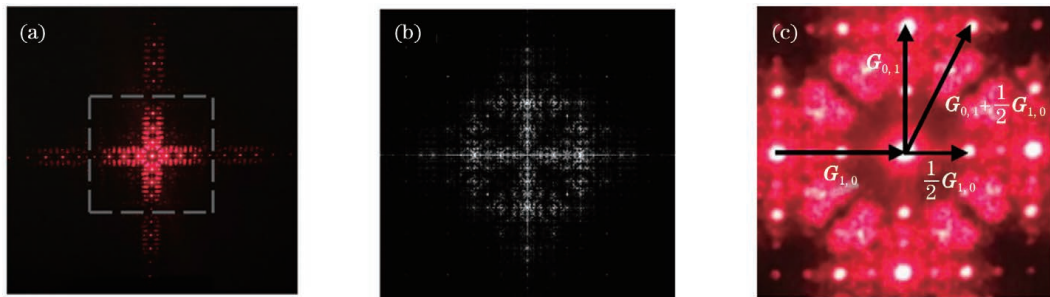


图 4 Hilbert 分形衍射图。(a) 衍射实验图; (b) 衍射仿真图; (c) 中心部分放大图

Fig. 4 Hilbert fractal diffraction diagrams. (a) Experimental diffraction diagram; (b) simulated diffraction diagram; (c) enlarged diagram of central part

需要注意的是, 如图 4(a) 虚线所示, Hilbert 分形衍射实验图出现一条暗纹, 这是因为衍射角  $\theta$  处的辐照度与中心点的辐照度满足以下关系

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \text{sinc}(\beta), \quad (5)$$

式中:  $\beta = (\pi d/\lambda) \sin \theta$ , 为相位差,  $d$  为线宽。当  $\beta = k\pi$  时 ( $k$  取整数且  $k \neq 0$ ), 即当  $k\lambda/d = \sin \theta$  时, 经过计算得到, 第一暗纹到中心的距离为 3.2 cm。经测量, Hilbert 分形结构的暗纹到中心的距离分别为

3.4 cm、3.3 cm 和 3.2 cm, 实际测量值与理论计算结果基本吻合。

基于超晶格结构衍射图的倒易矢量分布计算方法<sup>[28]</sup>, 通过比例换算的方式得到 Hilbert 分形结构的倒易矢量。比例公式可表示为

$$\frac{\|\mathbf{G}_{\text{Hil}}\|}{\|\mathbf{G}_{\text{per}}\|} = \frac{L_{\text{Hil}}}{L_{\text{per}}}, \quad (6)$$

式中:  $\|\mathbf{G}_{\text{Hil}}\|$  和  $\|\mathbf{G}_{\text{per}}\|$  分别为 Hilbert 分形结构和周期性结构的倒易矢量大小;  $L_{\text{Hil}}$  和  $L_{\text{per}}$  为各结构衍

射图中同阶次衍射亮斑到中心的距离。

经过测量,在衍射屏和掩模版的距离为 15 cm 的情况下,Hilbert 分形结构各阶次衍射亮斑到中心的距离分别为 3.08 mm、6.25 mm、11.75 mm,代入(6)式,可得到各阶次亮斑对应倒易矢量的大小分别为  $0.227 \mu\text{m}^{-1}$ 、 $0.427 \mu\text{m}^{-1}$ 、 $0.866 \mu\text{m}^{-1}$ 。经过计算便可得出 Hilbert 分形结构能够实现波长为 900 nm、696 nm、543 nm 的二次谐波输出。

图 4(c)所示为衍射图的中心部分。需要注意的是,在图 4(c)中,设  $\mathbf{G}_{1,0}$  为倒易基矢,其大小为相邻衍射强点之间的距离。Hilbert 分形衍射图中除了由衍射强点构成的单位长度为  $\|\mathbf{G}_{1,0}\|$  的十字衍射亮线外,还存在其他倒易矢量,其倒易矢量具有  $\frac{1}{2}\mathbf{G}_{1,0}$  的倍数特征。这意味着相邻衍射强点之间存在着二等分点,使得 Hilbert 分形结构可提供更多的倒易矢量。本文以  $\frac{1}{2}\mathbf{G}_{1,0} + \mathbf{G}_{0,1}$  为例,计算了该线性组合的倒易矢量及其对应的准相位匹配谐波,可得到其倒易矢量大小为  $0.552 \mu\text{m}^{-1}$ ,对应的输入波长为 1264 nm,二次谐波的波长为 632 nm。由于 Hilbert 分形结构在任意尺度下都能保持高度的自相似性,其倒易空间中分布着大量倒易矢量,因此通过高阶 Hilbert 分形可获得更小的倒易矢量。将较小的倒易矢量进行线性组合可实现较长波长的非线性频率转换。

此外,将 Hilbert 分形超晶格结构和 H 型分形结构的衍射图进行对比,结果如图 5 所示。图 5(a)为由波长为 532 nm 的绿光激光器照射 Hilbert 分形结构所产生的衍射图,图 5(b)为 H 型分形结构的衍射图。通过对比可以看到,虽然两个分形结构的豪斯多夫维数都是 2,但是 Hilbert 分形结构倒易空间中的衍射点分布具有密集和广泛的特征,这是

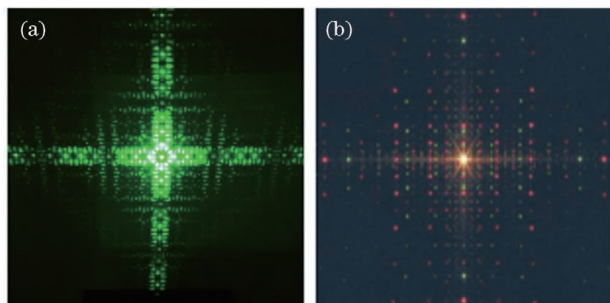


图 5 分形结构衍射实验图。(a)Hilbert 分形;  
(b)H 型分形<sup>[22]</sup>

Fig. 5 Experimental diagrams of fractal structure diffraction.

(a) Hilbert fractal; (b) H-fractal<sup>[22]</sup>

因为在正空间中,与 H 型分形结构相比,Hilbert 分形结构在水平和垂直方向上存在许多尺寸相同的长度单元,因此 Hilbert 分形结构具有较高的有序性,即具有更强的周期性。同时,在同阶次的情况下,Hilbert 分形结构的空空间填充率大于 H 型分形结构,因此 Hilbert 分形结构也具有较高复杂性。这将意味着 Hilbert 分形结构能够在相位匹配中提供丰富的倒易矢量,能够满足多波长高次谐波输出的要求。

接下来,将制备具有 Hilbert 分形结构的铌酸锂非线性光子晶体,实验测量和理论计算所制备铌酸锂非线性光子晶体的倍频转换效率。已有研究人员采用外加电场极化的方法成功极化了不同类型的铌酸锂非线性光子晶体,包括由圆形电极构成的周期和准周期超晶格结构,以及由条形电极构成的 H 型分形超晶格结构<sup>[29-31]</sup>。与 H 型分形结构非常相似,Hilbert 分形结构也是由若干条形结构组成的,因此极化 Hilbert 分形非线性光子晶体是完全可行的。具有 H 型分形超晶格结构的铌酸锂非线性光子晶体已经实现了 674,592,577,544,517,499 nm 波长的共线准相位匹配。尤其是对于 499 nm 的二次谐波,其归一化转换效率约为  $0.53\%/mW$ <sup>[29]</sup>。由于 Hilbert 分形与 H 型分形具有较高的相似度,Hilbert 分形结构的归一化转换效率与 H 型分形结构相当,甚至在优化极化反转占空比或者提高入射基频光功率的情况下,可进一步提高 Hilbert 分形结构的转换效率。综上所述,具有丰富倒易矢量的 Hilbert 分形结构的非线性光子晶体有望应用到多波段频率转换、光参量振荡器优化、宽带脉冲白光激光器设计、多周期太赫兹脉冲的实现和非线性光子晶体光场调控等方面。

## 4 结 论

设计并制备出二维 Hilbert 分形超晶格结构,并对其进行夫琅禾费衍射实验,实验结果与仿真计算结果基本吻合。在正空间中,由于 Hilbert 分形结构具有较强的有序性和复杂性,则在倒易空间中,倒易矢量分布丰富并且密集。经过计算,利用 Hilbert 分形超晶格结构可以产生波长为 543 nm、696 nm 和 900 nm 的二次谐波。此外,由于较小倒易矢量  $\frac{1}{2}\mathbf{G}_{1,0}$  的存在,经过线性组合后可实现波长为 632 nm 的二次谐波产生,甚至可实现近红外乃至中红外波段的有效输出。由此,Hilbert 分形超晶

格结构可补偿多波长的相位失配,有利于实现准连续波长的高次谐波输出及集成光电器件的研发。

### 参 考 文 献

- [1] Armstrong J A, Bloembergen N, Ducuing J, et al. Interactions between light waves in a nonlinear dielectric[J]. *Physical Review*, 1962, 127(6): 1918.
- [2] Yamada M, Nada N, Saitoh M, et al. First-order quasi-phase matched LiNbO<sub>3</sub> waveguide periodically poled by applying an external field for efficient blue second-harmonic generation [J]. *Applied Physics Letters*, 1993, 62(5): 435-436.
- [3] Feng J, Zhu Y Y, Ming N B. Harmonic generations in an optical Fibonacci superlattice [J]. *Physical Review B*, 1990, 41(9): 5578-5582.
- [4] Chen B Q, Ren M L, Liu R J, et al. Simultaneous broadband generation of second and third harmonics from chirped nonlinear photonic crystals[J]. *Light: Science & Applications*, 2014, 3(7): e189.
- [5] Chen B Q, Zhang C, Hu C Y, et al. High-efficiency broadband high-harmonic generation from a single quasi-phase-matching nonlinear crystal[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115(8): 083902.
- [6] Berger V. Nonlinear photonic crystals[J]. *Physical Review Letters*, 1998, 81(19): 4136-4139.
- [7] Wu T, Wong Y P, Wu Z H, et al. Application of free side edges to thickness shear bulk acoustic resonator on lithium niobate for suppression of transverse resonances[J]. *Japanese Journal of Applied Physics*, 2021, 60(SD): SDDC06.
- [8] Wu Z H, Wong Y P, Wu T, et al. Broadband piston mode operation of solidly mounted resonator employing A<sub>1</sub> lamb mode on lithium niobate [J]. *Japanese Journal of Applied Physics*, 2021, 60(SD): SDDC03.
- [9] Yuan S, Hu C R, Pan A, et al. Photonic devices based on thin-film lithium niobate on insulator [J]. *Journal of Semiconductors*, 2021, 42(4): 041304.
- [10] Choudhary K, Singh A, Singh A, et al. Implementation of highly optimized optical all logic gates on a single chip using Ti-diffused lithium-niobate for high-speed processing in combinational circuits [J]. *Microelectronics Journal*, 2021, 111: 105048.
- [11] Kadota M, Ishii Y, Tanaka S. Surface acoustic wave resonators with hetero acoustic layer (HAL) structure using lithium tantalate and quartz[J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2021, 68(5): 1955-1964.
- [12] Yan X, Liu Y, Ge L, et al. High optical damage threshold on-chip lithium tantalate microdisk resonator[J]. *Optics Letters*, 2020, 45(15): 4100-4103.
- [13] Lee D, Kim I, Lee K J. Study on a polarization-entangled photon-pair source based on niobium-doped potassium titanyl phosphate[J]. *Journal of the Korean Physical Society*, 2021, 78(9): 776-783.
- [14] Neufeld S, Bocchini A, Gerstmann U, et al. Potassium titanyl phosphate (KTP) quasiparticle energies and optical response[J]. *Journal of Physics: Materials*, 2019, 2(4): 045003.
- [15] Gu J H, Schweinsberg A, Vanderhoef L, et al. Random quasi-phase-matching in polycrystalline media and its effects on pulse coherence properties [J]. *Optics Express*, 2021, 29(5): 7479-7493.
- [16] Du J H, Song W, Zhang H J. Advances in three-dimensional quasi-phase matching[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2021, 48(12): 1208001. 杜金恒, 宋伟, 张怀金. 三维准相位匹配研究进展 [J]. *中国激光*, 2021, 48(12): 1208001.
- [17] Zhang Y T, Qu Q Z, Qian J, et al. Thermal effect analysis of 1560 nm laser frequency doubling in a PPLN crystal[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2015, 42(7): 0708002. 张远涛, 屈求智, 钱军, 等. PPLN 晶体 1560 nm 激光倍频过程的热效应分析 [J]. *中国激光*, 2015, 42(7): 0708002.
- [18] Zhang Y, Zeng Z N. Terahertz field modulated quasi-phase-matched high-order harmonic generation [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2020, 47(6): 0614001. 张轶, 曾志男. 太赫兹场调制准相位匹配高次谐波产生 [J]. *中国激光*, 2020, 47(6): 0614001.
- [19] Zhao R Z, Xu Y G, Lu R, et al. Second-harmonic generation of single-mode Laguerre-Gaussian beams with an improved quasi-phase-matching method [J]. *Optics Express*, 2020, 28(26): 39241-39249.
- [20] Savo R, Morandi A, Müller J S, et al. Broadband Mie driven random quasi-phase-matching[J]. *Nature Photonics*, 2020, 14(12): 740-747.
- [21] Szatkowski M, Masajada J, Augustyniak I, et al. Generation of composite vortex beams by independent Spatial Light Modulator pixel addressing[J]. *Optics Communications*, 2020, 463: 125341.
- [22] Ma W Q, Lu H M, Wang J P, et al. Vortex beam generation based on spatial light modulator and deep learning[J]. *Acta Optica Sinica*, 2021, 41(11): 1107001. 马文琪, 路慧敏, 王建萍, 等. 基于空间光调制器和深度学习的涡旋光束产生 [J]. *光学学报*, 2021, 41(11): 1107001.
- [23] Anderson M E, Serrano A, Stinson C, et al. Spatial

- manipulation of a supercontinuum beam for the study of vortex interference effects [J]. Applied Sciences, 2020, 10(6): 1966-2008.
- [24] Hearne J A, Tsvetkov P V. Power profile reconstruction and anomaly detection approach for FHRs using cerenkov radiation [J]. Nuclear Technology, 2020, 206(11): 1740-1750.
- [25] Wei D Z, Wang C W, Xu X Y, et al. Efficient nonlinear beam shaping in three-dimensional lithium niobate nonlinear photonic crystals [J]. Nature Communications, 2019, 10(1): 4193.
- [26] Hou B, Xu G, Wen W J, et al. Diffraction by an optical fractal grating [J]. Applied Physics Letters, 2004, 85(25): 6125-6127.
- [27] Mossoulina O A, Volotovskiy S G. Diffraction on random fractal structures [J]. Journal of Physics: Conference Series, 2018, 1038: 012092.
- [28] Ma B Q, Shi J H, Tian S H. Distribution of reciprocal vectors based on diffraction patterns of superlattice structures [J]. Acta Photonica Sinica, 2015, 44(5): 0506001.
- 马博琴, 史建华, 田少华. 基于超晶格结构衍射图的倒易矢量分布 [J]. 光子学报, 2015, 44(5): 0506001.
- [29] Ma B Q, Ren M L, Ma D L, et al. Multiple second-harmonic waves in a nonlinear photonic crystal with fractal structure [J]. Applied Physics B, 2013, 111(2): 183-187.
- [30] Ma B Q, Wang T, Ni P G, et al. High-order quasi-phase-matching harmonic generation in two-dimensional orthorhombic lattice [J]. Europhysics Letters (EPL), 2004, 68(6): 804-810.
- [31] Ma B Q, Wang T, Sheng Y, et al. Quasiphase matched harmonic generation in a two-dimensional octagonal photonic superlattice [J]. Applied Physics Letters, 2005, 87(25): 251103.

## Quasi-Phase-Matching Based on Hilbert Fractal Superlattice Structure

Lü Jiafu<sup>1</sup>, Ma Boqin<sup>1\*</sup>, Wang Xueying<sup>2</sup>

<sup>1</sup> School of Data Science and Intelligent Media, Communication University of China, Beijing 100024, China;

<sup>2</sup> School of Information and Communication Engineering, Communication University of China, Beijing 100024, China

### Abstract

**Objective** The quasi-phase-matching theory was first proposed to compensate for the phase mismatching caused by different refractive indices of the fundamental and harmonic waves in nonlinear photonic crystals. The team from Nanjing University introduced the one-dimensional Fibonacci quasi-periodic domain structure into the optical superlattice. As the order of the quasi-periodic structure is weaker than that of the periodic structure, the quasi-periodic domain structure, especially that with the fractal structure, has richer Fourier components. Therefore, more extensive reciprocal vectors are in the reciprocal space. Recently, researchers have been exploring and designing more excellent optical superlattice structures to meet the increasing application requirements for superlattice materials. However, owing to its low Hausdorff dimension, the corresponding nonlinear frequency conversion efficiency is not attained in existing fractal superlattice structures, such as the Cantor set and Koch curve. In this paper, we propose the design and preparation of the Hilbert fractal superlattice structure, apply to the experiment of nonlinear optical high-order harmonic generation. Results from the novel fractal structure experimental methods and research findings can be helpful to the phase matching of multiple wavelengths and high-order harmonic output of quasi-continuous wavelengths.

**Methods** Using the characteristics of a fractal, we illustrated that the fractal structure was obtained by broadening the fractal curve into a stripe structure. Further, we showed that the Hilbert fractal structure was a two-dimensional space-filling curve. Then, taking third-order Hilbert fractal structure as an example, we used an iterative method to deduce the design method of the  $n$ -order Hilbert fractal structure. Furthermore, the fractal dimension of the Hilbert fractal structure was obtained by calculating the Hausdorff dimension. Moreover, the derivation proves that the reciprocal space of the structure provides rich reciprocal vectors. Next, using the local layout analysis of the real space of the Hilbert fractal structure, we evaluated the influence of the increase of the fractal order on the reciprocal vector in the reciprocal space. Additionally, we obtained the reciprocal vectors of the Hilbert fractal structure from the distribution of the periodic structures reciprocal vector by proportional calculation. Using the momentum

conservation and Sellmeier formula of lithium niobite crystals, we obtained the second harmonics generated by the Hilbert fractal superlattice structure.

**Results and Discussions** A two-dimensional Hilbert fractal superlattice structure was designed. We performed the diffraction experiment for two-dimensional periodic superlattices. Furthermore, the Hilbert fractal structure and diffraction simulation were performed under the same conditions using lasers with wavelengths of 532 and 632 nm, respectively. From the diffraction pattern, the spots in the reciprocal space of the Hilbert fractal superlattice structure are equidistantly distributed on the horizontal and vertical axes. Results show that the brightness gradually decreases with an increase in the distance from the spot to the center. Also, the dark fringes in the Hilbert fractal diffraction experiment diagrams (Fig. 4) were owing to the change in the diffraction angle, making the ratio of the light intensity between this point and the center point attain its minimum. Thus, from the reciprocal vector distribution of the fractal structure, the Hilbert fractal superlattice structure can be achieved using collinear quasi-phase-matching for 543, 632, 696, and 900 nm wavelengths, respectively. The comparative analysis with H-shaped fractal (Fig. 5) proves that the Hilbert fractal structure has a stronger order and complexity, and can provide richer and denser reciprocal vectors. The normalized conversion frequency of Hilbert fractal structure, composed of several strip-shaped structures, was compared to that of the H-shaped fractal. Results show that the conversion efficiency can be further improved through optimizing the poled reversal duty ratio or increasing the incident fundamental frequency optical power.

**Conclusions** In this paper, two-dimensional periodic and Hilbert fractal superlattices were manufactured, and their Fraunhofer diffraction experiments were performed using lasers with wavelengths of 532 and 633 nm, respectively. The experimental results agree well with simulation calculations. Owing to the stronger order and complexity of the Hilbert fractal structure, the distribution of reciprocal vectors is rich in reciprocal space. Furthermore, the second harmonics at wavelengths of 543, 696, and 900 nm were achieved in the lithium niobite of the Hilbert fractal superlattice structure using theoretical calculations. Additionally, owing to small reciprocal vectors, the second harmonic with a wavelength of 632 nm was generated after linear combinations, thereby obtaining the effective output in the near-infrared and mid-infrared bands. Therefore, Hilbert fractal nonlinear photonic crystals with rich reciprocal vectors are expected to be used in multiband frequency conversion, optical parametric oscillator optimization, broadband pulsed white laser design, realization of multi-period terahertz pulses, and nonlinear photonic crystal light field modulation.

**Key words** nonlinear optics; reciprocal vector; Hilbert fractal; quasi-phase-matching; optical superlattice