

恒定热流辐照生物组织传热的合理非傅里叶边界条件的确定

许光映, 王晋宝*, 薛大文

浙江海洋大学船舶与海运学院, 浙江 舟山 316002

摘要 在对活体生物组织有强吸收的激光辐射热疗领域, 理论研究对理解治疗过程具有不可替代的作用。由于激光源的激发时间相对于组织平衡时间非常短, 因此非傅里叶模型在理论研究中越来越重要。目前, 恒定热流被认为是一个独立于时间的物理量, 根据该物理量得到的结论与现有文献中的实验结果不一致。本文基于恒定热流随时间的变化, 建立了修正的非傅里叶边界条件, 并应用积分变换方法获得解析解。与文献中已有的结果相比, 当前修正模型得到的温升和温度分布曲线与文献中的实验结果一致。本文认为基于时间无关的非傅里叶边界条件是不符合热平衡的。进一步, 在修正的非傅里叶边界条件下, 本文讨论了单相滞后模型 (SPLM) 和两相滞后模型 (DPLM) 的不同传热机理及其与现有描述的不同。

关键词 医用光学; 生物传热; 激光热疗; 非傅里叶边界条件; 热波

中图分类号 TK124

文献标志码 A

DOI: 10.3788/CJL202249.1507404

1 引言

随着激光医学、磁疗和微波技术的发展^[1-2], 基于细胞对温度的敏感性和适应性, 研究人员提出了各种热疗技术。热疗的成功取决于精确预测和控制组织中的温度、损伤和应力分布。到目前为止, 求解解析解和建立数值模型已被证明是精确预测组织热行为的有效方法。时域解析解的研究不仅可以验证数值模型的结果, 还可以为正确实施技术方案提供理论指导。因此, 研究人员建立了各种数学模型, 包括整数阶和分数阶微分方程, 并得到了相应的解^[3-14]。通常, 这些数学模型(也称为生物传热模型)可分为傅里叶模型和非傅里叶模型。

1948年, Pennes^[3]首次建立了基于傅里叶导热定律的生物传热模型, 他通过引入血液灌注项(作为输入热源)给出了能量守恒方程

$$\rho_t c_t \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (q) + \omega_a \rho_a c_a (T_a - T) + q_m + q_r, \quad (1)$$

式中: ω_a 为动脉血液灌注率; ρ_t 、 c_t 分别为组织的密度和比热容; ρ_a 、 c_a 分别为动脉血的密度和比热容; T_a 、 T 分别为血液和组织的温度; q_m 、 q_r 分别为代谢热和内部热源; t 为时间。傅里叶定律的表达式为

$$q(\mathbf{r}, t) = -k \nabla T(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

式中: $q(\mathbf{r}, t)$ 为热流量; k 为热导率; $\nabla T(\mathbf{r}, t)$ 为温度

梯度; \mathbf{r} 为坐标矢量。将式(2)与式(1)合并, 可以得到下文式(8)所示的一维 Pennes 生物传热模型(PBM)。

然而, 在快速加热过程中, 活体组织中可能存在着非傅里叶传热机理。包括整数阶和分数阶模型^[4-7]在内的许多非傅里叶生物传热模型已经被提出, 其中, 一种典型的模型是将式(1)所示的能量方程与式(3)所示的单相滞后(SPL)方程合并后获得的一维单相滞后模型(SPLM)^[9-10], 如式(9)所示。

$$-k \nabla T(\mathbf{r}, t) = q(\mathbf{r}, t) + \tau_q \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (3)$$

式中: $\tau_q = \alpha / C_t^2$ 为热弛豫时间, 其中 α 是热扩散率, C_t 是热波在介质中的速度。大多数活体生物组织包含细胞、上部结构、液体和固体组织, 这些生物材料都是非均匀的, 它们的热弛豫时间比工程材料大得多。生物材料和组织在低温下的热弛豫时间为 10~100 s, 在室温下的热弛豫时间为 1~100 s^[6]; 肉类产品的热弛豫时间为 20~30 s^[13-14]; 加工肉的热弛豫时间约为 15.5 s^[12]。

此外, 将式(1)与式(4)所示的双相滞后(DPL)方程^[7-8]合并可以获得双相滞后模型(DPLM), 如式(10)所示。

$$\text{DPL equation: } -k \left[1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t} \right] \nabla T = q(\mathbf{r}, t) + \tau_q \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (4)$$

收稿日期: 2021-10-25; 修回日期: 2021-11-28; 录用日期: 2021-12-22

基金项目: 浙江省自然科学基金(Q18E09007)、舟山市科技基金(2017C41002, 2016C41009)

通信作者: *jinbaow@zjou.edu.cn

式中： τ_q 和 τ_T 被解释为双相滞后时间参数，它们分别考虑的是“热惯性”和“微观结构相互作用”的影响。将 Mitra 等^[12] 的实验数据与不含血液灌注项的 DPLM 的预测数据进行拟合，可以发现：在实验 I 中， $\tau_q = 16$ s， $\tau_T = 0.043$ s；在实验 III 中， $\tau_q = 14$ s， $\tau_T = 0.056$ s。

在过去 10 年中，研究人员对 PBM、SPLM 和 DPLM 进行了比较和分析。文献[15-19]对非傅里叶生物传热模型的研究主要集中在合理的控制方程上，而合理的边界条件大多被忽略，从而导致控制方程与边界条件之间存在一些不相容的问题。在文献[15-19]中，对快速加热生物组织建立的控制方程为非傅里叶传热方程，而边界条件为傅里叶型条件。文献[20]针对二维问题在第三类边界条件下的瞬态问题进行了研究。文献[15-21]给出的定解问题数学模型中的热传导方程包含非傅里叶传热物理机理，但边界

条件还是傅里叶传热机理，不适合描述同时存在于生物组织和边界上的非傅里叶传热物理现象。文献[15-21]所提模型得到的温度变化均存在这样的理论结果：任意位置处温度的变化均存在延迟，且温度的变化速率均小于傅里叶型传热模型得到的温度的变化速率，任意时刻的温度也低于傅里叶型传热模型得到的温度。正确应用非傅里叶边界条件会导致表面温度跳变，同时，热波特性的也会导致内部温度变化延迟和快速上升，这些非傅里叶传热特征是微观非平衡传热所特有的，在文献[22-25]中亦有详细描述。

进一步，在文献[26-27]中，研究人员认识到非傅里叶热流边界条件对温度分布的影响；但是，由于恒定热流边界条件的不正确应用，传热的非傅里叶特性没有表现出来。在文献[26-27]中，皮肤组织承受恒定热流的 SPLM 和 DPLM 的非傅里叶边界条件分别为

$$\text{SPLM boundary condition: } q(0, t) = -k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x}, \quad x = 0, t > 0, \quad (5a)$$

$$\text{DPLM boundary condition: } q(0, t) = -k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} - k\tau_T \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} \right], \quad x = 0, t > 0, \quad (5b)$$

式中： $q(0, t)$ 为表面热通量； T 为皮肤组织温度； k 为皮肤组织的热导率； x 和 t 分别为空间坐标和时间坐标。值得注意的是，激光源是组织瞬态温度发生变化的激发源，因此 $q(0, t)$ 应视为时间相关常数。也就是说， $\partial q(0, t) / \partial t \neq 0$ 。因此，式(5a)和式(5b)所示的边界条件应被修正为

$$\text{SPLM boundary condition: } q(0, t) + \tau_q \frac{\partial q(0, t)}{\partial t} = -k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x}, \quad x = 0, t > 0, \quad (6a)$$

$$\text{DPLM boundary condition: } q(0, t) + \tau_q \frac{\partial q(0, t)}{\partial t} = -k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} - k\tau_T \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} \right], \quad x = 0, t > 0, \quad (6b)$$

激光源的辐射能量只有在其启动后才保持恒定，故 $q(0, t)$ 可以表示为

$$q(x, t) = q_0 U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ q_0, & t \geq 0 \end{cases}, \quad (7)$$

式中： $U(t)$ 是单位阶跃函数； q_0 为定值热流强度。

本文基于修正的边界条件方程，建立了一维生物活体组织的非傅里叶热传导方程的数学模型，并用积分变换法得到了该模型的解析解，分析了与文献[26-27]中所提机理不同的传热机理。同时，本文明确提出了在恒定热流下应采用正确形式的非傅里叶边界条件，且非傅里叶边界条件仅适用于非傅里叶生物热传导方程，而傅里叶边界条件仅适用于 Pennes 生物热传导方程。

2 数学模型

对于图 1 所示的厚度 L 恒定的生物组织，其左侧受恒定热流 q_0 的辐照，本文给出了描述其内部传热的三种生物传热模型，即 Pennes 生物传热模型(PBM)、SPLM 和 DPLM。

$$\text{PBM: } \rho_t c_t \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_a c_a \omega_a (T - T_a) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_m, \quad (8)$$

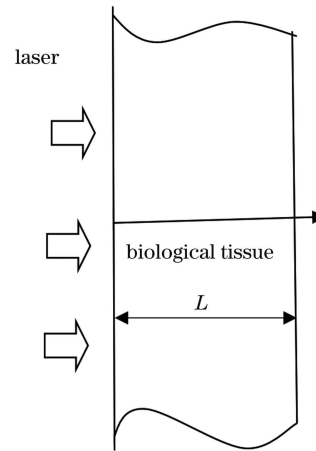


图 1 恒定热流条件下厚度为 L 的生物组织

Fig. 1 Biological tissue with L thickness subjected to constant heat flux

$$\text{SPLM: } \tau_q \rho_t c_t \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + (\rho_t c_t + \tau_q \omega_a \rho_a c_a) \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_a c_a \omega_a (T - T_a) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_m, \quad (9)$$

$$\text{DPLM: } \tau_q \rho_t c_t \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + (\rho_t c_t + \tau_q \omega_a \rho_a c_a) \frac{\partial T}{\partial t} +$$

$$\rho_a c_a \omega_a (T - T_a) = k \left(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_m, \quad (10)$$

需要指出的是,式(9)在 $\tau_q = 0$ 的情况下可以简化

为式(8),式(10)在 $\tau_T = 0$ 的情况下可以简化为式(9)。

结合式(7)所示的激光热源,对应于上述三个模型的恒定热流下皮肤组织的边界条件可分别表示为

$$\text{PBM boundary condition: } q_0 U(t) = -k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}, \quad x = 0, t > 0, \quad (11)$$

$$\text{SPLM boundary condition: } q_0 [U(t) + \tau_q \delta(t)] = -k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}, \quad x = 0, t > 0, \quad (12)$$

$$\text{DPLM boundary condition: } q_0 [U(t) + \tau_q \delta(t)] = -k \left[\frac{\partial T}{\partial x} + \tau_T \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x} \right], \quad x = 0, t > 0, \quad (13)$$

式中: $U(t)$ 为单位阶跃函数; $\delta(t)$ 为狄拉克脉冲函数。

在 $x = L$ 处,隔热边界条件可以写成

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (x = L, t > 0), \quad (14)$$

初始条件可以写成

$$T = T_a, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (0 < x < L, t = 0). \quad (15)$$

显然,式(8)、(11)、(14)、(15)构成了生物传热问题的 PBM 数学模型,式(9)、(12)、(14)、(15)构成了生物传热问题的 SPLM 数学模型,式(10)、(13)、(14)、(15)构成了生物传热问题的 DPLM 数学模型。

3 理论解

为求解方便,引入以下无量纲变量:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{at}{L^2}, \quad T^* = \frac{k(T - T_a)}{q_0 L}, \quad q_{\text{met}}^* = \frac{q_{\text{met}} L}{q_0}, \quad (16a)$$

$$(\tau_T, \tau_q)^* = \frac{a}{L^2} (\tau_T, \tau_q), \quad \omega_a^* = \omega_a \frac{L^2}{a}, \quad (16b)$$

其中 a 为热导率, q_{met} 为新陈代谢热源。

3.1 非傅里叶边界条件的 SPLM 和 DPLM 的解

根据式(16),可以得到省略上标星号后的式(9)和式(10)的无量纲形式,即

$$\tau_q \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + (\tau_q \omega_a \beta + 1) \frac{\partial T}{\partial t} + \omega_a \beta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_m, \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} \tau_q \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + (\tau_q \omega_a \beta + 1) \frac{\partial T}{\partial t} + \omega_a \beta T = \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \tau_T \frac{\partial^3 T}{\partial t \partial x^2} + q_m, \end{aligned} \quad (17b)$$

式中: $\beta = \frac{\rho_b c_b}{\rho_a c_a}$ 。

式(12)~(14)所示的边界条件的无量纲形式可以写成

$$\text{SPLM boundary condition: } U(t) + \tau_q \delta(t) = -\frac{\partial T}{\partial x}, \quad x = 0, t > 0, \quad (18)$$

$$\text{DPLM boundary condition: } U(t) + \tau_q \delta(t) = -\frac{\partial T}{\partial x} - \tau_T \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t}, \quad x = 0, t > 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = 1, t > 0. \quad (20)$$

式(15)所示的初始条件的无量纲化可以表示为

$$T = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < 1, t = 0. \quad (21)$$

运用有限余弦傅里叶积分变换求解式(17a)和式(17b),最终解表示为

$$T(x, t) = \theta_0(t) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n(t) \cos(n\pi x), \quad (22)$$

式中: $\theta_n(t) = \int_0^1 T(x, t) \cos(n\pi x) dx, n = 0, 1, 2, \dots$ 。

对于 DPLM,

$$\theta_0(t) = \frac{2(1 + q_{\text{met}})}{\varepsilon_0} \left\{ \tau_q \exp\left(-\frac{1 + \beta \tau_q \omega_a}{2\tau_q} t\right) \sin\left(\frac{\varepsilon_0}{2\tau_q} t\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{1 + \beta \tau_q \omega_a}{2\tau_q} \xi\right) \sin\left(\frac{\varepsilon_0}{2\tau_q} \xi\right) d\xi \right\}, \quad (23)$$

式中: $\varepsilon_0 = \sqrt{4\tau_q(1 + \omega_a \beta) - (1 + \omega_a \beta \tau_q)^2}$; ξ 为积分变量。如果 $(1 + \beta \omega_a \tau_q + n^2 \pi^2 \tau_T)^2 > 4\tau_q(n^2 \pi^2 + \omega_a \beta)$, 则

$$\theta_n(t) = \frac{2}{\varepsilon_1} \left\{ \tau_q \exp\left(-\frac{1 + \beta \tau_q \omega_a + n^2 \pi^2 \tau_T}{2\tau_q} t\right) \sinh\left(\frac{\varepsilon_1}{2\tau_q} t\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{1 + \beta \tau_q \omega_a + n^2 \pi^2 \tau_T}{2\tau_q} \xi\right) \sinh\left(\frac{\varepsilon_1}{2\tau_q} \xi\right) d\xi \right\}, \quad (24a)$$

其中 $\varepsilon_1 = \sqrt{(1 + \omega_a \beta \tau_q + n^2 \pi^2 \tau_T)^2 - 4\tau_q(1 + n^2 \pi^2 + \omega_a \beta)}$; 如果 $(1 + \beta \omega_a \tau_q + n^2 \pi^2 \tau_T)^2 < 4\tau_q(n^2 \pi^2 + \omega_a \beta)$, 则

$$\theta_n(t) = \frac{2}{\epsilon_2} \left\{ \tau_q \exp\left(-\frac{1 + \beta\tau_q\omega_a + n^2\pi^2\tau_T}{2\tau_q}t\right) \sin\left(\frac{\epsilon_2}{2\tau_q}t\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{1 + \beta\tau_q\omega_a + n^2\pi^2\tau_T}{2\tau_q}\xi\right) \sin\left(\frac{\epsilon_2}{2\tau_q}\xi\right) d\xi \right\}, \quad (24b)$$

其中 $\epsilon_2 = \sqrt{4\tau_q(1 + n^2\pi^2 + \omega_a\beta) - (1 + \omega_a\beta\tau_q + n^2\pi^2\tau_T)^2}$ 。

如果将上述常热流条件处理成与时间无关的边界条件,即形成文献[26-27]给出的不合理的非傅里叶边界条件,即

$$\text{SPLM boundary condition: } U(t) = -\frac{\partial T}{\partial x}, \quad x = 0, \quad t > 0, \quad (25)$$

$$\text{DPLM boundary condition: } U(t) = -\frac{\partial T}{\partial x} - \tau_T \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t}, \quad x = 0, \quad t > 0, \quad (26)$$

那么,对于 DPLM 模型,

$$\theta_0(t) = \frac{2(1 + q_{\text{met}})}{\epsilon_3} \cdot \int_0^t \exp\left(-\frac{1 + \beta\tau_q\omega_a\xi}{2\tau_q}\right) \sin\left(\frac{\epsilon_0}{2\tau_q}\xi\right) d\xi, \quad (27)$$

其中 $\epsilon_3 = \sqrt{(1 + \tau_q\omega_a\beta)^2 + 2(\tau_q - 1)}$, 当 $(1 + \beta\omega_a\tau_q + n^2\pi^2\tau_T)^2 > 4\tau_q(n^2\pi^2 + \omega_a\beta)$ 时,

$$\theta_n(t) = \frac{2}{\epsilon_1} \int_0^t \exp\left(-\frac{1 + \beta\tau_q\omega_a + n^2\pi^2\tau_T}{2\tau_q}\xi\right) \cdot \sinh\left(\frac{\epsilon_1}{2\tau_q}\xi\right) d\xi; \quad (28a)$$

当 $(1 + \beta\omega_a\tau_q + n^2\pi^2\tau_T)^2 < 4\tau_q(n^2\pi^2 + \omega_a\beta)$ 时,

$$\theta_n(t) = \frac{2}{\epsilon_2} \int_0^t \exp\left(-\frac{1 + \beta\tau_q\omega_a + n^2\pi^2\tau_T}{2\tau_q}\xi\right) \cdot \sin\left(\frac{\epsilon_2}{2\tau_q}\xi\right) d\xi. \quad (28b)$$

对于 DPLM 模型,令式(22)~(24)和式(27)~(28)中的 $\tau_T = 0$,就可以获得 SPLM 模型的理论解。

3.2 傅里叶边界条件下 SPLM 和 DPLM 的解

式(11)的无量纲边界条件为

$$U(t) = -\frac{\partial T}{\partial x}, \quad x = 0, \quad t > 0, \quad (29)$$

初始条件同式(21)。

对于 DPLM 模型,

$$\theta_0(t) = \frac{2(1 + q_{\text{met}})}{\epsilon_0} \left\{ \tau_T \exp\left(-\frac{1 + \beta\tau_q\omega_a}{2\tau_q}t\right) \sin\left(\frac{\epsilon_0}{2\tau_q}t\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{1 + \beta\tau_q\omega_a\xi}{2\tau_q}\right) \sin\left(\frac{\epsilon_0}{2\tau_q}\xi\right) d\xi \right\}, \quad (30)$$

当 $(1 + \beta\omega_a\tau_q + n^2\pi^2\tau_T)^2 > 4\tau_q(n^2\pi^2 + \omega_a\beta)$ 时,

$$\theta_n(t) = \frac{2}{\epsilon_1} \left\{ \tau_T \exp\left(-\frac{1 + \beta\tau_q\omega_a + n^2\pi^2\tau_T}{2\tau_q}t\right) \sinh\left(\frac{\epsilon_1}{2\tau_q}t\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{1 + \beta\tau_q\omega_a + n^2\pi^2\tau_T}{2\tau_q}\xi\right) \sinh\left(\frac{\epsilon_1}{2\tau_q}\xi\right) d\xi \right\}; \quad (31a)$$

当 $(1 + \beta\omega_a\tau_q + n^2\pi^2\tau_T)^2 < 4\tau_q(n^2\pi^2 + \omega_a\beta)$ 时,

$$\theta_n(t) = \frac{2}{\epsilon_2} \left\{ \tau_T \exp\left(-\frac{1 + \beta\tau_q\omega_a + n^2\pi^2\tau_T}{2\tau_q}t\right) \sin\left(\frac{\epsilon_2}{2\tau_q}t\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{1 + \beta\tau_q\omega_a + n^2\pi^2\tau_T}{2\tau_q}\xi\right) \sin\left(\frac{\epsilon_2}{2\tau_q}\xi\right) d\xi \right\}. \quad (31b)$$

令式(30)、(31)中的 $\tau_T = 0$,相应地可以得到傅里叶边界条件下 SPLM 模型的解。

3.3 PBM 模型的解

令式(17a)中的 $\tau_q = 0$,可以获得 PBM 控制方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} + W_b\beta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_m, \quad (32)$$

式中: W_b 为动脉血血流灌注量。边界条件为

$$U(t) = -\frac{\partial T}{\partial x}, \quad x = 0, \quad t > 0, \quad (33a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = 1, \quad t > 0. \quad (33b)$$

初始条件为

$$T = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t = 0. \quad (34)$$

PBM 模型的理论解也可以表述为式(22),其中

$$\theta_0(t) = \frac{1 + q_{\text{met}}}{\beta W_b} \frac{1 - \exp(-\beta W_b t)}{n^2\pi^2 + \beta W_b},$$

$$\theta_n(t) = \frac{1 - \exp[-(n^2\pi^2 + \beta W_b)t]}{n^2\pi^2 + \beta W_b}. \quad (35)$$

4 结果和讨论

为了清楚地显示不同非傅里叶边界条件引起的不同传热机理,图 2~11 对不同边界条件的结果进行了比较和分析。皮肤和血液的热物理参数如表 1 所示。

表 1 皮肤和血液的热物理参数^[26]

Parameter	Unit	Value
Density	kg·m ⁻³	1000 (skin)
		1060 (blood)
Specific heat	J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹	4187 (skin)
		3860 (blood)
Thermal conductivity of skin	W·m ⁻¹ ·K ⁻¹	0.628
Skin thickness	m	0.006
Metabolic heat generation	W·m ⁻³	368.1

从非平衡传热来衡量,PBM 表示无限热传输速度,SPLM 表示有限热波速度,DPLM 表示介于 PBM 和 SPLM 之间的热信号速度^[22]。从物理意义上看, τ_q 和 τ_T 是表征非平衡传热过程的两个参数。 $\tau_q = 0$ 和 $\tau_T = 0$ 对应的是平衡态传热,即 PBM,表明能量传输是瞬时

的,热过程具有无限热传播速度; $\tau_q > 0$ 和 $\tau_T = 0$ 对应的是 SPLM,表示有限时间内的能量传输; $\tau_q > 0$ 和 $\tau_T > 0$ 对应 DPLM,表明能量传输需要考虑微观时空和空间尺度效应。组织的局部温度取决于微观传热机理。从热传播速度角度来讲,PBM 的热传播速度最快,DPLM ($\tau_q > \tau_T$)次之,SPLM 最慢;从响应温度幅值看,速度与温度幅度成反比,具有热流延迟时间的 SPLM 的温度高于 PBM 和 DPLM($\tau_q > \tau_T$)的温度^[28]。

4.1 恒定热流边界条件对平面温度的影响

图 2 给出了对应于 PBM、SPLM 和 DPLM 的不同温度分布。SPLM 的延迟时间取值为: $\tau_q = 20$ s。DPLM 的延迟时间取值为: $\tau_q = 20$ s, $\tau_T = 10$ s。图 2(a) 中 SPLM 和 DPLM 的非傅里叶边界条件对应式(25)、(26),图 2(b)中 SPLM 和 DPLM 的非傅里叶边界条件对应式(18)、(19)。图 2(a)中具有无限热传播速度的 PBM 预测的温度最高,热传播速度最慢的 SPLM 预测的温度低于具有傅里叶边界条件的 PBM 和 DPLM 预测的温度。由能量的积累守恒可知,传热越快,能量在局部积聚得越少,从而导致温度降低。因此,具有无限热传播速度的 PBM 的近表面温度最低,

而具有最慢热传播速度的 SPLM 的近表面温度最高。很明显,图 2(a)中 SPLM 的温度分布不合理,这是由应用于 SPLM 的式(25)、(26)所示的非傅里叶边界条件不正确导致的。此外,采用傅里叶边界条件的 DPLM 的温度分布也不合理,因为它低于 PBM 的温度。此外,由于延迟效应,非傅里叶边界条件的 DPLM 对应的温度应高于傅里叶边界条件的 DPLM 对应的温度,然而,图 2(a)则显示了相反的结果,这主要是因为式(25)、(26)所示的非傅里叶边界条件不正确。图 2(b)显示了三种模型的温度分布,在近表面位置处,SPLM 预测了最高的温度和最短的传播距离,说明热传播速度最慢。热传播速度最快的 PBM 的温度应该最低,但图 2(b)中傅里叶边界条件的 DPLM 的热传播速度却还低于 PBM,显然这是不正确的。因为 DPLM($\tau_q > \tau_T$)的热传播速度处于 PBM 和 SPLM 之间,温度幅值也位于其间。

可见,与图 2(a)相比,图 2(b)用式(18)、(19)所示的非傅里叶边界条件预测的 SPLM 和 DPLM 的温度分布是合理的,图 2(b)所示的温度分布规律也与文献[25,29]的结果一致。

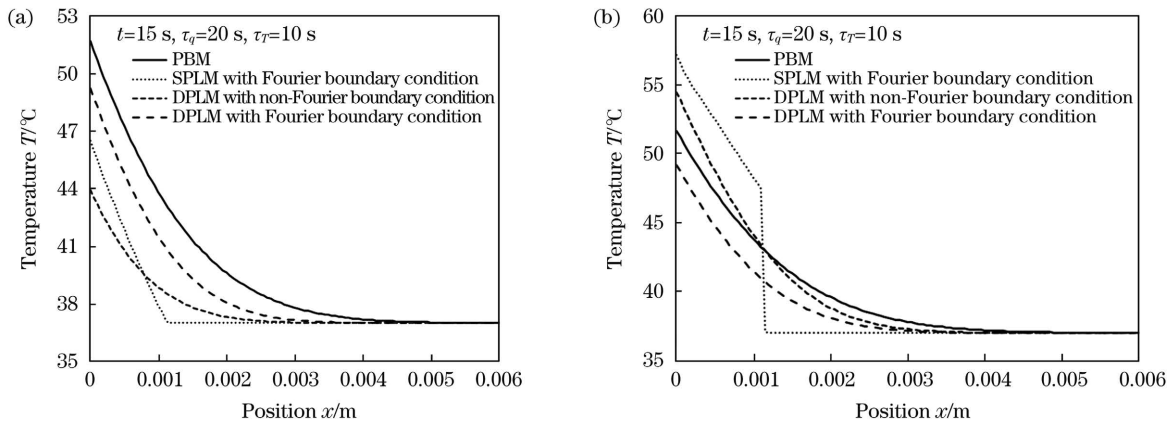


图 2 不同模型不同边界条件对应的温度分布。(a)式(25)、(26)所示的非傅里叶边界条件;(b)式(18)、(19)所示的非傅里叶边界条件

Fig. 2 Temperature distributions of different models with different boundary conditions. (a) Non-Fourier boundary condition expressed by equations (25) and (26); (b) non-Fourier boundary condition expressed by equations (18) and (19)

图 3 给出了 $x = 0.2$ mm 处,PBM、SPLM 和 DPLM 对热流进行不同的处理时对应的温度变化。可以发现:当热波到达 $x = 0.2$ mm 处时,非傅里叶边界条件的 SPLM 显示出温度的突然变化。这与文献[30]给出的实验结果一致,这归因于边界条件式(18)中的 $\tau_q \delta(t)$ 项,该项表示施加瞬态热流引起的冲击特征。这一项在边界条件公式(25)中是没有的。此外,观察图 3 还可以发现具有非傅里叶边界条件的 DPLM 的温度变化介于 PBM 和 SPLM 之间,这与文献[31]的结果一致。显然,采用傅里叶边界条件的 DPLM 得到的温度变化不合理,其温度低于 PBM 的温度。

4.2 恒定热流边界条件的不同时空对温度场的影响

上述讨论的是时间相关热流和时间无关热流引起的不同的温度场时空分布及其合理性。显然,在瞬态

问题中,恒定热流仍然是时间相关的。以下是关于时空二维热传导以及由不同非傅里叶边界条件引起的不同的传热机理。

图 4 显示了 PBM 的二维时空温度场,图 5 显示了 SPLM 的二维时空温度场比较。图 5(a)和图 5(b)显示的温度变化的共同特征是,除表面外,任何地方的温度升高都会延迟;不同之处在于,图 5(a)中温度发生变化的特征是突然升高,而图 5(b)中的温度则是从零开始缓慢升高。图 5(a)中 SPLM 的升温速率和幅值高于图 4 中 PBM 的升温速率和幅值,而图 5(b)中的升温速率和幅值则低于图 4 中 PBM 的升温速率和幅值。图 5(a)给出的温度特征与文献[26]中的热冲击温度特征一致,但与 PBM 温度响应特征有显著区别;与图 4 中的时空温度场相比,图 5(b)中的温度变化特

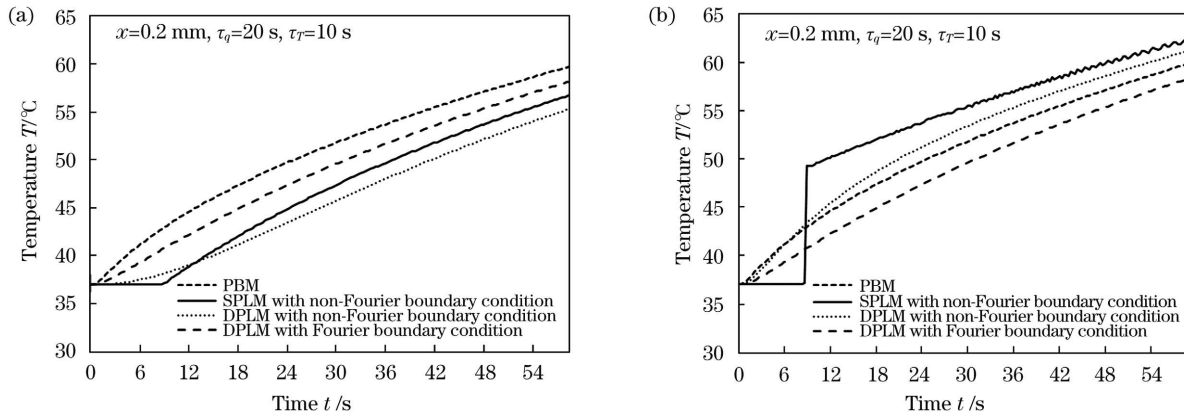


图 3 比较 $x=0.2\text{ mm}$ 处不同模型的温度变化。(a)基于式(25)、(26)所示边界条件的结果;(b)基于式(18)、(19)所示边界条件的结果

Fig. 3 Comparison of temperature variations at $x=0.2\text{ mm}$ for different models. (a) Results based on boundary condition expressed by equations (25) and (26); (b) results based on boundary condition expressed by equations (18) and (19)

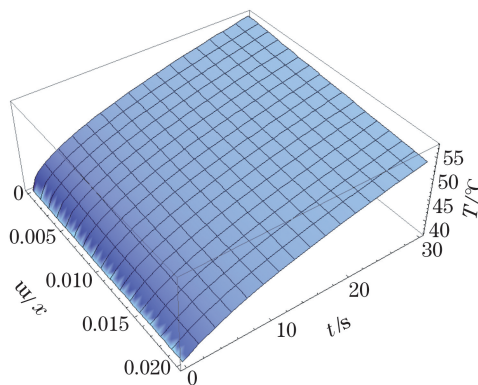


图 4 PBM 对应的时空温度场

Fig. 4 Space-time temperature field for PBM

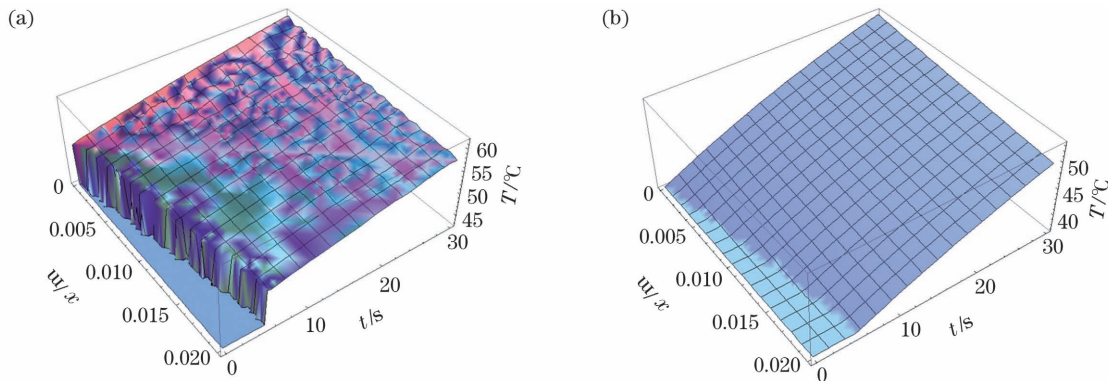


图 5 $\tau_q=20\text{ s}$ 时 SPLM 在不同边界条件下的温度场。(a)改进非傅里叶边界条件;(b)傅里叶边界条件

Fig. 5 Temperature fields of SPLM with $\tau_q=20\text{ s}$ for different boundary conditions. (a) Modified non-Fourier boundary condition; (b) Fourier boundary condition

征是升温幅值低、温度波传播慢,这一特征本身就是自相矛盾的(温度波传播慢时,升温幅值应该高)。

图 6 显示了不同边界条件下 DPLM 的时空三维温度场。图 6(a)是本文建议的非傅里叶边界条件下的时空温度场,即式(18)、(19)所给边界条件下的温度场,图 6(b)是傅里叶边界条件下的时空温度场。与图 6(b)相比,图 6(a)中 DPLM 的升温速率和幅值更高。这是恒定热流的不同处理造成的。

图 7 是基于式(25)、(26)所示的非傅里叶边界条件下的解绘制的时空三维温度场,其中图 7(a)是 DPLM 在现有非傅里叶边界条件下的时空三维温度场,图 7(b)是 SPLM 在现有非傅里叶边界条件下的时空三维温度场。图 7(a)中的升温幅值低于图 7(b)中的升温幅值,且升温速率和幅值均明显低于图 5(a)、图 6(a)中的相应值,其所展示的特征与文献[12]、[29]实验结果具有明显差异。

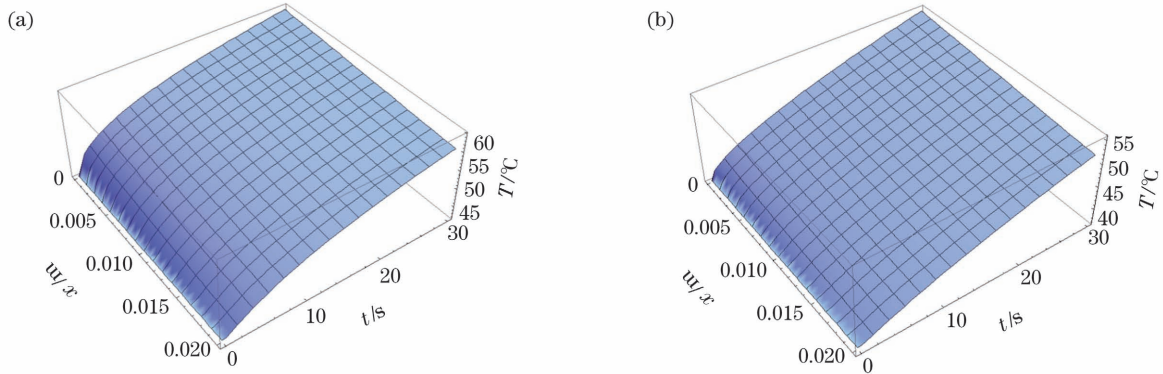


图 6 $\tau_q=20$ s 和 $\tau_T=10$ s 时, DPLM 在不同边界条件下的时空三维温度场。(a) 改进非傅里叶边界条件; (b) 傅里叶边界条件
Fig. 6 Temperature fields of DPLM with $\tau_q=20$ s and $\tau_T=10$ s for different boundary conditions. (a) Modified non-Fourier boundary condition; (b) Fourier boundary condition

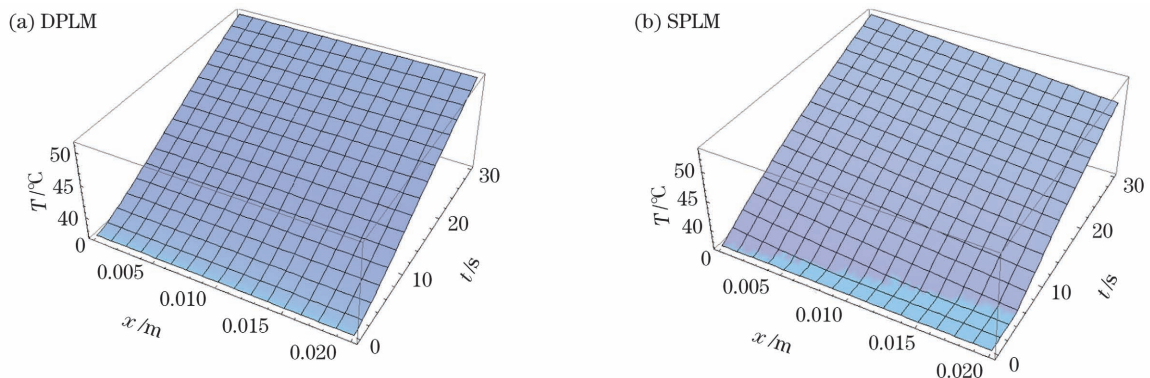


图 7 $\tau_q=20$ s 和 $\tau_T=10$ s 时, DPLM 和 SPLM 在现有非傅里叶边界条件下的时空三维温度场。(a) DPLM; (b) SPLM
Fig. 7 Temperature fields in three-dimensional space-time for DPLM and SPLM under non-Fourier boundary condition when $\tau_q=20$ s and $\tau_T=10$ s. (a) DPLM; (b) SPLM

4.3 延迟时间对温度场的影响

上面主要讨论了非傅里叶边界条件对传热机理的影响, 接下来讨论参数变化对传热机理的影响。

图 8 显示了不同非傅里叶边界条件下 SPLM 的温度分布, 可以发现, 图 8 中 $\tau_q=0$ s 的结果与 PBM 的结果相同。在图 8(a) 中, $\tau_q=0$ s 时的热传播速度最快, 对应的升温幅值最大, 而 $\tau_q=40$ s 时的热传播速

度最慢, 升温幅值最小, 这显然是不合理的, 这都是式(25)所示的边界条件引起的。在图 8(b) 中, 边界附近有限区域的升温幅值应随着 τ_q 的增大而升高, 这是因为合理的非傅里叶边界条件, 即式(18), 符合基本的传热机理, 因而温度分布是合理的。同时, 图 8(b) 所示的结果与文献[32]的理论预测规律以及文献[13]的实验得到的规律是一致的。

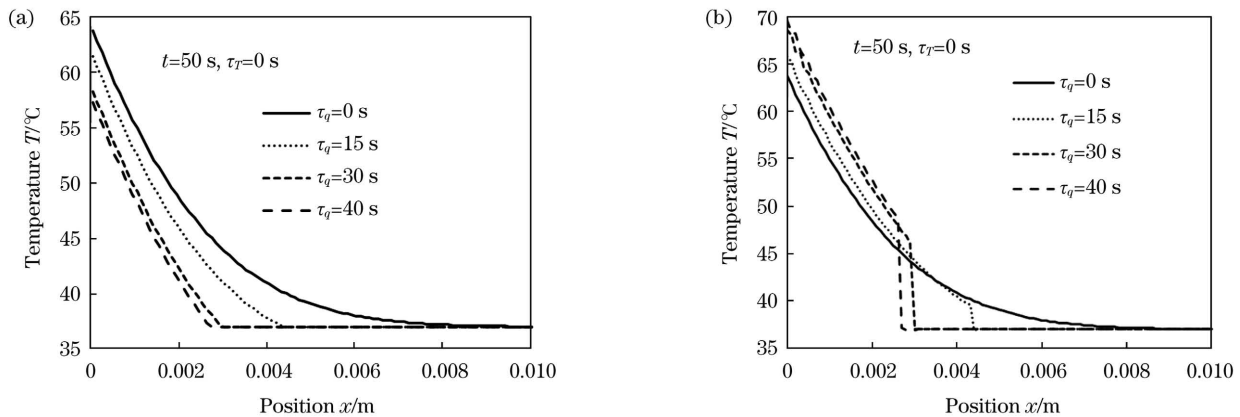


图 8 延迟时间 τ_q 对 SPLM 在不同非傅里叶边界条件下温度分布的影响 ($t=50$ s)。(a) 式(25)所示的非傅里叶边界条件; (b) 式(18)所示的非傅里叶边界条件

Fig. 8 Effects of delay time τ_q on temperature distributions of SPLM under different non-Fourier boundary conditions ($t=50$ s). (a) Non-Fourier boundary condition expressed by equation (25); (b) non-Fourier boundary condition expressed by equation (18)

图 9 显示了采用不同的恒定热流处理时, $x = 0.2 \text{ mm}$ 处 SPLM 的温度随时间的变化。可以看出图 9(a)和图 9(b)之间存在明显差异:图 9(a)中的每条温度增长曲线从零开始缓慢增大,而图 9(b)中的温度曲线在不同 τ_q 下均有突然变化;图 9(a)中的 τ_q 越大,温度变化率就越小,升温幅值也越小,而图 9(b)中

τ_q 越大,温度变化率就越大,升温幅值也越大,这也符合非傅里叶温度变化的特征。此外,图 9(b)所示的结果与文献[26]通过离散化数值方法得到的温度变化特征是一致的,而图 9(a)中的温度变化特征与温度波的传播特征不一致,这是因为图 9(a)采用了式(25)所示的非傅里叶边界条件。

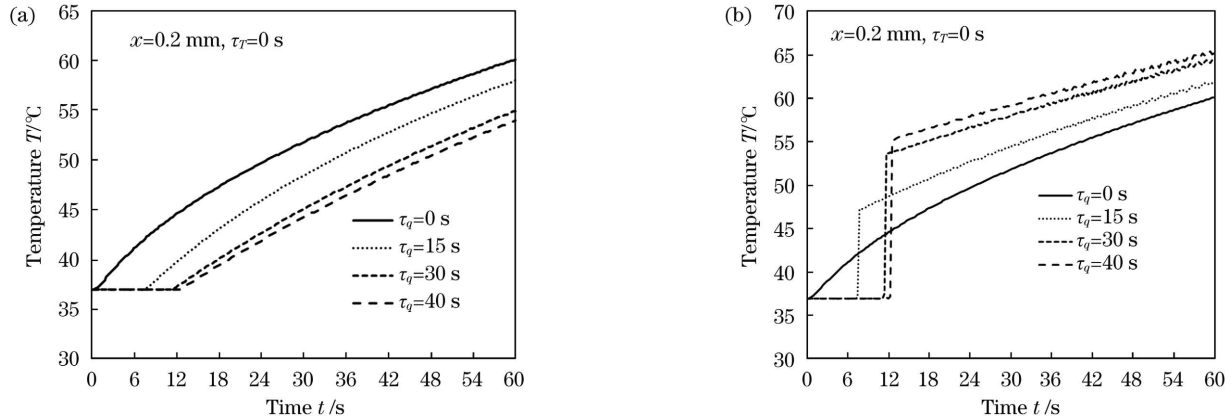


图 9 延迟时间 τ_q 对 SPLM 在不同非傅里叶边界条件下温度变化的影响($x = 0.2 \text{ mm}$)。(a)式(25)所示的非傅里叶边界条件; (b)式(18)所示的非傅里叶边界条件

Fig. 9 Effects of delay time τ_q on temperature variations of SPLM under different non-Fourier boundary conditions ($x = 0.2 \text{ mm}$). (a) Non-Fourier boundary condition expressed by equation (25); (b) non-Fourier boundary condition expressed by equation (18)

图 10 显示了不同非傅里叶边界条件下 DPLM 的温度分布。在图 10(a)中,各条温度分布曲线与坐标轴包围的面积是不同的。从能量角度看,接收的能量与面积成正比,因此各种传热机理下的能量是难以相等的,但从物理学上来说它们应该是相等的,所以能量不等肯定是式(25)所示的边界条件带来的。观察图 10(b),虽然难以证明各条曲线围成的面积是相等的,但目测大体上相等。此外,图 10(b)所示的结果与文献[33-34]的结果相符。

序是一致的,但其差异在于温度变化开始时的上升速率和幅值的大小,图 11(b)中温度曲线的上升速率大于图 11(a)中温度曲线的上升速率,特别是当 $\tau_T = 0$ 时,温度变化率的上升是跳跃的。图 11(a)中的温度低于图 7(b)中的温度。图 11(b)中所示的温度变化特性与参考文献[32,35]中关于定 τ_q 变 τ_T 引起的温度变化的规律是一致的,而图 11(a)的结果则与此文献相反,也与文献[12]中给出的实验结果相佐。图 11(a)和图 11(b)之间的所有差异都是源于不同形式的非傅里叶边界条件对热流的影响。

图 11(a)和图 11(b)中的升温幅值从高到低的次

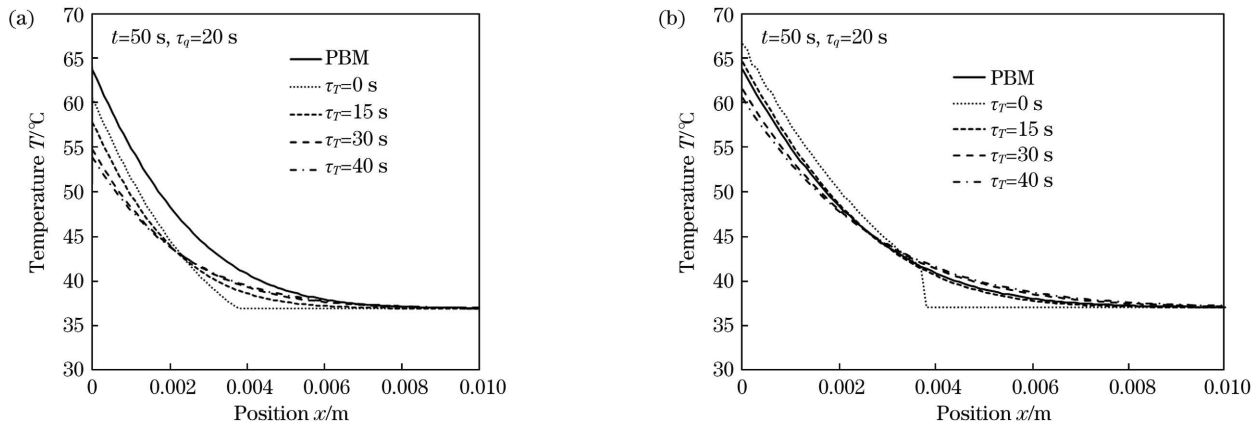


图 10 DPLM 在不同非傅里叶边界条件下的温度分布($t = 50 \text{ s}$)。(a)式(25)所示的非傅里叶边界条件;(b)式(19)所示的非傅里叶边界条件

Fig. 10 Temperature distributions of DPLM under different non-Fourier boundary conditions ($t = 50 \text{ s}$). (a) Non-Fourier boundary condition expressed by equation (25); (b) non-Fourier boundary condition expressed by equation (19)

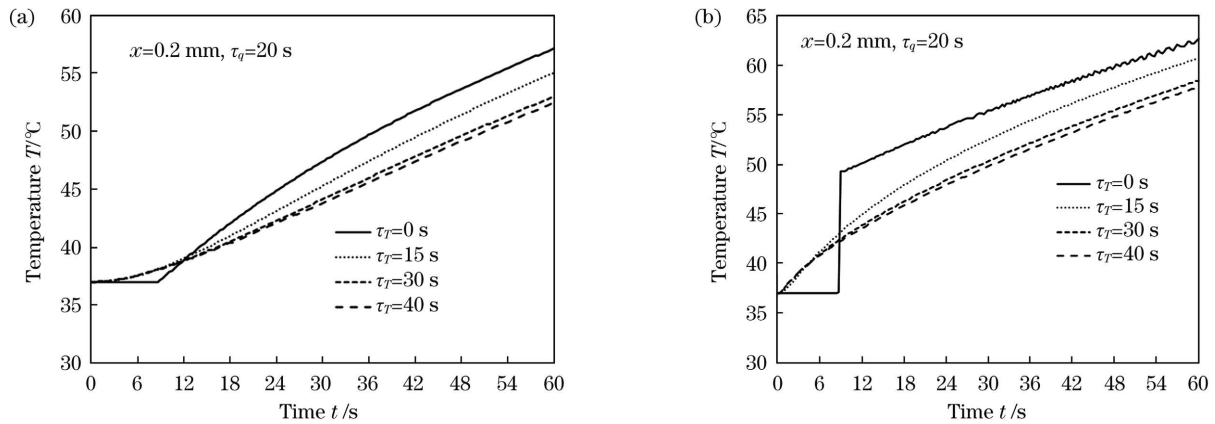


图 11 DPLM 在不同非傅里叶边界条件下的温度变化($x=0.2 \text{ mm}$)。(a)式(25)所示的非傅里叶边界条件;(b)式(19)所示的非傅里叶边界条件

Fig. 11 Temperature variations of DPLM under different non-Fourier boundary conditions ($x=0.2 \text{ mm}$). (a) Non-Fourier boundary condition expressed by equation (25); (b) non-Fourier boundary condition expressed by equation (19)

5 结 论

本文指出了文献[26-27]中关于非定常问题的恒定热流的不正确表达形式,并基于校正后的非傅里叶边界条件,应用积分变换方法建立了数学模型,得到了数学模型的解析解。对比了文献[26-27]中非傅里叶边界条件与修正后的相应条件获得的结果,并讨论了PBM、SPLM和DPLM之间传热机理的差异。可以发现,本文获得的温度变化和分布与文献[26-27]中非傅里叶边界条件获得的结果不同,甚至相反。本文得到的具体结论包括:

1) 当恒定热流与时间无关时,任何时刻的温度分布都不符合能量守恒定律,这是因为与时间无关的边界条件不能从本质上描述边界上的热平衡方程。因此,非傅里叶传热方程的边界条件应为与时间有关热流的非傅里叶边界条件,本文对此进行了修正。当被认为与时间无关的恒定热流边界条件的能量不平衡时,温度的分布和变化会违背物理学原理。

2) 当考虑恒定热流随时间的变化时,任何时刻的温度分布都遵循能量守恒定律,这主要是因为恒定热流也被视为与时间相关,非傅里叶边界条件是能量守恒的,与生物非傅里叶传热方程相容。本文所得结论与物理学原理一致,传热特性与实验结果一致。

参 考 文 献

[1] 陈肖, 陆锦玲, 李鹏程. 生物组织黏弹性激光散斑检测方法研究进展[J]. 中国激光, 2018, 45(2): 0207005.
Chen X, Lu J L, Li P C. Viscoelasticity measurement of biological tissues using laser speckle techniques: a review[J]. Chinese Journal of Lasers, 2018, 45(2): 0207005.

[2] 徐歌, 董立泉, 孔令琴, 等. 基于神经网络模型生物组织参数反演算法[J]. 光学学报, 2021, 41(11): 1117001.
Xu G, Dong L Q, Kong L Q, et al. Parameters inversion algorithm of biological tissues based on a neural network model[J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(11): 1117001.

[3] Pennes H H. Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm [J]. Journal of Applied

Physiology, 1948, 1(2): 93-122.

[4] Lin S M, Li C Y. Analytical solutions of non-Fourier bio-heat conductions for skin subjected to pulsed laser heating [J]. International Journal of Thermal Sciences, 2016, 110: 146-158.

[5] Ma J X, Yang X F, Liu S B, et al. Exact solution of thermal response in a three-dimensional living bio-tissue subjected to a scanning laser beam[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2018, 124: 1107-1116.

[6] Ghanmi A, Abbas I A. An analytical study on the fractional transient heating within the skin tissue during the thermal therapy[J]. Journal of Thermal Biology, 2019, 82: 229-233.

[7] Zhang Q, Sun Y X, Yang J L. Bio-heat transfer analysis based on fractional derivative and memory-dependent derivative heat conduction models[J]. Case Studies in Thermal Engineering, 2021, 27: 101211.

[8] Kundu B, Dewanjee D. A new method for non-Fourier thermal response in a single layer skin tissue [J]. Case Studies in Thermal Engineering, 2015, 5: 79-88.

[9] Liu J, Ren Z P, Wang C C. Interpretation of living tissue's temperature oscillations by thermal wave theory [J]. Chinese Science Bulletin, 1995, 40(17): 1493-1495.

[10] Xu F, Lu T J. Introduction to skin bio-thermo-mechanics and thermal pain[M]. Beijing: Science Press, 2010: 30-50.

[11] Vedavarz A, Kumar S, Moallemi M K. Significance of non-Fourier heat waves in conduction[J]. Journal of Heat Transfer, 1994, 116(1): 221-224.

[12] Mitra K, Kumar S, Vedavarz A, et al. Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat [J]. Journal of Heat Transfer, 1995, 117(3): 568-573.

[13] Kaminski W. Hyperbolic heat conduction equation for materials with a nonhomogeneous inner structure [J]. Journal of Heat Transfer, 1990, 112(3): 555-560.

[14] Brazhnikov A M, Karpichev V A, Lykova A V. Engineering method for calculating heat-conduction processes [J]. Journal of Engineering Physics, 1975, 28(4): 482-484.

[15] Kumar D, Singh S, Rai K N. Analysis of classical Fourier, SPL and DPL heat transfer model in biological tissues in presence of metabolic and external heat source [J]. Heat and Mass Transfer, 2016, 52(6): 1089-1107.

[16] Ziaei P, Moosavi H, Moradi A. Analysis of the dual phase lag bio-heat transfer equation with constant and time-dependent heat flux conditions on skin surface [J]. Thermal Science, 2016, 20(5): 1457-1472.

[17] Kumar S, Srivastava A. Finite integral transform-based analytical solutions of dual phase lag bio-heat transfer equation [J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 52: 378-403.

[18] Ahmadikia H, Fazlali R, Moradi A. Analytical solution of the

- parabolic and hyperbolic heat transfer equations with constant and transient heat flux conditions on skin tissue [J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2012, 39(1): 121-130.
- [19] Liu J, Chen X, Xu L X. New thermal wave aspects on burn evaluation of skin subjected to instantaneous heating [J]. *IEEE Transactions on Bio-Medical Engineering*, 1999, 46(4): 420-428.
- [20] Biswas P, Singh S, Srivastava A. A unique technique for analytical solution of 2-D dual phase lag bio-heat transfer problem with generalized time-dependent boundary conditions [J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2020, 147: 106139.
- [21] Askarizadeh H, Ahmadikia H. Analytical study on the transient heating of a two-dimensional skin tissue using parabolic and hyperbolic bioheat transfer equations [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, 39(13): 3704-3720.
- [22] Antaki P J. Analysis of hyperbolic heat conduction in a semi-infinite slab with surface convection [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1997, 40(13): 3247-3250.
- [23] Shirmohammadi R, Moosaie A. Non-Fourier heat conduction in a hollow sphere with periodic surface heat flux [J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2009, 36(8): 827-833.
- [24] Biswas P, Singh S, Bindra H. A closed form solution of dual-phase lag heat conduction problem with time periodic boundary conditions [J]. *Journal of Heat Transfer*, 2019, 141(3): 031302.
- [25] 许光映, 薛大文, 王晋宝. 非傅里叶热流边界条件对激光辐照生物组织热传导影响的研究 [J]. *中国激光*, 2020, 47(12): 1207003.
- Xu G Y, Xue D W, Wang J B. Effect of non-Fourier heat-flux boundary conditions on heat conduction behavior of laser-irradiated biological tissues [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2020, 47(12): 1207003.
- [26] Forghani P, Ahmadikia H, Karimipour A. Non-Fourier boundary conditions effects on the skin tissue temperature response [J]. *Heat Transfer-Asian Research*, 2017, 46(1): 29-48.
- [27] Verma R, Kumar S. Computational study on constant and sinusoidal heating of skin tissue using radial basis functions [J]. *Computers in Biology and Medicine*, 2020, 121: 103808.
- [28] Tzou D Y. *Macro- to microscale heat transfer: the lagging behavior* [M]. Washington, DC: Taylor & Francis, 2014.
- [29] Tzou D Y. A unified field approach for heat conduction from macro- to micro-scales [J]. *Journal of Heat Transfer*, 1995, 117(1): 8-16.
- [30] 续焕英. 分数阶微积分在反常运输过程中的应用研究 [D]. 济南: 山东大学, 2017.
- Xu H Y. Research on the applications of fractional calculus in anomalous transport [D]. Jinan: Shandong University, 2017.
- [31] van der Merwe A J, van Rensburg N F J, Sieberhagen R H. Comparing the dual phase lag, Cattaneo-Vernotte and Fourier heat conduction models using modal analysis [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2021, 396: 125934.
- [32] Lee H L, Chen W L, Chang W J, et al. Analysis of dual-phase-lag heat conduction in short-pulse laser heating of metals with a hybrid method [J]. *Applied Thermal Engineering*, 2013, 52(2): 275-283.
- [33] Zhou J H, Chen J K, Zhang Y W. Dual-phase lag effects on thermal damage to biological tissues caused by laser irradiation [J]. *Computers in Biology and Medicine*, 2009, 39(3): 286-293.
- [34] Patidar S, Kumar S, Srivastava A, et al. Dual phase lag model-based thermal analysis of tissue phantoms using lattice Boltzmann method [J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2016, 103: 41-56.
- [35] Hooshmand P, Moradi A, Khezry B. Bioheat transfer analysis of biological tissues induced by laser irradiation [J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2015, 90: 214-223.

Determination of Rational Non-Fourier Boundary Condition on Thermal Behavior of Biological Tissues Irradiated by Constant Heat Flux

Xu Guangying, Wang Jinbao*, Xue Dawen

School of Naval Architecture and Marine Affair, Zhejiang Ocean University, Zhoushan 316022, Zhejiang, China

Abstract

Objective The success of laser hyperthermia techniques depends on precise prediction and control of temperature in the tissue. The study of time-domain analytical solutions can not only verify the results of the numerical models but also contribute to the implementation of technical solutions with few technical errors. Because the excitation time of a laser source is very short compared to tissue equilibrium time, non-Fourier models have become important in theoretical research. Currently, constant heat flux is regarded as a time-dependent physical quantity, which is inconsistent with experiment results in the literatures. In this study, based on modified constant heat flux, a corrected non-Fourier boundary condition is established, and the analytical solution is obtained by integration transformation. The temperature rise and distribution curves obtained using a modified model are consistent with the experimental results in the literatures. In addition, the time-independent non-Fourier boundary condition is inconsistent with the thermal equilibrium. Furthermore, the different heat transfer mechanisms of the single-phase lag model (SPLM) and double-phase lag model (DPLM) under modified non-Fourier boundary conditions are analyzed, and their differences from those of existing models are discussed. The result shows that the time factor should be considered in constant-heat-flux models of biological tissues, otherwise the predicted results will be inconsistent with the experiment results.

Methods Based on the delayed non-Fourier law, which includes non-Fourier single- and two-phase lag equations, non-Fourier heat conduction equations of biological tissue in one-dimensional space were established, including an SPLM, a DPLM, and the classical Peens biological model (PBM). Considering the strong scattering biological surface, the time-

dependent non-Fourier boundary condition of constant-heat-flux irradiation was established, and the theoretical solution was obtained via integration transformation under a quasi-static initial condition. Also, a theoretical solution of the time-independent constant-heat-flux irradiation problem was obtained.

Results and Discussions Based on the obtained analytical solutions, the heat transfer mechanism among PBM, SPLM, and DPLM are discussed and compared to some results in the literatures. The obtained results are as follows:

1) When constant-heat-flux is treated as time-independent, the temperature distribution at any time does not obey the law of energy conservation, and among PBM, SPLM, and DPLM, the temperature distribution predicted by PBM is the highest at any time, whereas that of SPLM is the lowest. Also, the temperature variation of SPLM has no jump in wavefront at any position [Fig. 2(a)].

2) The temperature distribution of a closed solution with a corrected boundary condition at any time obeys the law of energy conservation, and among PBM, SPLM, and DPLM, the temperature distribution predicted by SPLM at any time is the highest, whereas that of PBM is the lowest, and that of DPLM prediction is between them near the surface. It is worth noticing that only SPLM predicts a sudden rise in wavefront, while DPLM and PBM do not. [Fig. 2(b)].

3) Under the corrected non-Fourier boundary condition, SPLM predicts a rapid jump in the temperature change at all positions, which is consistent with the experimental results in the literatures (Fig. 3). Under the wrong non-Fourier boundary condition of time-independent heat flux, PBM predicts a faster change in temperature than SPLM and DPLM, whereas the temperature is the highest, which is in contrast to the experimental results in the literatures.

4) Space-time temperature fields were compared. The corrected wavefront of SPLM is like a vertical cliff [Fig. 5(a)], which differs from the existing wavefront [Fig. 7(b)]. Besides, due to the wrong boundary conditions, the corresponding temperature predicted by PBM (Fig. 4) is higher than that of DPLM and SPLM (Fig. 7).

5) Under the corrected non-Fourier boundary condition, the bigger the heat-flux lagging time τ_q , the lower the thermal velocity, and the higher the rising amplitude when the lagging time of the temperature gradient is fixed (Figs. 8 and 9). At a constant lagging time of heat flux τ_q , with an increase in the temperature gradient time τ_T , the temperature predicted by DPLM decreases at all positions (Fig. 11), and the lower temperature at any time less than that of the SPLM near the surface (Fig. 10). These results are consistent with the experimental results in the literatures, but the existing constant-heat-flux boundary conditions are very different, and many conclusions are opposite.

Conclusions Based on the results, we conclude that:

1) When constant-heat-flux is regarded as time-independent, the temperature distribution at any time is inconsistent with the law of energy conservation. Thus, time-independent boundary conditions cannot satisfy the heat balance equation on the boundary.

2) With a corrected boundary condition, the temperature distribution at any time obeys the law of energy conservation. Thus, the corrected boundary condition is energy conservation and satisfies the non-Fourier biological heat transfer equation.

Key words medical optics; bio-heat conduction; laser hyperthermia; non-Fourier boundary condition; thermal wave