小工具修正下抛光盘材料的去除特性

孙荣康1,王金栋1*,成聪1,廖德锋2

¹西南交通大学机械工程学院,四川 成都 610031; ²中国工程物理研究院激光聚变研究中心,四川 绵阳 621900

摘要 环形抛光是大口径平面光学材料加工的首选方式,特别是在大口径平面光学元件的超精密加工中占有重要 地位。抛光盘表面形状是影响元件面形精度的直接因素。为了研究小工具对抛光盘表面材料的去除特性,首先需 要准确测得抛光盘的表面形状。采用激光位移传感器采集抛光盘表面螺旋样点的高度,针对实验检测误差进行分 析并标定,最终计算得到抛光盘表面的实际形状。借鉴数控小工具抛光方法,建立小工具修正下抛光盘的材料去 除模型,通过仿真计算得到了在小工具修正范围内抛光盘的材料去除函数,分析了抛光盘的材料去除特性。最后 通过小工具修正实验验证了仿真结果的正确性,为抛光盘的形状修正提供理论依据。

关键词 光学制造;环形抛光;抛光盘形状检测;小工具修正;去除函数

中图分类号 TG580.692 文献标志码 A

doi: 10.3788/CJL202047.0403001

Material Removal Characteristics of Polishing Pad with Small-Tool Correction

Sun Rongkang¹, Wang Jindong^{1*}, Cheng Cong¹, Liao Defeng²

¹School of Mechanical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031, China; ²Laser Fusion Research Center, China Academy of Engineering Physics, Mianyang, Sichuan 621900, China

Abstract Continuous polishing is the preferred method for processing large-aperture planar optical materials, especially playing an important role in ultra-precision processing of optics. The surface accuracy of components is directly affected by the surface shape of the polishing pad. To study the removal characteristics of polishing-pad surface materials with small-tools, accurately measuring the surface shape of the polishing pad is necessary. In this paper, the height of spiral sample points on the surface of a polishing pad is collected by laser displacement sensor, and the experimental detection errors are analyzed and calibrated. Subsequently, the actual shape of the polishing pad surface is calculated. Using a computer controlled polishing method for reference, the material-removal model of the polishing pad with tool correction is established, the material removal function of the pad in the correction range of the small-tool is simulated and calculated, and the material-removal characteristics of the polishing pad are analyzed. Finally, the correctness of the simulation results is verified with a small-tool correction experiment, which provides a theoretical basis for shape modification of the polishing pad.

Key words optical fabrication; continuous polishing; detection of pad shape; correction with a small-tool; removal function

OCIS codes 220.5450; 220.4610; 240.5450

1 引 言

具有低表面粗糙度以及高完整性和平面精度的 光学元件,如磷酸盐激光钕玻璃、KDP 晶体和 BK7 玻璃,已成为能源和天文行业赖以发展的关键部 件^[1]。环形抛光可以将光学元件加工至较高的面形 精度,有效抑制元件在加工过程中的中低频误差,是 大口径超精密平面光学元件加工的首选方式^[2-3]。

目前,国内外针对环形抛光开展了广泛而深入的研究:Hoon^[4]采用接触式传感器实时检测了抛光

* E-mail: wangjindong@swjtu.edu.cn

收稿日期: 2019-09-16; 修回日期: 2019-10-22; 录用日期: 2019-11-14

基金项目:科学挑战专题-光学材料元件极端制造基础研究项目(JCKY2016212A506-0501)、精密测试及仪器国家重点实验室开放基金(pilab1904)

盘的表面形状,这种传感器具有测量方便快捷的特 点,但这种接触式检测方法并不适合沥青盘的检测, 因为沥青属偏软材料,接触作用会使沥青盘面发生 较大形变,进而产生较大的测量误差;王哲等53设计 研制了蜡盘平面度测量专用装置,该装置具有快速 准确的特点,测量精度可达2 µm,但其测量范围有 限,难以完整地表征抛光盘的表面形状; Vasilev 等[6]采用专用检测设备对抛光盘的表面形状进行了 检测,该设备具有测量便捷、准确的特点,但其成本 较高,且检测范围较小。在抛光盘表面形状的修正 方面,Nguyen 等^[7]研究了修整器相关参数对抛光 盘轮廓磨损的影响,并设计出了新的修整器,新修整 器修正下的抛光盘具有更高的平面度;Chang 等^[8] 研究了修整过程中抛光盘磨损的数学模型,分析了 各修整参数对抛光盘表面形状的影响;Shan 等^[9]采 用模拟的方法分析了修正盘相关参数对抛光盘形状 的影响;尹进等^[10]则证明了抛光盘在某一平衡状态 下,无需校正便能获得高精度平面工件;曹冲等[11] 计算模拟了工件-抛光盘的转速比、偏心距等对元件 磨削量的影响。在计算机数控抛光(CCP)方面,张 健等[12]使用自主研发的双柔性自适应抛光磨头,实 现了非球面中频误差的有效抑制;戴一帆等[13]研究 了计算机数控抛光中磨盘材料对材料去除函数的影 响,从而对材料的去除模型进行了完善。此外,还有 一些研究涉及了新的抛光盘修正工具,如:Lee 等[14]研究了悬臂型修整器对抛光盘表面材料的磨 损情况,廖德锋等[15-16]借鉴数控小工具抛光方法提 出了小工具修正方法。通过上述分析可以看出:国 内外学者在抛光盘形状检测及修正方面开展了较为 广泛的研究,为进一步提升光学元件的加工精度奠 定了基础,但仍存在一些问题,如,对于大型抛光盘 形状的检测,缺乏一种快速、准确的通用检测方法; 国内外学者对修正工具及抛光盘去除函数等均有研 究,但缺乏对小工具修正方法的研究。

针对上述问题,本文针对抛光盘表面形状的检 测及其材料去除特性进行了研究。根据抛光盘的材 料特性,本文提出了一种基于激光位移传感器采集 螺旋样点生成抛光盘表面形状的检测方法,并对该 方法的测量误差进行分析与标定,以进一步提升该 方法的检测精度。根据基于小工具的抛光盘表面形 状修正方法,建立了小工具修正下抛光盘材料的去 除函数模型,对小工具修正区域内抛光盘材料去除 速率的分布进行仿真,最后通过小工具修正实验验 证了仿真结果的正确性。

2 抛光盘表面形状检测

在环形抛光中,整个抛光系统主要由修正盘、元 件盘、抛光盘、支架及其他辅件构成,如图1所示。 抛光盘由表面覆盖一层沥青的金属板或大理石板制 成,其环带宽度大于元件的尺寸。修正盘材料通常 为优质花岗岩,其直径略宽于抛光盘的沥青环带宽 度;元件置于元件盘的工位上,由元件盘带动其移动 和转动。进行抛光加工时,三盘分别自转,同时要向 抛光盘表面供给抛光液。抛光盘能够去除元件材 料,塑造元件面形,而修正盘则修整抛光盘,使抛光 盘表面趋于平整。其中,抛光盘的转速略大于元件 盘和修正盘的转速。



图 1 环形抛光示意图

Fig. 1 Schematic of continuous polishing

沥青抛光盘通常由一定比例的沥青和松香混合 制成,其表面通常开有一定形状的沟槽,沟槽一般由 内侧贯穿至外侧,其宽度、深度依据实际盘面大小而 定。抛光盘自身的材料特性及物理形貌等因素,给 抛光盘表面的高精度检测带来了一定困难。

综合考虑抛光机的实际工况条件,以激光位移 传感器为主要检测工具对抛光盘的表面形状进行检 测。抛光盘表面由无数个点组成,考虑到测量效率, 实际上仅能对有限采样点进行检测,因此如何规划 合理的抛光盘面采样点尤为重要。考虑到抛光机的 运动方式,抛光盘面采样点的分布方式可为螺旋分 布、圈层分布和径向线性分布,如图2所示。螺旋分 布的采样方式操作简单,采样点全面,能够完整地表 征抛光盘的表面形状。圈层分布的采样方式操作繁 琐,测量效率较低。径向线性分布的采样方式操作 简便,但仅通过几条径向线难以全面表征抛光盘的 全部表面形状。综合考虑抛光盘表面形状检测的完 整性及测量效率,本文采用螺旋分布的采样方式对 抛光盘面进行采样,采样时间间隔为0.1 s,实验检



图 2 抛光盘表面采样点的分布方式。(a)螺旋分布;(b)圈层分布;(c)径向线性分布 Fig. 2 Distribution of sampling points on polishing pad surface.

(a) Spiral distribution; (b) circle distribution; (c) radial linear distribution

测时间约为1h,总采样点为32500个,样点间的最 大间距为10mm。

本文对激光位移传感器采集的抛光盘表面螺旋 分布样点进行高度插值生成抛光盘表面形状。分析 后可知,抛光盘导轨直线度误差、旋转轴倾斜度误差等 对抛光盘表面形状检测结果的影响较大^[17]。为进一步 提高该方法的测量精度,本文对此类误差进行检测。

2.1 抛光盘导轨直线度误差的检测

导轨直线度标定以水平面为基准,如图 3 所示。 经过多次重复实验,得到了抛光盘导轨的直线度检 测结果,如图 4 所示,可以看出,多次测量得到的曲 线基本一致,偏差较小。



图 3 导轨直线度检测 Fig. 3 Straightness detection of guide

2.2 抛光机旋转轴倾斜度误差的检测

旋转轴倾斜度采用电子水平仪检测,如图 5 所示。数显式电子水平仪能精确测量所在位置的绝对倾斜度,其测量精度为 0.001 mm/m。将电子水平 仪置于抛光盘上靠近外端的位置,分别记录电子水 平仪旋转至导轨正下方时的读数 S₂,及旋转至导轨 正对侧时的读数 S₁,则抛光盘旋转轴相对于导轨平 面的倾斜度为

$$\alpha = \frac{S_1 - S_2}{2}.\tag{1}$$





图 5 抛光盘旋转轴倾斜度检测示意图 Fig. 5 Schematic for tilt detection of rotating axis of polishing pad

根据多次实验测量数据,可求出抛光盘旋转轴 相对于导轨垂面的倾斜度,如表 1 所示,进而可以计 算出抛光盘旋转轴相对于实验导轨截面的倾斜度 α 为 98.75×10⁻³ mm/m。

2.3 抛光盘表面形状检测实验

采用基恩士 LK-H020 型激光位移传感器对抛 光盘的表面形状进行检测,如图 6 所示。使用 MATLAB软件对实验测量结果进行处理,得到抛 光盘表面的三维色谱图,从而得到抛光盘表面形状 的实际检测结果。图 7(a)~(c)给出了相同工况下 的三次重复检测结果。





Fig. 7 Three detected actual surface shapes of polishing pad under the same conditions

实验结果显示, 抛光盘表面呈现外高内低的凹面形, 其表面峰谷值(PV值)约为170μm。相同工况下的重复实验结果表明, 测得的PV偏差较小, 且具有良好的一致性。

3 小工具去除特性

抛光盘是全口径抛光加工中极为重要的部件。 借鉴数控小工具抛光的方法,本文采用小工具对抛 光盘进行修正。其中,小工具结构如图 8 所示。小 工具是一种偏心转动机构,包括小磨头和传动轴。 修正时,主轴旋转带动磨头公转并对抛光盘材料产 生去除作用。



图 8 小工具结构示意图 Fig. 8 Structure sketch of small-tool

在宏观层面上,材料的去除量一直用广泛使用 的普雷斯顿方程描述^[18],即

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = k\sigma_0 \nu_\mathrm{r} \,, \tag{2}$$

式中: ^{dh}/_{dt}为材料的平均去除厚度; σ₀为材料中的应 力; ν_r为抛光盘与修正盘的平均相对速度; k 为普雷 斯顿常数,用于宏观地描述分子级的作用。去除速 率随着压力和速度线性增加。

根据普雷斯顿材料去除理论,将抛光盘对光学 元件的去除应用到小工具对抛光盘的材料去除中。 在小工具修正中,抛光盘材料的去除速率取决于抛 光盘相对于小工具的速度。由于抛光过程中小工具 的去除范围有限,故抛光盘表面材料的去除量由抛 光盘相对于小工具的速度和修正时间决定。因此, 需要对抛光盘相对于小工具的速度和修正时间进行 分析。

抛光盘在小工具修正过程中自转,同时,小工具 在伺服电机的带动下作公转运动。小工具与抛光盘 的相互运动关系如图 9 所示,其中,O₁ 为抛光盘表 面的中心,O₂ 为小工具公转中心,抛光盘的旋转速 率为ω₁,工具的公转速率为ω₃,小工具公转中心与 抛光盘中心的距离为*l*,小工具半径为*r*₃,偏心距为 *d*,因此小工具修正区域即小工具去除函数覆盖范 围为 $(l-d-r_3, l+d+r_3)$ 。

设去除函数覆盖范围内任意一点 Q(x,y)与抛 光盘中心、小工具公转中心的距离分别为 a_1 、 a_2 ,与 水平轴的夹角为 $\varphi($ 夹角的最大值为 φ_0)。与 Q 点 对应的抛光盘上点的速率为 v_3 ,小工具上对应点的 速率为 v_4 ,且速度矢量 v_3 与 v_4 之间的夹角为 β ,其 余参量如图 9 所示。



图 9 小工具相对运动分析

Fig. 9 Relative motion analysis of small-tool 其中,

$$a_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (3)$$

$$a_2 = \sqrt{(l-x)^2 + y^2}, \qquad (4)$$

$$v_3 = \omega_1 a_1, \qquad (5)$$

$$v_4 = \boldsymbol{\omega}_3 \boldsymbol{a}_2 \, \boldsymbol{\circ} \tag{6}$$

$$\beta = \angle O_1 Q O_2, \qquad (7)$$

故由余弦定理可知

$$\cos\beta = \frac{a_1^2 + a_2^2 - l^2}{2a_1 a_2}.$$
 (8)

在速度的矢量三角形中,Q点小工具相对于修 正盘的速率为vo,则

$$\cos\beta = \frac{v_3^2 + v_4^2 - v_Q^2}{2v_3v_4},$$
 (9)

故可计算出

$$v_{Q} = \sqrt{(\omega_{1} - \omega_{3})(\omega_{1}a_{1}^{2} - \omega_{3}a_{2}^{2}) + \omega_{1}\omega_{3}l^{2}},$$
(10)

*v*_Q的大小与抛光盘和小工具的公转速率及小工具公转中心位置有关。

在小工具修正过程中,若 $\omega_3 = p\omega_1(p=1,2,3, \dots)$,抛光盘上的点与小工具的固定位置重合,则抛光盘上部分区域易发生"零去除"现象。当p值较小时,修正效率低下。故一般修正时,小工具转速设为抛光盘转速的5倍以上。抛光盘上的任意一点Q处于抛光盘的某一圆弧上,此圆弧上各点的去除速

率不同,当小工具转速与抛光盘转速不成比例时,Q 点每次经过修正区域时的去除速率都不同,在足够 长的时间下,Q点必定会受到修正区域内该圆弧上 每一点的材料去除作用。因此,对于抛光盘上任意 半径 r 处的点,其材料去除量为修正区域内[$-q_0$, q_0]所有圆弧上点的去除速率的积分。

在修正区域内,设沿抛光盘径向的材料去除量 为g₁,则任意半径 r 上的材料去除量都可表示为

$$g_{\rm r} = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} k \sigma v_{\varphi} \, \mathrm{d}\varphi \tag{11}$$

式中: φ_0 为图 9 中 φ 可取的最大值,且

$$\varphi_0 = \arccos \frac{r^2 + l^2 - (r_3 + d)^2}{2rl}$$
 (12)

由图 9 可知

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\\ y = r\sin\varphi \end{cases},\tag{13}$$

将(3)、(4)、(13)式代入(10)式,可得

$$v_{\varphi} = \{(\omega_{1} - \omega_{3}) \times [\omega_{1}r^{2} - \omega_{3}(r^{2} + l^{2} - 2rl\cos\varphi)] + \omega_{1}\omega_{3}l^{2}\}^{1/2},$$
(14)

式中:σ为修正区域内抛光盘上各点的应力,这些点 的应力处处相等。将(14)代入(11)式可得小工具修 正下的材料去除模型为

$$g(r) = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} k\sigma\{(\omega_1 - \omega_3) \times [\omega_1 r^2 - \omega_3 (r^2 + l^2 - 2rl\cos\varphi)] + \omega_1 \omega_3 l^2\}^{1/2} d\varphi,$$
(15)

其中, $l-r_3-d < r < l+r_3+d_o$

函数 g(r)即为沿抛光径向各位置的材料理论 去除量,其大小与抛光盘转速、修正盘转速等相关, 且修正小工具处于不同径向位置时,去除量的分布 规律不同。

根据小工具去除函数进行计算,设定小工具公转轴与抛光盘面中心的距离 $l = 1300 \text{ mm}, 小工具半径 r_3 = 100 \text{ mm}, 偏心距d = 20 \text{ mm}, 抛光盘旋转速率 <math>\omega_1 = 0.3 \text{ r/min}, 小工具公转速率 \omega_3 = 2 \text{ r/min}, 采用 MATLAB 计算小工具的去除函数。由于普雷斯顿常数未确定, 无法得到准确的材料去除量,因此,对去除函数中的已知参量运算结果进行归一化处理, 计算结果如图 10 所示。$

图 10 表示沿抛光盘径向的材料相对去除量分 布,可知,在小工具修正区域内的抛光盘材料去除分 布得并不均匀,呈先增大后减小的趋势,且靠近抛光 盘内侧的材料去除量急剧增大,而靠外侧的材料去 除量减小得相对缓慢。沿径向的材料去除量最大的 点位于修正区域中心附近且略靠近内侧,在一定区 域内,材料相对去除量的大小由该点的相对速度和 去除时间决定,这与设想结果一致。



4 实验结果及分析

为了验证上述小工具修正的材料去除函数及仿 真分析结果的正确性,设计相应的小工具修正实验。 采用本文前面所提方法对抛光盘修正前后的表面形 状进行检测,通过计算修正前后修正区域的形状误 差来表征抛光盘的材料去除量。

图 11 给出了小工具修正前后抛光盘的盘面在 [1180 mm,1420 mm]范围内的轮廓变化。抛光前, 该区域内的抛光盘表面有略微凸起,凸起呈先升高 后缓慢降低至平衡的趋势;小工具修正后,抛光盘表 面高度明显降低,呈现左侧平缓而右侧逐渐变高的 趋势。相对而言,抛光盘表面材料的去除量先增大 后减小,且去除量最大的位置更靠近环带内侧。



before and after correction

结合小工具修正前后抛光盘修正区域的轮廓计 算其高度差值,该值即为抛光盘表面材料的相对去 除量。将相对去除量进行归一化,并与理论仿真结 果进行对比,结果如图 12 所示。



由图 12 可以看出:在径向各位置上抛光盘去除 量与最大去除量的比值小于理论比值,但变化趋势 一致,最大去除量对应的径向位置也十分接近;实验 结果与理论仿真结果之间的偏差较为稳定,如在抛 光盘径向 1250 mm 外侧,相对去除量偏差约为0.2。 理论与实验的差异可能是由实验检测误差、普雷斯 顿系数畸变、小工具因摩擦力而自转等因素引起的。 从整体结果来看,实验结果与理论仿真结果较为吻 合,说明小工具去除函数模型较为准确。

5 结 论

本文提出了基于激光位移传感器采集抛光盘表 面螺旋样点高度并生成抛光盘表面形状的方法,并 对该方法的误差进行了分析与标定,以进一步提升 抛光盘表面形状的检测精度。

借鉴数控小工具抛光方法,建立了小工具修正 下的抛光盘材料去除函数模型,通过仿真计算得到 了小工具修正下抛光盘材料去除速率的分布,并通 过实验对仿真结果的正确性进行了验证。

小工具修正下的抛光盘材料去除速率分布不均 匀,会使抛光盘材料的去除量出现一定差异。通过 控制小工具的驻留时间,可以控制抛光盘上不同径 向位置处的去除量。因此,针对不同抛光盘的实际 表面形状,计算小工具的驻留时间函数,从而提高抛 光盘的形状精度是未来的工作重点。

参考文献

[1] Cheng H B, Feng Z J, Cheng K, et al. Design of a six-axis high precision machine tool and its application in machining aspherical optical mirrors [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2005, 45(9): 1085-1094.

- [2] Davis J A, Cottrell D M, Lilly R A, et al. Multiplexed phase-encoded lenses written on spatial light modulators[J]. Optics Letters, 1989, 14(9): 420-422.
- [3] Chen J. Research on real-time surface monitoring of polishing pad in continuous polishing [D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2015.
 陈军.环抛中抛光胶盘面形在线监控技术研究[D].北京:中国科学院大学, 2015.
- [4] Hoon D M. Configuring of lapping and polishing machines: US8123593[P/OL]. 2012-02-28[2019-09-15]. https: // patents. glgoo. top/patent/ US8123593B2/en.
- [5] Wang Z, Xu X K, Shao J D, et al. Flatness measurement of pitch lap for large continuous polisher[J]. Optics and Precision Engineering, 2016, 24(12): 3048-3053.
 王哲,徐学科,邵建达,等.大型环抛机蜡盘平面度 的测量[J].光学 精密工程, 2016, 24(12): 3048-
- [6] Vasilev B, Bott S, Rzehak R, et al. A method for characterizing the pad surface texture and modeling its impact on the planarization in CMP [J]. Microelectronic Engineering, 2013, 104: 48-57.

3053.

- [7] Nguyen N Y, Zhong Z W, Tian Y B. Analysis and improvement of the pad wear profile in fixed abrasive polishing[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2016, 85: 1159-1165.
- [8] Chang O, Kim H, Park K, et al. Mathematical modeling of CMP conditioning process [J]. Microelectronic Engineering, 2007, 84(4): 577-583.
- [9] Shan H Y, Xu X K, He H B, et al. The figure simulation of the polishing pad in the continuous polishing process [J]. Proceedings of SPIE, 2014, 9238: 92380G.
- [10] Yin J, Zhu J Q, Jiao X, et al. Method of steady-state deterministic polishing based on continuous polishing
 [J]. Chinese Journal of Lasers, 2017, 44 (11): 1102001.

尹进,朱健强, 焦翔, 等. 基于环形抛光的稳态确定 性抛光方法[J]. 中国激光, 2017, 44(11): 1102001.

[11] Cao C, Feng G Y, Yang L M, et al. Calculation and simulation for the factors affecting relative grinding

removal in ultra-precision continuous polishing [J]. Opto-Electronic Engineering, 2004, 31(4): 67-71. 曹冲, 冯国英, 杨李茗, 等. 影响超精密环抛相对磨 削量因素的计算模拟[J]. 光电工程, 2004, 31(4): 67-71.

- [12] Zhang J, Dai L, Wang F, et al. Restraint of mid-spatial-frequency error aspheric surface by small-tool adaptive polishing[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33 (8): 0822002.
 张健,代雷,王飞,等.小磨头自适应抛光抑制高精度非球面中频误差[J].光学学报, 2013, 33(8): 0822002.
- [13] Dai Y F, Shang W J, Zhou X S. Effection of the material of a small tool to the removal function in computer control optical polishing [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2006, 28 (2): 97-101.
 戴一帆,尚文锦,周旭升.计算机控制小工具抛光技术中磨盘材料对去除函数的影响[J]. 国防科技大学学报, 2006, 28(2): 97-101.
- [14] Lee H, Lee S. Investigation of pad wear in CMP with swing-arm conditioning and uniformity of material removal[J]. Precision Engineering, 2017, 49: 85-91.
- [15] Liao D, Zhang Q, Xie R, et al. Deterministic measurement and correction of the pad shape in fullaperture polishing processes [J]. Journal of the European Optical Society: Rapid Publications, 2015, 10: 15049.
- [16] Liao D F, Zhang Q H, Zhao S J, et al. Correction method and device of surface shape of polishing pad in full-aperture polishing: 201410456502.5[P]. 2014-12-10.
 廖德锋,张清华,赵世杰,等.全口径抛光中抛光盘 表面形状的修正方法及装置: 201410456502.5[P]. 2014-12-10.
- Liao D F, Xie R Q, Sun R K, et al. Improvement of the surface shape error of the pitch lap to a deterministic continuous polishing process [J]. Journal of Manufacturing Processes, 2018, 36: 565-570.
- [18] Preston F W. The structure of abraded glass surfaces
 [J]. Transactions of the Optical Society, 1922, 23
 (3): 141-164.