

非厄米光学系统中奇异点的传感应用

张翔宇^{1,4}, 康明², 刘会刚^{1,4*}, 刘海涛^{3,4**}

¹南开大学电子信息与光学工程学院微电子工程系, 天津 300350;

²天津师范大学物理与材料科学学院, 天津 300387;

³南开大学电子信息与光学工程学院, 现代光学研究所, 天津 300350;

⁴天津市光电传感器与传感网络技术重点实验室, 天津 300350

摘要 奇异点是非厄米系统参数空间中至少两个本征值和相应本征态同时简并的点, 奇异点附近的异常光学现象, 尤其是本征频率分裂对极小微扰的敏感特性, 在超灵敏光学传感中有重要应用。本文主要结合近几年国内外关于奇异点的研究, 介绍了奇异点及其在光学传感方面的相关理论, 分析了奇异点传感和狄拉克点传感的不同; 并着重总结奇异点传感在纳米颗粒检测、温度传感、折射率传感、光学陀螺仪和石墨烯生物化学传感等方面的最新研究进展。

关键词 光学器件; 奇异点; 非厄米系统; 光学传感; 灵敏度增强

中图分类号 TP212.1

文献标志码 A

doi: 10.3788/CJL202047.0300001

Sensing Applications of Exceptional Points in Non-Hermitian Optical Systems

Zhang Xiangyu^{1,4}, Kang Ming², Liu Huigang^{1,4*}, Liu Haitao^{3,4**}

¹Department of Microelectronic Engineering, College of Electronic Information and Optical Engineering, Nankai University, Tianjin 300350, China;

²College of Physics and Materials Science, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China;

³Institute of Modern Optics, College of Electronic Information and Optical Engineering, Nankai University, Tianjin 300350, China;

⁴Tianjin Key Laboratory of Optoelectronic Sensor and Sensing Network Technology, Tianjin 300350, China

Abstract Exceptional points are degeneracies where at least two eigenvalues and corresponding eigenstates coalesce simultaneously in the parameter space of non-Hermitian systems. The appealing optical phenomena that occur near exceptional points, especially the ultrasensitivity of frequency splitting to tiny perturbations, have important applications in ultrasensitive optical sensing. This review first introduces exceptional points and related theories in optical sensing. Subsequently, it analyzes the difference between exceptional-point sensing and diabolic-point sensing. Finally, having jointed latest researches at home and abroad, a variety of sensing applications based on exceptional points, including nanoparticle detection, temperature sensing, refractive index sensing, optical gyroscope, and graphene biochemical or chemical sensing, are reviewed.

Key words optical devices; exceptional points; non-Hermitian system; optical sensing; sensitivity enhancement

OCIS codes 130.6010; 230.4555; 230.5750

1 引 言

不与外界发生能量交换且不具有增益和损耗的系统是厄米系统, 其物理量可用厄米算符描述, 厄米

算符的本征值是实数, 且其本征态完备正交; 具有增益或损耗或开放边界条件的系统是非厄米系统, 其物理量可用非厄米算符描述, 非厄米算符的本征值一般是复数^[1]。非厄米系统与厄米系统的一个本质

收稿日期: 2019-07-17; 修回日期: 2019-08-31; 录用日期: 2019-10-15

基金项目: 国家自然科学基金(61775105, 11504270, 11674244)、高等学校学科创新引智计划(B16027)、薄膜光电子技术教育部工程研究中心、新型光伏发电技术国际科技合作基地(2016D01025)

* E-mail: liuhg@nankai.edu.cn; ** E-mail: liuht@nankai.edu.cn

区别在于非厄米系统存在奇异点(EP,后文出现的“EP”均指非厄米系统中的奇异点),在线性非厄米算符的扰动研究中 EP 的概念是最先被提出的^[2],EP 是非厄米系统的独特简并。在 EP 处,系统多个本征值的实部和虚部同时分别相等,此时系统的本征值和本征态同时发生简并,本征态不再构成完备的基矢^[3];但当远离 EP 时,系统的本征态又具有完备性^[4]。EP 附近通常会伴随有能级排斥、交叉、相位突变等异常光学现象,EP 在单向传输^[5-6]、损耗诱导透明^[7]、微型激光器^[8]、超灵敏传感^[9]等诸多光学领域具有重要应用。基于 EP 的超灵敏光学传感技术是目前非厄米光学系统的一个研究热点^[10]。

在过去的数十年,尤其是在认识到一些满足宇称时间(PT)对称性的非厄米算符具有类似于厄米算符的实数本征值性质之后,PT 对称系统中的 EP 受到科研工作者的广泛关注。1998 年,Bender 等^[11]首次提出 PT 对称理论,证明了满足 PT 对称的非厄米哈密顿算符的本征值为实数。宇称算符 P 对态矢量的变换满足 $i \rightarrow i, x \rightarrow -x, p \rightarrow -p$,时间算符 T 对态矢量的变换满足 $i \rightarrow -i, x \rightarrow x, p \rightarrow -p$,其中 i 为虚数单位, x 和 p 分别代表位置算符和动量算符^[7]。假设 $\hbar = m = 1, \hbar$ 为约化普朗克常数, m 表示质量,用量子力学中的薛定谔方程 $i\psi_t = H\psi$ 描述系统, ψ_t 是波函数 ψ 对时间 t 的偏导数,哈密顿算符 $H = p^2/2 + V(x)$,其中 $p^2 = -\partial^2/\partial^2 x, V(x) = V_R(x) + i\eta V_I(x)$ 是与 x 相关的复势能, η 为复势能虚部分量的系数。由 $HPT = p^2/2 + V(x)$ 和 $PTH = p^2/2 + V^*(-x)$ 可知,满足 PT 对称要求 $HPT = PTH$ 的必要条件是 $V(x) = V^*(-x)$ ^[12]。当系统满足上述条件且系统参数 η 达到阈值 η_{th} 时,系统位于对称相和破缺相的相变临界点,此时多个本征值的实部和虚部都发生简并^[13-15],即 PT 对称系统存在 EP,PT 对称是目前非厄米光学系统中实现 EP 的一种常用且重要的方法。

光学傍轴波动方程和含时薛定谔方程的同构性为 PT 对称理论和实验研究提供了光学平台^[13-14]。考虑用光学介质的复折射率 $n(x) = n_R(x) + in_I(x)$ 类比量子系统的复势能 $V(x)$,光学系统 PT 对称需要满足的折射率分布条件为 $n(x) = n^*(-x)$,可根据 $n_R(x) = n_R(-x)$ 且 $n_I(x) = -n_I(-x)$ 设计光学 PT 对称结构,其中 $n_R(x)$ 为 $n(x)$ 的实部, $n_I(x)$ 为 $n(x)$ 的虚部, $n^*(x)$ 为 $n(x)$ 的共轭复数。已通过理论^[16]和实验^[14]验证了由增益介质和损耗介质组成的光学 PT 对称系统存在 EP 点简并。虽然非

PT 对称系统存在 EP 简并也已通过理论和实验的论证^[13,17],但目前关于 EP 特性的研究主要依赖 PT 对称系统。

与厄米系统中本征值相等且本征态正交的简并点“狄拉克点”(DP)不同,“奇异点”在非厄米系统中被称为“非厄米简并点”,在 PT 对称系统中又被称为“PT 相变点”^[18]。EP 和 DP 在光学传感中都有重要应用,加入微扰可以解除 EP 或 DP 的简并,即简并的本征谱线的分裂程度与微扰的大小(例如被测物质折射率的变化)有关,因此可根据分裂程度感测微扰的性质(例如被测物质的折射率)。EP 被用于多种光学传感器的设计,如单或多粒子检测微腔传感器^[19-26]、光学陀螺仪^[27-29]、折射率传感器^[30-32]、温度传感器^[33-35]和石墨烯生物化学传感器^[36-37]等。基于 DP 简并的光学传感器的频率分裂量与微扰强度成正比,而基于二阶 EP 简并的光学传感器的频率分裂量与微扰强度的平方根成正比,对于相同的极小微扰,后者能获得一个较大的频率分裂量,灵敏度相对较高^[22]。

本文全面地综述了 EP 在超灵敏光学传感领域的应用,对非厄米系统 EP 的独特性质进行了分析与总结。首先介绍 EP 及 DP 传感的基本工作原理;然后,重点介绍 EP 传感在纳米颗粒检测、温度传感、折射率传感、光学陀螺仪和石墨烯生物化学传感等领域的研究现状。最后,结合近几年国内外的最新研究进展,对 EP 传感的实现和研究进行总结和展望。关于 EP 在光单向传输和 PT 对称光学系统方面的研究,可分别参考文献^[5,13]。

2 EP 传感的基本理论

本文首先介绍 EP 及其在传感方面的相关理论,从理论上分析比较 EP 与 DP 传感的差异,以便于更深入地理解 EP 在光学传感中的优势。

2.1 等效哈密顿算符

实现 EP 要求系统哈密顿算符的本征值和本征态同时发生简并,这里的哈密顿算符是从量子力学中的薛定谔方程延伸出来的等效哈密顿算符,分析 EP 之前必须先明确所研究系统的等效哈密顿算符。实现 EP 的常用结构如图 1 所示,分别是基于回音壁模式(WGM)的单微腔系统^[24]和双组分耦合系统^[38],其中 s_1 和 s_2 是实现 EP 的局部微扰, s_3 是待测微扰, β_2, β_3 是微扰 2,3 的方位角, a_1, a_2 为模式系数, γ_1, γ_2 为增益系数和损耗系数, ω_1, ω_2 为谐振系数, μ 为耦合系数。

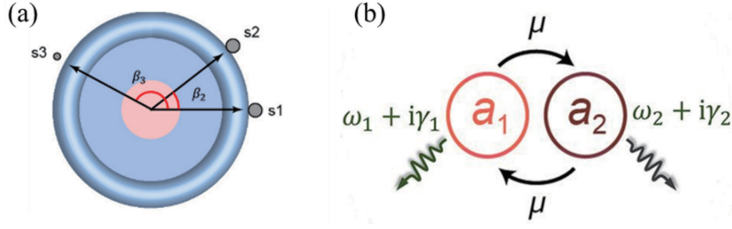


图 1 实现 EP 的常用结构。(a)单微腔系统^[24]；(b)双组分耦合系统^[38]

Fig. 1 Common structures for implementing EP. (a) Single micro-cavity system^[24] ; (b) coupled two-components system^[38]

2.1.1 DP 和 EP 传感系统的等效哈密顿算符

理想的回音壁微腔支持两个频率相等的 DP 简并的光学谐振模式(记为 CW: clockwise、CCW: counterclockwise),传播方向分别为顺时针方向和逆时针方向,加入微扰后两个模式发生散射耦合,可通过调节微扰参数实现 EP 简并。下面根据 DP 和 EP 的定义,描述单微腔系统的等效哈密顿算符^[22]。

对于基于 DP 的传感系统,当不存在待测微扰时, 2×2 的等效哈密顿算符 \mathbf{H} 存在唯一的本征值和两个线性无关的本征态(即 CW、CCW),两本征态下 \mathbf{H} 的投影矩阵为

$$\mathbf{H}_{0|DP} = \begin{bmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中: E_0 为简并的复数本征频率; \mathbf{H} 的本征向量为 $(1 \ 0)^T$ 和 $(0 \ 1)^T$ 。

对于基于二阶 EP 的传感系统,通过引入适当的微扰(注意该微扰为非待测微扰,此时仍然不存在待测微扰)使 CW、CCW 发生耦合, 2×2 的非厄米等效哈密顿算符 \mathbf{H} 存在唯一的本征值和本征态(即发生 EP 简并),此时 \mathbf{H} 为类 Jordan 块矩阵形式^[39],具体可表示为

$$\mathbf{H}_{0|EP} = \begin{bmatrix} E_0 & A_0 \\ 0 & E_0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中: E_0 为简并的复数本征频率; $A_0 \neq 0$, 为 CW、CCW 的耦合系数^[40]; \mathbf{H} 的本征向量为 $(1 \ 0)^T$ 。需要说明的是,(1)式和(2)式的等效哈密顿算符是根据 EP 和 DP 的定义导出的普遍形式,并不仅针对单微腔系统。

2.1.2 双组分耦合系统的等效哈密顿算符

双组分耦合系统是实现非厄米 EP 最简单、最容易分析的一类系统^[13,38,41],例如双波导耦合结构^[16]、双微腔耦合结构^[42]等。可借助模式耦合理论阐述双组分耦合系统等效哈密顿算符的性质。假设系统中各组分单元的增益系数或损耗系数分别是 γ_1 和 γ_2 ,谐振频率分别是 ω_1 和 ω_2 ,模式振幅分别是

ζ_1 和 ζ_2 ,模式系数分别是 a_1 和 a_2 ,其中 $a_{1,2} = \zeta_{1,2} \exp[-i(\omega_{1,2} - i\gamma_{1,2})t]$,耦合系数为 κ (与图 1 中的耦合系数 μ 意义相同),未耦合时各组分模式系数随时间的变化率分别为

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} = -i\omega_1 a_1 - \gamma_1 a_1 \\ \frac{da_2}{dt} = -i\omega_2 a_2 - \gamma_2 a_2 \end{cases}. \quad (3)$$

两组分彼此靠近使得其模式相互耦合,由模式耦合理论^[43]可得

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} = -i\omega_1 a_1 - \gamma_1 a_1 - i\kappa a_2 \\ \frac{da_2}{dt} = -i\omega_2 a_2 - \gamma_2 a_2 - i\kappa a_1 \end{cases}. \quad (4)$$

将(4)式写成薛定谔方程 $i\psi_t = \mathbf{H}\psi$ 的形式,可得系统的等效哈密顿算符为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \omega_1 - i\gamma_1 & \kappa \\ \kappa & \omega_2 - i\gamma_2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

双组分耦合系统的等效哈密顿算符 \mathbf{H} 的本征值为 $\omega_{\pm} = \omega_0 - i\chi \pm \sqrt{\kappa^2 + \Gamma^2}$,其中 $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$,

$\chi = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$, $\Gamma = \delta + i\beta$, $\delta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$, $\beta = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}$ 。等

效哈密顿算符(5)式与系统参数有关,改变参数 κ 和 δ ,使 $\kappa^2 + \Gamma^2 = 0$,此时本征值和本征态会同时发生简并,从而该系统中有 EP 形成。

2.2 PT 对称系统的 EP

由于折射率实部对称分布、折射率虚部(导致增益或损耗)反对称分布的 PT 对称系统可在双组分耦合系统中实现,因此本节针对 2.1.2 节给出的双组分耦合系统,阐述 PT 对称系统实现 EP 的原理。PT 对称理论要求系统的增益和损耗平衡,即 $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$,为了简化讨论,取 $\omega_1 = \omega_2$,此时 \mathbf{H} 的本征值 $\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \sqrt{\kappa^2 - \gamma^2}$ 。改变耦合系数 κ 时,PT 对称系统的本征值演化如图 2 所示,其中 κ_{PT} 是 PT 相变点的耦合强度($\kappa_{PT} = \gamma$)。由图 2 可

知,PT 对称系统中两个模式的耦合状态分为以下三种情况:

1) 强耦合状态: $\kappa > \gamma$,此时对应 PT 对称相,增益可以完全补偿损耗,本征值为实数;

2) PT 相变点(EP): $\kappa = \gamma$,此时两个本征值的

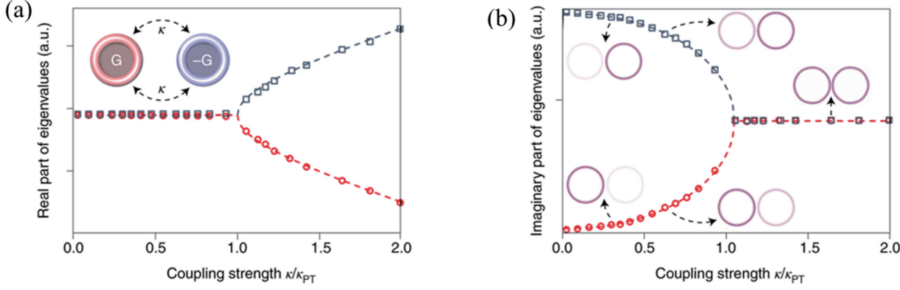


图 2 PT 对称系统的本征值演化^[13]。(a)本征值的实部依赖于归一化耦合强度 κ/κ_{PT} 的演化,插图表示 PT 对称系统由具有增益 G 和损耗 $-G$ 的两个微腔(构成双组分)耦合组成;(b)本征值的虚部依赖于归一化耦合强度 κ/κ_{PT} 的演化,插图表示 PT 对称相($\kappa/\kappa_{PT} > 1$)和 PT 破缺相($\kappa/\kappa_{PT} < 1$)对应的腔内场强

Fig. 2 Eigenvalue evolution of PT symmetric system^[13]. (a) Real part of eigenvalues versus normalized coupling strength κ/κ_{PT} , the inset shows that the PT-symmetric system consists of two coupled micro-cavities (i. e. the two components) with gain G and loss $-G$; (b) imaginary part of eigenvalues versus normalized coupling strength κ/κ_{PT} , the inset sketches the intra-cavity field intensities in the PT-symmetric regime ($\kappa/\kappa_{PT} > 1$) and the PT-broken regime ($\kappa/\kappa_{PT} < 1$)

由于光学实验中增益较难调控,PT 对称理论的首次实验验证是基于仅有损耗的无源系统^[7],即 $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ 。此时,将(5)式的等效哈密顿算符进行 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} =$

$\exp(-\lambda t) \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix}$ 变换^[13],变换后的哈密顿算符 $\mathbf{H}' =$

$\begin{bmatrix} \omega_0 - i\beta & \kappa \\ \kappa & \omega_0 + i\beta \end{bmatrix}$ 与 PT 对称系统的哈密顿算符形式

相同,可理论验证 \mathbf{H}' 满足 PT 对称性。由上述理论可知,任何具有不对称增益-损耗分布的耦合系统都存在 EP 简并^[13-14]。

2.3 EP 传感的灵敏度增强

德国马格德堡大学的 Wiersig^[20, 22] 在 2014 和 2016 年先后发表了两篇关于工作在 EP 的单粒子检测微腔传感器的文章,理论解释了 EP 可用于增强弱微扰检测的灵敏度。设传感系统的态矢量空间维数为 2(即只有 2 个线性无关基矢量,例如前文讨论的单微腔系统和双组分耦合系统),假设待检测对象(如纳米颗粒、变化的折射率等)是传感器的微扰,则系统总哈密顿算符为 $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \epsilon \mathbf{H}_1$,其中 ϵ 表示微扰强度, \mathbf{H}_0 表示没有微扰时系统的哈密顿算符(对于 DP 传感系统 $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0|_{DP}$,对于 EP 传感系统 $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0|_{EP}$,其中 $\mathbf{H}_0|_{DP}$ 和 $\mathbf{H}_0|_{EP}$ 如 2.1.1 节所述),

实部和虚部分别简并;

3) 弱耦合状态: $\kappa < \gamma$,此时对应 PT 破缺相,增益不能补偿损耗,系统具有两个互为共轭的复数本征值,两个超模(即耦合系统的本征模式)分别经历增益和损耗。

\mathbf{H}_1 表示哈密顿算符的微扰部分^[40],具体表达式为

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ B_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

式中: A_1 和 B_1 是两个基矢量之间的耦合系数,二者一般为复数。经计算,DP 系统总哈密顿算符 \mathbf{H} 的本征值为 $E_{1|DP} = E_0 + \epsilon \sqrt{A_1 B_1}$ 和 $E_{2|DP} = E_0 - \epsilon \sqrt{A_1 B_1}$,EP 系统总哈密顿算符 \mathbf{H} 的本征值为 $E_{1|EP} = E_0 + \sqrt{\epsilon \cdot \sqrt{A_0 B_1 + \epsilon A_1 B_1}}$ 和 $E_{2|EP} = E_0 - \sqrt{\epsilon \cdot \sqrt{A_0 B_1 + \epsilon A_1 B_1}}$,其中 A_0 的含义如 2.1.1 节所述。由此可得,DP 传感的频率分裂量 ΔE_{DP} 、EP 传感的频率分裂量 ΔE_{EP} 为

$$\begin{cases} \Delta E_{DP} = E_{1|DP} - E_{2|DP} = 2\epsilon \sqrt{A_1 B_1} \\ \Delta E_{EP} = E_{1|EP} - E_{2|EP} = 2\sqrt{\epsilon \cdot \sqrt{A_0 B_1 + \epsilon A_1 B_1}} \end{cases}. \quad (7)$$

由(7)式可知, ΔE_{DP} 与 ϵ 成正比, ΔE_{EP} 与 $\sqrt{\epsilon}$ 成正比,称为 EP 的复平方根拓扑(complex-square-root topology)性质。当 $B_1 \neq 0$ 且 ϵ 足够小时, $\Delta E_{DP} < \Delta E_{EP}$,且微扰 ϵ 趋于 0 时,EP 与 DP 分裂量的比值 $\Delta E_{EP}/\Delta E_{DP}$ 趋于无穷大。图 3 所示为基于 DP 和 EP 的两种传感器的频率分裂量 $\pm |\omega|$ (即 ΔE_{DP} 和 ΔE_{EP}) 随微扰强度 ϵ 变化的曲线^[24]。由图 3 可知:微扰强度 ϵ 足够小时,DP 传感的灵敏

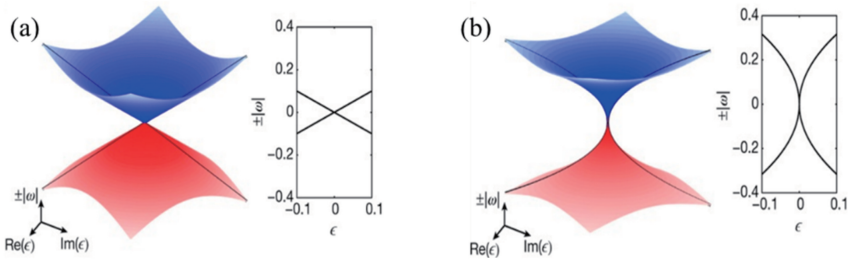


图 3 基于 DP 和 EP 的两种传感器的频率分裂特性^[24]。

(a) DP 的频率分裂量与微扰强度 ϵ 的关系; (b) EP 的频率分裂量与微扰强度 ϵ 的关系

Fig. 3 Frequency splitting characteristics of sensors operating at an EP or a DP^[24]. (a) Frequency splitting of DP versus the perturbation strength ϵ ; (b) frequency splitting of EP versus the perturbation strength ϵ

度 $\Delta E_{DP}/\epsilon$ 低于 EP 传感的灵敏度 $\Delta E_{EP}/\epsilon$; 然而, 随着 ϵ 的增大, DP 传感的灵敏度逐渐上升并超过 EP 传感的灵敏度。

虽然 EP 传感的灵敏度高于 DP, 但是 EP 传感在实验中的灵敏度会受到其他条件的限制, 如无源系统的线宽可能会大于频率分裂量, 这会导致分裂模式相互叠加, 增加实验测量难度。对于该问题, 可通过在系统中加入增益来减小线宽, 从而减弱上述限制^[22]。

3 非厄米光学系统 EP 的传感应用

EP 增强弱微扰传感灵敏度的性质得到理论解释之后, EP 被广泛应用于各种物理参数的传感研究。接下来, 主要介绍 EP 传感在粒子检测、温度传感、折射率传感、光学陀螺仪和石墨烯生物化学传感等方面的研究进展。

3.1 纳米颗粒检测传感

纳米颗粒检测被广泛用于医疗诊断、污染监测、生物化学检测等领域, 多用回音壁微腔结构实现。回音壁微腔利用全内反射将光局域在腔内, 具有极高的品质因数, 有助于实现高灵敏度传感。传统回音壁微腔探测单个纳米颗粒时依赖于 DP 简并, 其频率分裂量与颗粒尺寸相关。2010 年, 杨兰课题组^[19]考虑了两个纳米颗粒的检测, 用易于控制的二氧化硅探针模拟纳米颗粒, 在如图 4(a) 所示的回音壁微腔中发现了 EP。实验结果显示, 两个纳米颗粒引起的频率分裂量不仅是单个粒子所引起的频率分裂量的累加, 还与粒子的相对位置有关。恰当的位置组合能够使顺时针模式完全散射到逆时针方向, 从而腔内形成单一谐振模式, 即系统形成 EP。

在上述发现的基础上, Wiersig^[22]于 2016 年提出了非厄米系统 EP 传感的一般理论, 揭示了 EP 的复平方根拓扑性质在极小微扰检测方面的巨大应用

潜力。借助两个局部微扰先将微腔调至 EP, 然后目标检测粒子促使微腔远离 EP 产生频率分裂, 这为超高灵敏度纳米颗粒的检测提供了新思路。Wiersig 通过“双态近似模型”和“边界元法(BEM)”两种方法, 分别在如图 4(b) 和 4(c) 所示的“双粒子微盘系统”和“双孔微盘系统”中(双粒子和双孔均为实现 EP 引入的局部微扰)获得了 3 倍和 7 倍的灵敏度增强^[20, 22], 图中两个颗粒(空心圆圈)用于实现 EP, 一个颗粒(黑点)为目标检测粒子。

2017 年, Wiersig 与杨兰合作对上述非厄米系统 EP 传感的一般理论进行了实验验证^[24], 实验中的 EP 和 DP 传感结构均基于图 4(d) 所示的二氧化硅单微腔系统, 实验中采用两个二氧化硅纳米探针作为局部微扰使得系统到达 EP, 并通过控制第三个二氧化硅纳米探针与腔体的距离来调控微扰强度。通过比较 EP 传感器和 DP 传感器的透射光谱共振频率的分裂量, 可得 EP 传感灵敏度是 DP 传感灵敏度的 1.9 倍, 图 4(e) 中的曲线证明了二者的频率分裂量与微扰强度的平方根和线性相关。2018 年, Chen 等^[25]利用 PT 对称的耦合微盘, 增强了相变点附近的灵敏度, 并将检测扩展到了多个纳米颗粒的检测。

此外, 哈尔滨工业大学肖淑敏课题组^[21]于 2015 年以圆形腔和环形腔组成的 PM (photonic molecule) 系统为例, 提出了利用 EP 附近的远场辐射模式检测纳米粒子的新机制, 检测方式更简单且成本低。2016 年, 浙江大学何赛灵课题组^[23]首次讨论了 PT 对称纳米束腔的单向传输和传感性质, 其单金颗粒的检测灵敏度是传统纳米束腔的 2 倍。2019 年, Zhong 等^[26]基于多维度“奇异面”概念设计出了波导微环耦合结构, 将鲁棒性与超灵敏度相结合, 解决了金颗粒检测对实验误差敏感的问题。

3.2 温度传感

温度是实验测量中至关重要的环境参数, EP 的

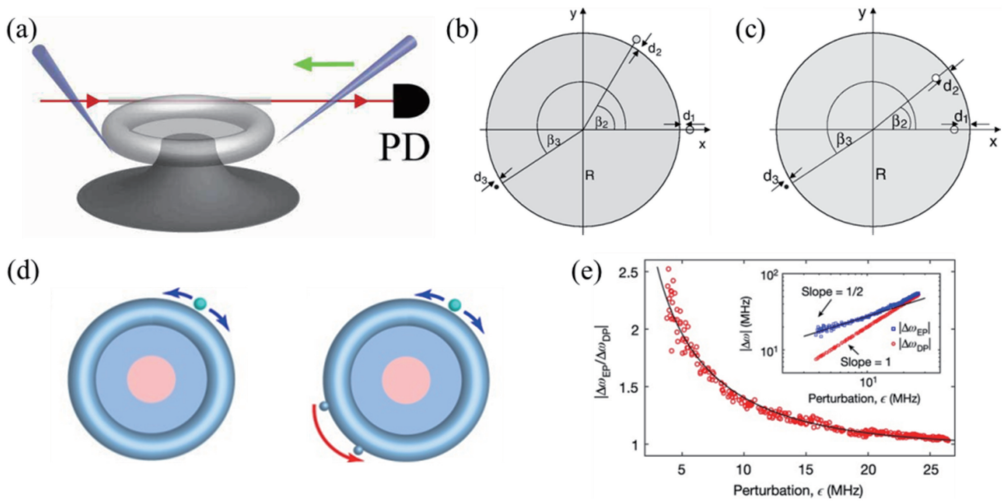


图 4 EP 传感用于纳米颗粒检测。(a)回音壁微腔中双探针实现 EP 的示意图^[19]；(b)双粒子微盘系统^[20]；(c)双孔微盘系统^[22]；(d)微腔构成的 DP 传感器与由微腔和两个局部微扰组成的 EP 传感器；(e)不同微扰强度时 EP 传感器频率分裂量与 DP 传感器频率分裂量的比值,插图显示 EP 和 DP 频率分裂量与微扰强度在对数坐标系下的平方根和线性依赖的关系^[24]

Fig. 4 EP sensing applied for nanoparticle detection. (a) Schematic of the micro-toroid with two nanofiber tips to achieve EP^[19]; (b) micro-disk with two particles^[20]; (c) micro-disk with two holes^[22]; (d) DP sensor consisting of a single microcavity, and EP sensor consisting of a single microcavity and two local perturbations; (e) ratio of the frequency splitting of the EP sensor to the frequency splitting of the DP sensor for different perturbation strengths, where the inset displays a logarithmic plot of the relationship between frequency splitting and perturbation, and shows the simulated square root and linear behaviors^[24]

复平方根拓扑性质为温度的高灵敏度传感提供了新的方法。2018 年, Zhao 等^[34]将 EP 传感与现代显微成像技术结合, 设计了兼顾温度传感的多功能显微载玻片。图 5(a)为热敏载玻片的结构示意图, Au-PMMA-Au 三层结构沉积在二氧化硅载玻片上, 温度变化时热敏材料聚甲基丙烯酸甲酯 (PMMA) 的厚度发生改变。该工作通过散射矩阵

$$S = \begin{pmatrix} \tau & r_b \\ r_f & \tau \end{pmatrix}$$

构造非厄米哈密顿算符, 推导验证了 EP 处频率分裂关于温度微扰的复平方根拓扑性质, 其中 r_f 、 r_b 和 τ 分别为前向反射系数、后向反射系数及透射系数, 本征频率分裂量为 $2|\sqrt{r_b r_f}|$ 。图 5(b)显示了共振波长处系统的散射系数与温度的关系曲线, 与 DP 传感(传感器工作在 DP 时 $r_b^{DP} = r_f^{DP} = 0$)相比, EP 传感(传感器工作在 EP 时 r_b^{EP} 或 r_f^{EP} 为 0)获得了 1 个数量级的灵敏度增强。2019 年, 宾夕法尼亚大学的 Yim 等^[35]也利用多层异质结构的 EP 简并实现了温度和压力的双参数传感。

二阶 EP 传感的灵敏度增强特性吸引着科研工作者对高阶 EP 的探索, 理论上 N 阶 EP 的频率分裂量与微扰强度的 N 次方根成正比, N 由 EP 同时

简并的本征态的数量确定, 采用 N 阶 EP 可进一步放大微扰并实现更高的灵敏度增强^[13, 39-40]。2017 年, Khajavikhan 课题组^[33]在 PT 对称理论和 Wiersig 工作的基础上设计了基于三阶 EP 的温度传感器, 如图 5(c)所示, 损耗腔、中性腔和有源腔组成了三元耦合微环。通过光学泵浦施加增益-中性-损耗分布, 并在每个微腔下方放置加热元件用于微调谐振频率并引入热微扰, 从而独立控制折射率的虚部和实部以建立三阶 EP, 与传统单微腔相比灵敏度增强了 23 倍。图 5(d)所示为频率分裂量随微扰强度 $\epsilon \propto I^2$ (I 为有源腔加热元件的内扰动电流)的变化曲线, 证明了三阶 EP 处频率分裂量与微扰的立方根成正比。该工作首次在光学系统中实现了三阶 EP 传感的实验演示。

3.3 折射率传感

折射率是物质的基本光学属性之一, 折射率传感技术可以间接检测周围环境的变化, 如浓度、温度等, 在生物医学、化工分析等领域有广泛应用。微腔是折射率传感器件的主要结构之一, 2015 年, Jouybari^[30]提出了利用有源腔和无源腔组成的 PT 对称耦合微盘共振激光器的频率移动测量环境折射率的方法。该工作中, 仿真设计有源腔的复折射率

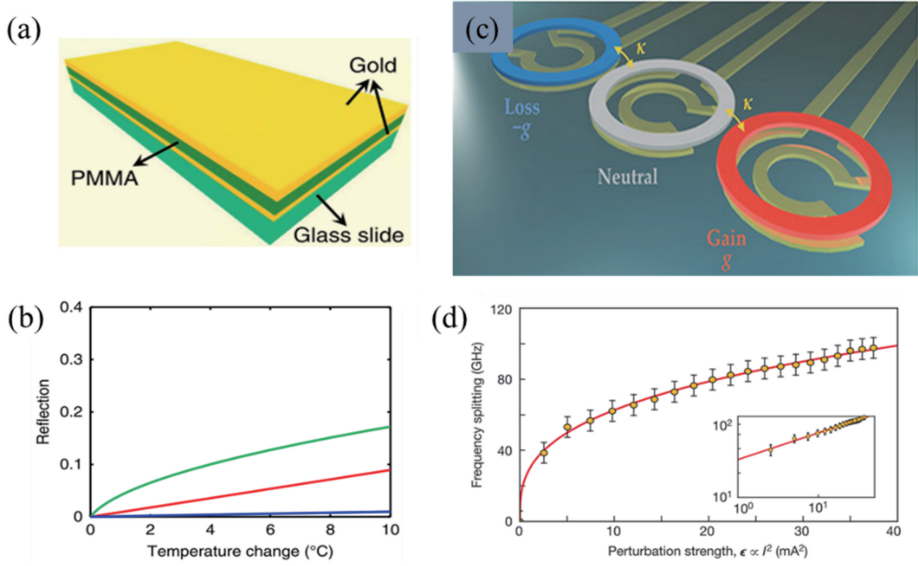


图 5 基于 EP 的温度传感。(a)热敏载玻片示意图^[34];(b)温度响应曲线(从上至下三条曲线的纵坐标依次为:基于 EP 传感器的本征频率分裂量的一半、基于 EP 传感器的前向反射系数、基于 DP 传感器的本征频率分裂量的一半)^[34];
(c)三元 PT 对称耦合微腔^[33];(d)频率分裂随微扰的变化(插图显示二者的立方根依赖关系)^[33]

Fig. 5 Temperature sensing based on EP. (a) Schematic of the thermo-sensitive glass slide^[34]; (b) temperature response curves (the ordinates of the three curves from top to bottom are: half of the eigenfrequency splitting from EP, forward reflection coefficient from EP, and half of the eigenfrequency splitting from DP^[34]); (c) schematic of ternary PT-symmetric coupled micro-cavity; (d) frequency splitting versus the perturbation, where the inset shows the simulated cube-root behaviour^[33]

为 $n_1 = n_R - in_1$, 无源腔的复折射率为 $n_2 = n_R + in_1$, 其中 n_R 和 n_1 分别为复折射率的实部和虚部。通过调整 n_1 使系统远离 EP 进入 PT 破缺相, 此时两个超模本征频率的实部简并, 虚部互为相反数(一个超模产生增益, 另一个超模产生相同量的损耗), 超过激光阈值的超模被输出。若周围环境的折射率发生变化, 则输出的光学模式会随之发生频率移动, 理论计算显示模式(7, 1)和(10, 1)的折射率灵敏度分别可达 $172 \text{ nm} \cdot \text{RIU}^{-1}$ 和 $83 \text{ nm} \cdot \text{RIU}^{-1}$, 其中 7 和 10 是超模的角向量量子数, 1 是超模的径向量子数。

折射率的变化还能导致多层介质结构的不同

折射率介质分界处的反射光束发生空间位移, 称为 Goos-Hänchen(GH)位移。2018 年, 华中科技大学王兵课题组^[31]设计了如图 6(a)所示的多层介质折射率传感器, 通过调节入射角度和 D 层折射率实部实现 EP, 仿真结果显示 EP 处的 GH 位移具有方向依赖性并且对微小折射率变化非常敏感。定义灵敏度系数(SC)为单位折射率变化引起的 GH 位移。图 6(b)所示为不同入射角 θ 对应的 SC 随 D 层介质折射率实部的变化曲线, 可以看出 EP 附近 ($\theta = 24^\circ$) SC 的数值约为入射波长 ($1.55 \mu\text{m}$) 的 10^3 倍。

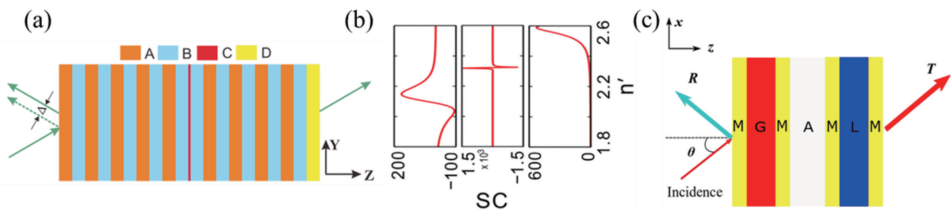


图 6 基于 EP 的折射率传感。(a)基于 GH 位移的非厄米多层介质结构^[31];
(b) SC 与 D 层折射率实部的关系曲线^[31];(c)准 PT 对称耦合结构^[32]

Fig. 6 Refractive index sensing based on EP. (a) Non-Hermitian multilayers dielectric structure based on GH shift^[31];
(b) SC versus real part of refractive index of the D layer^[31];(c) quasi-PT-symmetry coupling structure^[32]

2019年,江苏大学 Fang 课题组^[32]利用散射矩阵极点处透射率的幅度变化,研究了准 PT 对称耦合结构的折射率传感特性。结构示意图如图 6(c)所示,金属层 M 分别被增益层 G、气体层 A 和损耗层 L 隔开,除 M 层外其余结构满足光学 PT 对称的折射率分布条件。A 层折射率 $n_A = n_0(1 - p) + n_1p$, n_0 和 n_1 分别为 A 层中空气和待测气体的折射率, p 为待测气体浓度。由于传感器的透射率和 n_A 存在一一对应关系,因此可以通过 EP 附近透射率的幅度变化检测 A 层折射率和待测气体浓度的变化。

3.4 光学陀螺仪

陀螺仪是一种用来测量并维持方向的角速度传感器,被广泛用于航空航天、军事卫星、人工智能等领域。激光陀螺仪是通过旋转引起回路内反向传播模式的频率分裂,又称为 Sagnac 效应,因没有转子、维修方便等优点而备受关注。传统的环形激光陀螺仪以角速度 Ω 旋转时两个简并的共振频率彼此分裂,分裂量 $\Delta\omega = \frac{8\pi A\Omega}{L\lambda}$ 与 Ω 的大小成正比, L 和 A 分别表示环的周长和闭合区域的面积, λ 为介质中的波长。现代激光陀螺仪可以检测 $0.1 \sim 100.0$ ($^\circ$)/h(h 表示小时)范围内的角速度,但由于面积和“闭锁效应”的限制,片上集成的光

学平台无法实现上述精度^[27]。在光学系统日益集成化的驱动下,基于 EP 的高灵敏度光学陀螺仪脱颖而出。

2017年, Ren 等^[27]设计了如图 7(a)所示的 PT 对称耦合环形微腔结构的新型激光陀螺仪,并理论证明了 EP 的频率分裂量 $\Delta\omega_{PT} \cong 2\sqrt{\left|\frac{\Delta\omega}{2}\kappa\right|} = 2\sqrt{\left|\frac{4\pi A\Omega}{L\lambda}\kappa\right|}$ 与 $\sqrt{\Omega}$ 成正比,可用于增强小角度旋转的检测灵敏度。图 7(b)所示为单微环腔和不同耦合强度下的 PT 对称耦合微腔的拍频(两个超模本征频率实部之间的差值)与角速度的关系曲线,图中 κ_{max} 是 PT 对称耦合微腔的最大耦合强度。与经典的 Sagnac 陀螺仪相比,此 PT 对称光学陀螺仪的理论灵敏度提高了 10^6 倍;而且其灵敏度达到极限时的频率分裂量与环的半径无关,有利于小尺寸片上的光学平台集成。2018年, de Carlo 等^[28]对 Ren 等^[27]的工作进行了进一步的探索,发现环形微腔结构旋转时输出光谱上没有明显的频率分裂,但是频谱的半峰全宽有明显变化,基于此提出了以半峰全宽代替频率分裂的检测机制。2017年, Sunada^[29]也从理论上证明了光学陀螺仪在 EP 处的频率分裂增强,并以周期结构环形腔为例,仿真获得了高于传统环形腔两个以上数量级的频率分裂量。

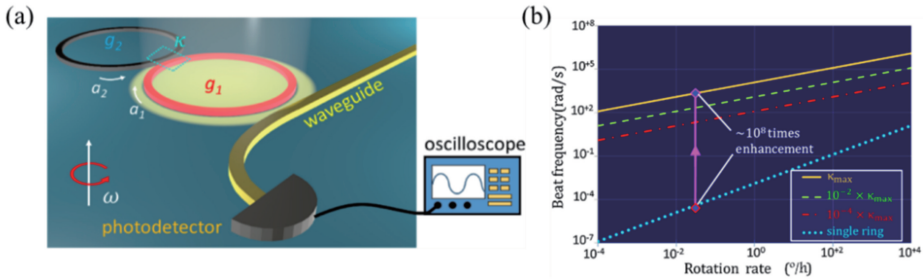


图 7 基于 EP 的光学陀螺仪^[27]。(a) PT 对称光学陀螺仪结构示意图;

(b) 单个微环腔(点线)和不同耦合强度下 PT 对称耦合微腔的拍频与旋转速率的关系

Fig. 7 Optical gyroscope based on EP^[27]. (a) Schematic of PT-symmetric laser gyroscope system; (b) beat frequency as a function of the rotation rate for single ring (dotted line) and PT-symmetric coupled ring systems with different coupling strengths

3.5 石墨烯生物化学传感

石墨烯是一种由碳原子以 sp^2 杂化轨道组成的六边形蜂窝状平面薄膜,具有独特的电学和光学性能,并被广泛用于光学传感领域。石墨烯的表面电导率与化学势(费米能级)有关,因此可以通过电压或者掺杂等方法影响石墨烯的载流子浓度,进而改变化学势、电导率以及介电常数。将石墨烯用于生物化学传感时,吸附在石墨烯表面的生物或化学分

子可以充当 n 型或 p 型掺杂杂质,达到调节其散射特性的目的。

2016年, Chen 等^[36]将 PT 对称和石墨烯电导率可调的性质相结合,利用有源石墨烯与镍铬金属电阻丝的配对设计了如图 8(a)所示的 PT 对称阻抗分布结构,借助“散射矩阵理论”和图 8(b)所示的“双端口传输线网络模型”,在 EP 处实现了光的单向传输,并提出将 EP 附近的异常散射用于实现超灵敏生物化

学传感的可能。2017年,该课题组又针对上述结构进行了进一步研究,结果表明,与传统无源石墨烯传感器(金属电阻丝由反射镜代替,且撤掉光学泵浦)相比,PT对称石墨烯传感器在低掺杂的生物化学检测方面更有优势。图8(c)和8(d)分别为不同掺杂浓度下,PT对称石墨烯传感器与传统无源石墨烯传感器

的散射光谱,图8(e)和8(f)分别给出了不同掺杂浓度下两种传感器的频率移动^[37]。图8(c)~(f)中的曲线表明,在掺杂浓度相同时,PT对称石墨烯传感器的反射幅度变化和频率偏移更为显著。另外,基于EP的石墨烯结构不仅能实现生物化学传感,还可用于折射率传感^[44]、激光器^[45]、光开关^[46]等。

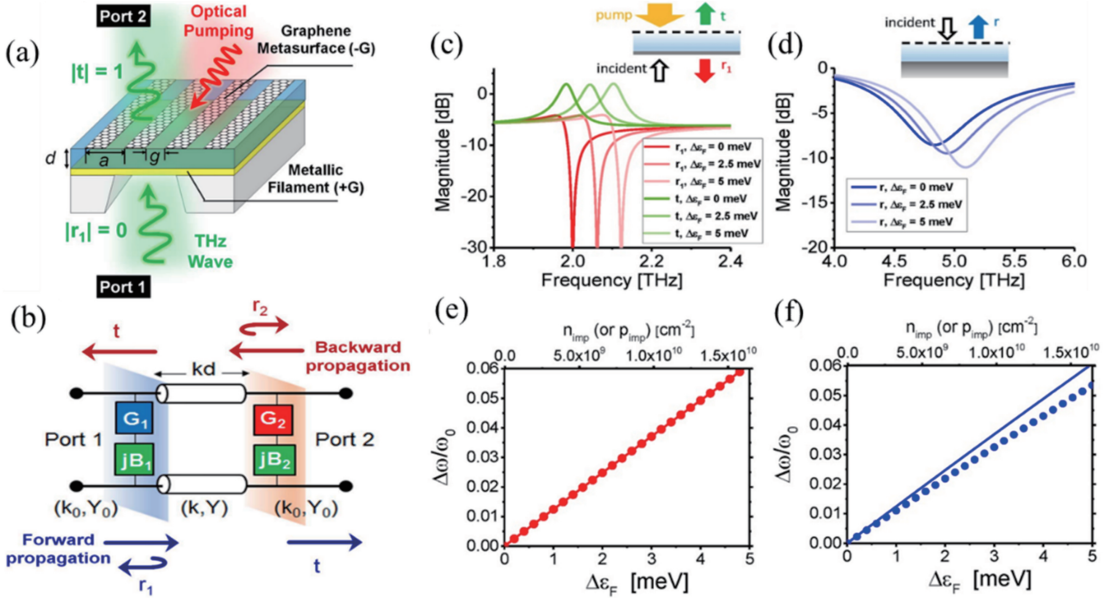


图 8 基于 EP 的石墨烯生物化学传感^[37]。(a)有源石墨烯和金属电阻丝由厚度为 d 的电介质连接组成的 PT 对称系统；(b)双端口传输线网络模型；(c)不同掺杂浓度下 PT 对称石墨烯传感器的散射光谱；(d)不同掺杂浓度下传统无源石墨烯传感器的散射光谱；(e)不同掺杂浓度下 PT 对称石墨烯传感器的频率移动；(f)不同掺杂浓度下传统无源石墨烯传感器的频率移动

Fig. 8 Graphene-based biological or chemical sensing based on EP^[37]. (a) PT-symmetric system consisting of active graphene metal resistance wire connected by dielectric with a thickness of d ; (b) two-port transmission-line model; (c) scattering spectra of the PT symmetric graphene sensor under different doping levels; (d) scattering spectra of the conventional passive graphene sensor under different doping levels; (e) frequency shift of PT symmetric graphene sensor under different doping levels; (f) frequency shift of conventional passive graphene sensor under different doping levels

4 总结与展望

非厄米系统在 EP 处的独特性质为光学传感领域的研究开辟了新的道路。本文首先介绍了非厄米系统本征态简并的概念和研究现状;然后叙述了相关基本理论,以及 EP 处传感灵敏度提高的物理机制;最后总结了 EP 在纳米颗粒检测、温度传感、折射率传感、光学陀螺仪和石墨烯生物化学传感等光学传感领域的应用。

目前,EP 传感器多基于二阶 EP,常由回音壁微腔结构或 PT 对称结构实现,传感机制也大多基于 EP 简并的频率分裂特性,在极小微扰检测方面具有非常大的优势。此外,高阶 EP^[33,47-49]的研究也在迅速发展,但高阶 EP 的实现要求多个本征值和本征

态同时简并,这通常需要复杂的结构设计和参数微调,但已有理论证明,通过在波导上引入相同的耦合谐振球等方法可以实现任意阶 EP,其在超灵敏度传感方面具有巨大发展潜力^[48]。

虽然 EP 传感拥有诸多优势,但其在理论和实际应用中也存在很多难题和挑战,有待进一步深入研究。例如,EP 传感器在产生较大频率分裂量的同时也会产生难以分辨的共振峰,一定实验条件下光谱仪的分辨率以及检测极限会影响实际的测量结果;由于噪声的存在不利于极小微扰的检测,EP 传感一般不适用于具有一定噪声水平的极小微扰检测的传感系统,“奇异面”等稳健方法^[26,50]有待深入研究;EP 传感器的灵敏度会随着连续检测次数的增加逐渐降低,这限制了其可以连续检测的次数,因此每

次检测后能重回 EP 的传感系统有待探索^[13]。在理论方面,目前关于 EP 传感的理论模型大多是唯象模型,且模型中的哈密顿算符还没有考虑材料的色散特性(如金属材料),因此基于目前迅速发展的谐振结构准正模式理论^[51],从第一性原理出发且考虑材料的色散特性,建立更严格的理论模型,是未来的一个研究方向。在材料方面,铌酸锂材料是一种性能优异的可调谐光学材料,非常适用于片上集成可调谐光学系统^[52],利用铌酸锂材料实现片上集成的可调谐 EP 光学传感系统也是一个值得探索的方向。

参 考 文 献

- [1] Rotter I. A non-Hermitian Hamilton operator and the physics of open quantum systems[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2009, 42(15): 153001.
- [2] Kato T. *Perturbation theory of linear operators*[M]. New York: Springer Verlag, 1966.
- [3] Berry M V. Physics of nonhermitian degeneracies [J]. *Czechoslovak Journal of Physics*, 2004, 54(10): 1039-1047.
- [4] Gao T, Estrecho E, Bliokh K Y, et al. Observation of non-Hermitian degeneracies in a chaotic exciton-polariton billiard[J]. *Nature*, 2015, 526(7574): 554-558.
- [5] Huang Y, Shen Y C, Min C J, et al. Unidirectional reflectionless light propagation at exceptional points [J]. *Nanophotonics*, 2017, 6(5): 977-996.
- [6] Wang Y Y, Xia J, Fang Y T. Unique non-reciprocal mode with a parity-time symmetric structure under magneto-optic effects[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2018, 45(12): 1213001.
王誉雅, 夏景, 方云团. 磁光效应下 PT 对称结构独特的非互易传输模式[J]. *中国激光*, 2018, 45(12): 1213001.
- [7] Guo A, Salamo G J, Duchesne D, et al. Observation of PT-symmetry breaking in complex optical potentials[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 103(9): 093902.
- [8] Feng L, Wong Z J, Ma R M, et al. Single-mode laser by parity-time symmetry breaking[J]. *Science*, 2014, 346(6212): 972-975.
- [9] Miller J L. Exceptional points make for exceptional sensors[J]. *Physics Today*, 2017, 70(10): 23-26.
- [10] El-Ganainy R, Khajavikhan M, Christodoulides D N, et al. The dawn of non-Hermitian optics [J]. *Communications Physics*, 2019, 2: 37.
- [11] Bender C M, Boettcher S. Real spectra in non-Hermitian hamiltonians having PT symmetry [J]. *Physical Review Letters*, 1998, 80(24): 5243-5246.
- [12] Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, et al. Beam dynamics in PT symmetric optical lattices [J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(10): 103904.
- [13] Özdemir Ş K, Rotter S, Nori F, et al. Parity-time symmetry and exceptional points in photonics [J]. *Nature Materials*, 2019, 18(8): 783-798.
- [14] Rüter C E, Makris K G, El-Ganainy R, et al. Observation of parity-time symmetry in optics [J]. *Nature Physics*, 2010, 6(3): 192-195.
- [15] Peng B, Özdemir Ş K, Lei F C, et al. Parity-time-symmetric whispering-gallery microcavities [J]. *Nature Physics*, 2014, 10(5): 394-398.
- [16] El-Ganainy R, Makris K G, Christodoulides D N, et al. Theory of coupled optical PT-symmetric structures[J]. *Optics Letters*, 2007, 32(17): 2632-2634.
- [17] Pick A, Zhen B, Miller O D, et al. General theory of spontaneous emission near exceptional points [J]. *Optics Express*, 2017, 25(11): 12325-12348.
- [18] Midya B, Zhao H, Feng L. Non-Hermitian photonics promises exceptional topology of light [J]. *Nature Communications*, 2018, 9: 2674.
- [19] Zhu J G, Özdemir Ş K, He L N, et al. Controlled manipulation of mode splitting in an optical microcavity by two Rayleigh scatterers [J]. *Optics Express*, 2010, 18(23): 23535-23543.
- [20] Wiersig J. Enhancing the sensitivity of frequency and energy splitting detection by using exceptional points: application to microcavity sensors for single-particle detection [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(20): 203901.
- [21] Zhang N, Liu S, Wang K Y, et al. Single nanoparticle detection using far-field emission of photonic molecule around the exceptional point [J]. *Scientific Reports*, 2015, 5: 11912.
- [22] Wiersig J. Sensors operating at exceptional points: general theory[J]. *Physical Review A*, 2016, 93(3): 033809.
- [23] Zhang S L, Yong Z D, Zhang Y G, et al. Parity-time symmetry breaking in coupled nanobeam cavities[J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 24487.
- [24] Chen W J, Özdemir Ş K, Zhao G M, et al. Exceptional points enhance sensing in an optical microcavity[J]. *Nature*, 2017, 548(7666): 192-196.
- [25] Chen W J, Zhang J, Peng B, et al. Parity-time-symmetric whispering-gallery mode nanoparticle sensor [Invited] [J]. *Photonics Research*, 2018, 6(5): A23-A30.

- [26] Zhong Q, Ren J, Khajavikhan M, et al. Sensing with exceptional surfaces in order to combine sensitivity with robustness[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(15): 153902.
- [27] Ren J, Hodaie H, Harari G, et al. Ultrasensitive micro-scale parity-time-symmetric ring laser gyroscope[J]. *Optics Letters*, 2017, 42(8): 1556-1559.
- [28] de Carlo M, de Leonardis F, Passaro V M N. Design rules of a microscale PT-symmetric optical gyroscope using group IV platform [J]. *Journal of Lightwave Technology*, 2018, 36(16): 3261-3268.
- [29] Sunada S. Large Sagnac frequency splitting in a ring resonator operating at an exceptional point [J]. *Physical Review A*, 2017, 96(3): 033842.
- [30] Jouybari S N. Refractive index measurement using coupled micro-resonator laser based on parity-time symmetry breaking [J]. *Journal of Modern Optics*, 2016, 63(8): 798-803.
- [31] Zhao D, Ke S L, Liu Q J, et al. Giant Goos-Hänchen shifts in non-Hermitian dielectric multilayers incorporated with graphene [J]. *Optics Express*, 2018, 26(3): 2817-2828.
- [32] Li X X, Fang Y T. Sensing gas through coupling effect of quasi-PT-symmetry resonators [J]. *Journal of Instrumentation*, 2019, 14(2): P02010.
- [33] Hodaie H, Hassan A U, Wittek S, et al. Enhanced sensitivity at higher-order exceptional points [J]. *Nature*, 2017, 548(7666): 187-191.
- [34] Zhao H, Chen Z W, Zhao R G, et al. Exceptional point engineered glass slide for microscopic thermal mapping [J]. *Nature Communications*, 2018, 9: 1764.
- [35] Yim J, Zhao H, Midya B, et al. Non-Hermitian heterostructure for two-parameter sensing [J]. *Optics Letters*, 2019, 44(7): 1626-1629.
- [36] Chen P Y, Jung J. PT symmetry and singularity-enhanced sensing based on photoexcited graphene metasurfaces [J]. *Physical Review Applied*, 2016, 5(6): 064018.
- [37] Sakhdari M, Farhat M, Chen P Y. PT-symmetric metasurfaces: wave manipulation and sensing using singular points [J]. *New Journal of Physics*, 2017, 19(6): 065002.
- [38] Miri M A, Alù A. Exceptional points in optics and photonics [J]. *Science*, 2019, 363(6422): eaar7709.
- [39] Demange G, Graefe E M. Signatures of three coalescing eigenfunctions [J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2012, 45(2): 025303.
- [40] Langbein W. No exceptional precision of exceptional-point sensors [J]. *Physical Review A*, 2018, 98(2): 023805.
- [41] El-Ganainy R, Makris K G, Khajavikhan M, et al. Non-Hermitian physics and PT symmetry [J]. *Nature Physics*, 2018, 14(1): 11-19.
- [42] Liu Z P, Zhang J, Özdemir Ş K, et al. Metrology with PT-symmetric cavities: enhanced sensitivity near the PT-phase transition [J]. *Physical Review Letters*, 2016, 117(11): 110802.
- [43] Haus H A, Huang W. Coupled-mode theory [J]. *Proceedings of the IEEE*, 1991, 79(10): 1505-1518.
- [44] Liu Q J, Wang B, Ke S L, et al. Exceptional points in Fano-resonant graphene metamaterials [J]. *Optics Express*, 2017, 25(7): 7203-7212.
- [45] Zhang W X, Wu T, Zhang X D. Tailoring eigenmodes at spectral singularities in graphene-based PT systems [J]. *Scientific Reports*, 2017, 7: 11407.
- [46] Chatzidimitriou D, Kriezis E E. Optical switching through graphene-induced exceptional points [J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2018, 35(7): 1525-1535.
- [47] Pan L, Chen S, Cui X L. High-order exceptional points in ultracold Bose gases [J]. *Physical Review A*, 2019, 99(1): 011601.
- [48] Wang S, Hou B, Lu W, et al. Arbitrary order exceptional point induced by photonic spin-orbit interaction in coupled resonators [J]. *Nature Communications*, 2019, 10: 832.
- [49] Cheng S H, Zhu K J, Ding Y Q. Diversity research on exceptional points in high dimensional non-Hermitian system [J]. *Acta Optica Sinica*, 2017, 37(6): 0626003.
程时航, 祝可嘉, 丁亚琼. 高维非厄米系统奇异点的多样性研究 [J]. *光学学报*, 2017, 37(6): 0626003.
- [50] Zhou H Y, Lee J Y, Liu S, et al. Exceptional surfaces in PT-symmetric non-Hermitian photonic systems [J]. *Optica*, 2019, 6(2): 190-193.
- [51] Lalanne P, Yan W, Vynck K, et al. Light interaction with photonic and plasmonic resonances [J]. *Laser & Photonics Reviews*, 2018, 12(5): 1700113.
- [52] Bo F, Wang J, Cui J, et al. Lithium-niobate-silica hybrid whispering-gallery-mode resonators [J]. *Advanced Materials*, 2015, 27(48): 8075-8081.