

# 基于标志自动编码的多视组合相机隐式约束标定方法

崔红霞<sup>1,2\*</sup>, 陈丽君<sup>2</sup>, 王宁<sup>2\*\*</sup>, 李婷婷<sup>2</sup>

<sup>1</sup>浙江农林大学信息工程学院, 浙江 临安 311300;

<sup>2</sup>渤海大学信息科学与技术学院, 辽宁 锦州 121013

**摘要** 为了提高大视场靶标场标志点自动编码的容量和效率,设计自编码标志和普通标志,建立以自编码标志作为编码基准、以普通标志点作为控制点靶标的室内靶标标定场。基于“同名点同编号”的原则,提出自编码标志和普通标志点的自动编码方法。该方法能自动实现同名影像标志点与同名物方控制点标志的自动编码映射,避免人工交互设置影像标志点编号,提高了标定的效率。推导出含有隐式约束条件的多视组合相机标定的间接平差模型的一般形式,并用其标定一种由网络摄像头组成的多视相机。实验结果表明:该方法具有标志点编码容量大(可达 65535 个)、解码效率高、能自动解码的优点;该标定方法的反投影影像点平面方均根误差(RMS)小于 0.20 pixel 且相机之间的相对定向元素波动较小,能够有效地提高多视相机标定的稳健性和精度;该方法可方便地扩展到其他同类多视相机或者全景相机的标定应用中。

**关键词** 机器视觉; 多视组合相机; 相机标定; 相对定向; 自编码标志; 约束条件

中图分类号 TP391.41

文献标志码 A

doi: 10.3788/CJL202047.0110003

## Calibration Method with Implicit Constraints for Multi-View Combined Camera Using Automatic Coding of Marker Points

Cui Hongxia<sup>1,2\*</sup>, Chen Lijun<sup>2</sup>, Wang Ning<sup>2\*\*</sup>, Li Tingting<sup>2</sup>

<sup>1</sup>College of Information Engineering, Zhejiang A&F University, Lin'an, Zhejiang 311300, China;

<sup>2</sup>College of Information Science and Technology, Bohai University, Jinzhou, Liaoning 121013, China

**Abstract** Self-encoding and common markers are designed to improve the capacity and efficiency of automatic encoding of the markers in a large-sized target calibration field. An indoor target calibration field is established, where the self-encoding markers are adopted as the encoding reference and the common markers are adopted as the control-point targets. Based on the principle of “homologous points with same number,” an automatic encoding method is proposed to deal with the self-encoding and common markers. This method can automatically realize the automatic coding mapping between the image markers and the object control-point markers with the same name, avoid setting the number of image markers manually, and improve the calibration efficiency. Subsequently, the general form of indirect adjustment model is derived for the calibration of a multi-view combined camera with implicit constraints. This model is then applied to calibrating a developed multi-view camera comprising webcams. The experimental results denote that the proposed method exhibits the advantages of large encoding capacity (up to 65535), high decoding efficiency, and automatic decoding. Because the relative orientation parameters exhibit less fluctuation and the back-projection root-mean-square (RMS) error in the image point plane is less than 0.20 pixel, the robustness and accuracy of the calibration can be improved using the proposed calibration method. Furthermore, the usage of the proposed method can be easily extended to other similar multi-view or panoramic cameras to obtain appropriate calibration.

**Key words** machine vision; multi-view combined camera; camera calibration; relative orientation; self-coding markers; constraint condition

**OCIS codes** 150.0155; 150.1488; 100.2000

收稿日期: 2019-07-23; 修回日期: 2019-08-29; 录用日期: 2019-09-26

基金项目: 国家自然科学基金(41371425)、辽宁省科技厅自然科学基金重点项目(20170540015)

\* E-mail: cuihongxia87021@163.com; \*\* E-mail: 405002470@qq.com

# 1 引言

具有分辨率高、影像采集频率高、畸变可纠正特点的各类非量测相机及其多视组合相机,经高精度标定后,与其他载荷配合可共同完成计算机视觉、工业测量、水下测量、深空探测以及无人机测绘等领域中的任务<sup>[1-11]</sup>。为了满足多视相机高精度测量和三维重建的应用,使用前需要严格标定内部各组成子相机的内方位元素(像点、主点、主距)、畸变参数、相机的外方位元素以及各相机像空间坐标系之间的相对定向关系(3个旋转角和3个线元素)。一般地,根据相机是否依赖于标志参照物,可将相机标定方法分为自标定方法<sup>[12-13]</sup>、基于靶标的标定方法<sup>[14-24]</sup>。自标定方法无需标定参照物,仅利用多幅图像同名点的几何约束关系来标定相机参数,该方法容易实现自动标定,但精度不高、稳健性差。基于靶标的标定方法则需要建立高精度的标定参照物,常用的靶标标定场为平面棋盘靶标和三维标定场。其中,平面棋盘靶标容易实现且可自动匹配像点和同名物点,但标定精度容易受棋盘的平整度和棋盘尺寸的影响,并且对棋盘角点提取要求较高<sup>[20-22]</sup>。三维标定场标定精度高,但大型标定场制作困难而且往往需要人工交互匹配像点和同名控制点,自动化程度不高<sup>[4,7,25]</sup>。用于高精度量测目的的多视相机,通常采用基于靶标的标定方法,且为了满足其大视场要求,需要建立大型控制场。基于靶标的标定方法可分为两类,一类是沿用传统的单机标定方法(以下简称传统标定方法)<sup>[6]</sup>、一类是引入相机间约束条件的标定方法(以下简称约束标定方法)<sup>[7,21,25-27]</sup>。传统标定方法即分别标定每个相机的内、外参数,再利用标定的外参数计算相机间的相对位置和姿态,该方法没有考虑两个摄像机间的相对定向约束关系,会导致各时刻获取的相机之间的位置和姿态存在差异,为提高标定结果的精度和可靠性,需再次对标定结果进行优化,优化方法比较复杂<sup>[6]</sup>。约束标定方法则将相机间的相对定向关系作为约束条件引入到此类组合相机的标定中,进而求解相邻相机的内方位元素、间接解算相机的外方位元素或者相机间的相对位置和姿态,标定结果稳健,无需再次优化过程。约束条件可以“显式”或者“隐式”地引入多视组合或者立体组合相机的标定<sup>[21,25-27]</sup>、全景组合相机的三维重建<sup>[27]</sup>。文献[21,25]引入立体相机之间的姿态和位置约束,导出“显式”的条件方程,建立附有约束条件的自检校光束法

整体平差模型,提高了立体相机标定的精度和稳健性,但因平差模型的自由度减少,其精度并无明显变化。相机之间的约束条件还可以“隐式”表达,即将各组成相机分成主、从相机,并将任意从相机的外方位元素用主相机的外方位元素及主从相机之间固定的几何约束关系来“隐式”表达。文献[26]中引入“隐式”约束条件来标定多个全画幅数码相机,在系统标定中获得了稳健的标定结果,该方法要求多个数码相机围绕标定场环形排列,且标定场尺寸小、编码数量少、适用性有限,并且该方法没有给出具体的标志点编码和识别方法,也没有给出“隐式”标定模型的一般形式。文献[27]中则将“隐式”的条件引入到车载全景组合相机的区域网平差中,获取了比传统标定方法更高的平差精度。将相机间约束条件引入到传统标定方法中,建立附有约束条件的标定方法能提高标定的稳健性和精度。与引入显式条件的标定或者三维重建方法比较,建立附有“隐式”约束条件的方法不增加未知数的个数、不会减少平差模型的自由度,更有利于减少参数间的相关性、增加标定的稳健性。

本文通过建立多面标定场使得靶标标定场成像尽可能充满子相机的整个画幅,以满足水平视场角达 $270^\circ$ 、垂直视场角达 $90^\circ$ 的鱼眼相机或者多视组合相机标定的要求;分别设计自编码标志点和普通标志点,并提出一种自编码标志与普通标志结合的自动编码方法,该方法能有效避免自编码标志容量的限制(标志点编码数量可达65535个甚至更多),提高了大量标志点自动解码的效率;为进一步拓展隐式约束条件的标定方法,建立基于“隐式”约束条件的多视组合相机空间后方交会的一般标定模型;最后,选用低成本的高清网络摄像头构建一种多视组合相机系统,并应用本文方法进行标定实验。

## 2 多视组合相机的标定方法

### 2.1 子相机几何成像方程

由 $m$ 个相机( $m \geq 2$ )构成多视组合相机,每个组成相机都称为子相机,其编号为 $1, 2, \dots, i, \dots, m$ 。令 $S_i$ 为 $i$ 号摄像机的投影中心,在物方坐标系的外方位线元素矢量为 $(X_{S_i}, Y_{S_i}, Z_{S_i})^T$ , $X_{S_i}, Y_{S_i}, Z_{S_i}$ 分别为 $S_i$ 在物方坐标系的三个坐标分量;角元素为 $(\varphi_i, \omega_i, \kappa_i)$ , $\varphi_i, \omega_i, \kappa_i$ 分别为 $i$ 号摄像机获取的像空间方位的三个角定向元素。由角元素构造的旋转矩阵为 $\mathbf{R}_i$ ;物方点 $P_{j,i}(X_{j,i}, Y_{j,i}, Z_{j,i})$ 在摄像机的像平面上的像点为 $p_{j,i}(x_{j,i}, y_{j,i})$ ,其中 $X_{j,i}, Y_{j,i},$

$Z_{j,i}$  分别为物方点的三个坐标分量,  $x_{j,i}$ 、 $y_{j,i}$  分别为像点的平面坐标分量,  $j$  为像点的序号,  $j=1,2,\dots,n$ 。理想情况下, 物点  $P_{j,i}$ 、无畸变的同名像点  $p_{j,i}$  及投影中心  $S_i$  是严格共线的, 像空间坐标系和物方摄影测量坐标系的转换关系为

$$\begin{bmatrix} x_{j,i} - x_{i_0} - \Delta x_{j,i} \\ y_{j,i} - y_{i_0} - \Delta y_{j,i} \\ -f_i \end{bmatrix} = \lambda_{j,i} (\mathbf{R}_i^G)^{-1} \begin{bmatrix} X_{j,i} - X_{S_i} \\ Y_{j,i} - Y_{S_i} \\ Z_{j,i} - Z_{S_i} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中:  $(\mathbf{R}_i^G)^{-1}$  为第  $i$  号摄像机获取的像的角旋转矩阵的逆矩阵;  $\lambda_{j,i}$  为比例因子;  $(x_{i_0}, y_{i_0})$  为像主点坐标; 主距  $f_i$  为摄像机的内方位元素;  $\Delta x_{j,i}$ 、 $\Delta y_{j,i}$  为像点  $p_{j,i}(x_{j,i}, y_{j,i})$  的畸变差。本文采用较为严格的畸变模型<sup>[28]</sup>, 即

$$\begin{cases} \Delta x_{j,i} = \bar{x}_{j,i} r_{j,i}^2 k_{1i} + \bar{x}_{j,i} r_{j,i}^4 k_{2i} + \\ (2\bar{x}_{j,i}^2 + r_{j,i}^2) p_{1i} + 2p_{2i} \bar{x}_{j,i} \bar{y}_{j,i} + b_{1i} \bar{x}_{j,i} + b_{2i} \bar{x}_{j,i} \\ \Delta y_{j,i} = \bar{y}_{j,i} r_{j,i}^2 k_{1i} + \bar{y}_{j,i} r_{j,i}^4 k_{2i} + \\ 2p_{1i} \bar{x}_{j,i} \bar{y}_{j,i} + (2\bar{y}_{j,i}^2 + r_{j,i}^2) p_{2i} \end{cases}, \quad (2)$$

式中:  $r_{j,i}$  为径向半径,  $r_{j,i} = \sqrt{(x_{j,i} - x_{i_0})^2 + (y_{j,i} - y_{i_0})^2}$ ;  $\bar{x}_{j,i}$  为  $x_{j,i}$  与  $x_{i_0}$  的差值,  $\bar{x}_{j,i} = (x_{j,i} - x_{i_0})$ ;  $\bar{y}_{j,i}$  为  $y_{j,i}$  与  $y_{i_0}$  的差值,  $\bar{y}_{j,i} = (y_{j,i} - y_{i_0})$ ;  $k_{1i}$ 、 $k_{2i}$  为径向畸变系数;  $p_{1i}$ 、 $p_{2i}$  为偏心畸变系数;  $b_{1i}$ 、 $b_{2i}$  为影像坐标的仿射变形和剪切变形系数。  $(x_{i_0}, y_{i_0})$ 、 $f_i$  及 6 个畸变系数统为  $i$  号摄像机的内部参数。

### 2.2 多视组合相机内部几何关系描述

对于  $T$  时刻  $m$  个相机同时获取的  $m$  幅影像  $I_1, I_2, \dots, I_i, \dots, I_m$ , 其中  $I_i$  的外方位元素为该像相对于地面摄影测量坐标系的位置和姿态, 定义 3 个平移矢量为  $[X_{S_1} \ Y_{S_1} \ Z_{S_1}]^T$ 、3 个旋转角为  $\varphi_i, \omega_i, \kappa_i$ , 旋转矩阵为  $\mathbf{R}_i^G$ 。相机之间具有固定的几何约束关系, 以其中的一个相机为主相机, 其他相机定义为从相机。以主相机为参考相机, 不失一般性, 以 1 号相机为主相机, 其他相机为从相机, 以  $I_1$  的像空间坐标系为主参考坐标系,  $I_i (i=2, \dots, m)$  的外方位元素可用主参考坐标系的相对定向外方位元素和主相机的外方位元素来表达, 即

$$[X_{S_1} \ Y_{S_1} \ Z_{S_1}]^T = \mathbf{R}_1^G [X_i^1 \ Y_i^1 \ Z_i^1]^T + [X_{S_1} \ Y_{S_1} \ Z_{S_1}]^T \mathbf{R}_i^G = \mathbf{R}_i^G \mathbf{R}_i^1, \quad (3)$$

式中:  $[X_i^1 \ Y_i^1 \ Z_i^1]^T$  为从相机相对于主相机的相对定向平移矩阵;  $\varphi_i^1, \omega_i^1, \kappa_i^1$  为相对旋转角, 其对应的旋转矩阵为  $\mathbf{R}_i^1$ ;  $\mathbf{R}_1^G$  和  $\mathbf{R}_i^G$  分别为相机 1 和  $i$  的旋转矩阵。

此外, 任意两个相机  $u, v (u=1, 2, \dots, m; v=2, 3, \dots, m)$  之间的平移矩阵定义为  $[X_u^v \ Y_u^v \ Z_u^v]^T$ , 相对旋转角为  $\varphi_u^v, \omega_u^v, \kappa_u^v$ , 其对应的旋转矩阵为  $\mathbf{R}_u^v$ , 即

$$[X_u^v \ Y_u^v \ Z_u^v]^T = (\mathbf{R}^{Gv})^{-1} [X_u^S - X_v^S \ Y_u^S - Y_v^S \ Z_u^S - Z_v^S]^T \mathbf{R}_u^v = (\mathbf{R}^{Gv})^{-1} \mathbf{R}_u^G. \quad (4)$$

### 2.3 改进的多视组合相机“隐式”约束多片空间后方交会的标定方法

通过引入相机间固定的几何条件, 建立具有约束条件的多片空间后方交会标定模型, 用来标定多视组合相机。如上所述, 设多视组合相机由  $m$  个子

相机组成, 多视组合相机第  $k (k=1, 2, \dots, l)$  曝光历元获取的主相机影像为  $I_{1,k}$ ,  $l$  为最大的曝光历元序号, 从相机影像为  $I_{2,k}, \dots, I_{m,k}$ 。以 1 号摄像机为主摄像机, 以  $I_{1,k}$  的外方位元素和从相机  $i$  的平台参数表示  $I_{i,k}$  第  $j$  个像点的共线方程, 即

$$\begin{bmatrix} x_{j,i} - x_{i_0} - \Delta x_{j,i} \\ y_{j,i} - y_{i_0} - \Delta y_{j,i} \\ -f_i \end{bmatrix}_k = [\lambda_j (\mathbf{R}_i^1)^{-1}]_k \left[ (\mathbf{R}_1^G)^{-1} \begin{bmatrix} X_i^G - X_{S_1} \\ Y_i^G - Y_{S_1} \\ Z_i^G - Z_{S_1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_i^1 \\ Y_i^1 \\ Z_i^1 \end{bmatrix} \right]_k. \quad (5)$$

由(1)式导出主相机获取的影像的共线方程以及各从相机获取的影像的共线方程, 如(4)式所示。分

别按照泰勒级数展开(1)式、(4)式, 建立以像点坐标为观测值的误差方程的一般形式, 用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_m \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{B}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_m & \mathbf{B}_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_m \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{A_1} & \mathbf{X}_{A_2} & \cdots & \mathbf{X}_{C_m} \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_m \end{bmatrix}_k, \quad (6)$$

式中： $\mathbf{X}_{A_i} = [\Delta x_{0_i} \ \Delta y_{0_i} \ \Delta f_i \ \Delta k_{1i} \ \Delta k_{2i} \ \Delta p_{1i} \ \Delta p_{2i} \ \Delta b_{1i} \ \Delta b_{2i}]^T$  为主相机 ( $i=1$ ) 和从相机 ( $i=2, \dots, m$ ) 的内部参数 (内方位元素和畸变参数) 改正数向量,  $\Delta x_{0_i}, \Delta y_{0_i}, \Delta f_i$  分别为  $i$  号相机三个内方位元素  $x_{0_i}, y_{0_i}, f_i$  的改正量,  $\Delta k_{1i}, \Delta k_{2i}, \Delta p_{1i}, \Delta p_{2i}, \Delta b_{1i}, \Delta b_{2i}$  分别为  $i$  号相机的 6 个畸变参数  $k_{1i}, k_{2i}, p_{1i}, p_{2i}, b_{1i}, b_{2i}$  的改正量;  $\mathbf{X}_{B_i} = [\Delta \varphi_1 \ \Delta \omega_1 \ \Delta \kappa_1 \ \Delta X_{S_1} \ \Delta Y_{S_1} \ \Delta Z_{S_1}]^T$  为主相机的外方位元素改正数向量,  $\Delta \varphi_1, \Delta \omega_1, \Delta \kappa_1, \Delta X_{S_1}, \Delta Y_{S_1}, \Delta Z_{S_1}$  分别为主相机的 6 个外方位元素  $\varphi_1, \omega_1, \kappa_1, X_{S_1}, Y_{S_1}, Z_{S_1}$  的改正量;  $\mathbf{X}_{C_i} = [\Delta \varphi_i^1 \ \Delta \omega_i^1 \ \Delta \kappa_i^1 \ \Delta X_i^1 \ \Delta Y_i^1 \ \Delta Z_i^1]^T$  为从相机  $i$  相对于主相机的相对外方位元素改正数向量,  $\Delta \varphi_i^1, \Delta \omega_i^1, \Delta \kappa_i^1, \Delta X_i^1, \Delta Y_i^1, \Delta Z_i^1$  分别为从相机  $i$  的相对外方位元素  $\varphi_i^1, \omega_i^1, \kappa_i^1, X_i^1, Y_i^1, Z_i^1$  的改正量;  $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i$  分别为对应系数向量;  $\mathbf{V}_i, \mathbf{L}_i$  为第  $i$  相机获取的影像  $I_{i,k}$  的所有像点坐标观测值残差向量、常数向量,  $i=1, 2, \dots, m$ 。将各曝光历元的误差方程联立, 建立总的误差方程式。根据最小二乘平差原理, 构建法方程, 求解未知数, 反复迭代趋近, 逐次修正各系数及常数项值, 最后计算得到所有的内部元素、主相机影像的外方位元素、从相机相对于主相机的相对方位元素。在平差过程中, 采用验后权估计的方法在每一次迭代中更新观测值的权值, 以提高平差求解的稳健性。解算未知数以后, 进一步计算各个像点坐标观测值的残差, 再计算单位权方均根误差 (RMS), 表达式为

$$\sigma_0 = \sqrt{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} / T}, \quad (7)$$

式中:  $\mathbf{V}$  为误差方程的残差向量;  $\mathbf{P}$  为权矩阵;  $T$  为自由度,  $T = n - h$ ,  $n$  为观测方程的个数,  $h$  为未知参数的个数。如果改进的空间后方交会方法有  $l$  个曝光历元,  $n$  个观测方程,  $m$  个相机, 则自由度为  $T = n - 6l - 6(m - 1) - 9m$ ; 而利用常规的空间后方交会方法, 自由度为  $T = n - 6ml - 9m$ 。显然, 只

要  $l > 1$ , 前者的未知数个数小于后者, 而自由度大于后者, 通常  $l > 6$ 。由 (7) 式可知, 与传统标定方法相比较, 附有隐式约束的标定法观测方程个数不变, 但单位权方均根误差更小、精度更高, 此外, 因未知数个数减少会减少未知参数之间的相关性, 故标定结果的稳健性也更强。根据计算得到的每个子相机的相对外方位元素和同曝光历元的主相机的外方位元素, 依据 (3) 式可获取每个子相机在该曝光历元的外方位元素; 依据 (4) 式可解算任意两个相机之间的相对位置和姿态矩阵, 根据姿态矩阵可反算 3 个旋转角。

### 3 靶标标定场的构建与自动编码方法

为标定大视场多视组合相机, 且使靶标标定场成像尽可能充满子相机的整个画幅, 本文建立如图 1 所示的多面标定场作为标定靶标。为了实现标志点的自动编码, 可设计自编码标志, 但是自编码标志一般比较复杂、编码过程繁琐且可编码数量有限, 本文则设计了自编码标志和普通控制点标志, 建立了一套以自编码标志为编码基准的靶标标定场标志自动编码的方法, 用以提高标志点编码的数量 (最高可达 65535 个) 以及大量标志点编解码的效率。

#### 3.1 靶标标定场的构建

如图 1 所示, 靶标标定场包括普通标志和自编码标志。其中普通标志由方形边界区域和内部圆区域组成, 在圆中心还设置有“十字”定位中心, 以满足全站仪精确测量标志点中心坐标的需要, 以“十字”定位中心替代椭圆中心作为标志点中心, 可避免由摄影姿态导致的像平面椭圆中心与同名圆形标志点中心不一致的问题。自编码标志由多圆组合而成, 边界区域为圆形, 内部包含 3 个大圆、0~6 个小圆, 中心无“十字”定位标志, 仅作为编码基准, 无需测定其坐标。本文定义的标志点在靶标标定场中的编号为标志点的外码, 每个标志点的外码是唯一的。每个外码由 4 字节 16 进制数组成, 高 2 字节为列号、



低 2 字节为行号,编码数最多 65535 个。以标志场东北角的一个普通标志点作为原点,建立右手物方三维坐标系,用高精度全站仪测量标定场每个标志点在物方坐标系的坐标,则所有标志点的物方坐标均为已知量且具有唯一的外码。其中,自编码标志是一种特殊的可实现自动编码的标志,其自编码简称内码,内码以 6 位二进制表示,编码范围为 000000~111111。如表 1 所示,将自编码标志均匀布设在控制场内,并建立其内码和外码的映射表,该

映射表是标定场标志点自动编码的基础信息。

表 1 编码标志的内码与外码

Table 1 Internal and external codes for coding markers

Internal code	External code
000000	0001
000001	0004
...	...
...	...
111111	4020

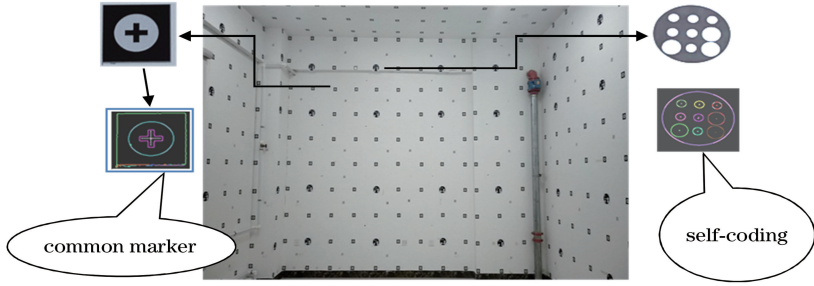


图 1 靶标标定场及自编码标志

Fig. 1 Target calibration field and self-coding marker

### 3.2 自编码标志的内码自编码方法

自编码标志由 1 个边界圆和 9 个内圆组成。内圆可分成两类:一类为长轴较大的定向椭圆(3 个),恒为白色;一类为长轴较小的,序号为 0~5 的码椭圆(码圆存在则为白色)。定向椭圆长轴约为码椭圆长轴的 1.5~2.0 倍。受摄影姿态的影响,圆经中心投影

映射为椭圆,依椭圆长轴,可将内部检测到的椭圆降序排列,位于前三位的椭圆即为定向椭圆,其余为码椭圆。每个码椭圆对应一个 6 位二进制数中的一位,第  $q$  号码椭圆存在,则对应二进制序列的第  $q$  位为 0,否则为 1,如表 1 所示,对应的二进制数为“000000”。如图 2(a)所示,自编码标志自动解码流程如下。

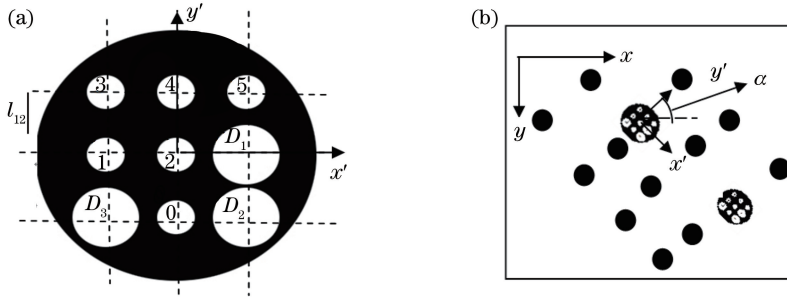


图 2 标志点自动编码。(a)自编码标志内码自动编码;(b)靶标场外码自动编码

Fig. 2 Automatic coding of marker. (a) Automatic coding of internal code for self-coding marker; (b) automatic coding of external code in target calibration field

1) 计算任意两个定向椭圆  $D_p$ 、 $D_q$  的几何距离,即

$$S_{pq} = \sqrt{(x_{D_p} - x_{D_q})^2 + (y_{D_p} - y_{D_q})^2}, \quad (8)$$

式中: $p, q = 1, 2, 3 (p \neq q)$ ;  $(x_{D_p}, y_{D_p})$ 、 $(x_{D_q}, y_{D_q})$  分别为定向椭圆  $D_p$ 、 $D_q$  的中心坐标。距离最小的两个定向椭圆作标记,剩余的定向椭圆重新编号为  $D_3$ ,与  $D_3$  号定向椭圆距离较小的定向椭圆重新编号为  $D_2$ ,另一个定向椭圆则定义为  $D_1$ 。

2) 建立  $D_1$  中心、 $D_2$  中心确定的直线方程  $l_{12}$ ,  $D_2$  中心、 $D_3$  中心确定的直线方程  $l_{23}$ ,即

$$(y_{D_2} - y_{D_1})x - (x_{D_2} - x_{D_1})y - x_{D_1}(y_{D_2} - y_{D_1}) + y_{D_1}(x_{D_2} - x_{D_1}) = 0, \quad (9)$$

$$(y_{D_3} - y_{D_2})x - (x_{D_3} - x_{D_2})y - x_{D_2}(y_{D_3} - y_{D_2}) + y_{D_2}(x_{D_3} - x_{D_2}) = 0. \quad (10)$$

计算  $D_3$  中心与  $D_2$  中心连线的中点,以该点为中心的码椭圆定义为  $C_0$ ,过  $C_0$  中心建立平行于  $l_{12}$  的直

线  $l_{02}$ , 过  $D_1$  中心作平行于  $l_{23}$  的直线  $l_{11}$ 。 $l_{02}$  和  $l_{11}$  的交点定义为该编码标志坐标系的坐标原点  $O$ , 以  $O$  为起点, 指向  $D_1$  中心的方向定义为标志点坐标系  $x$  轴正向, 依照右手法则建立平面直角坐标系, 确立标志点坐标系  $y$  轴。

3) 通过其他码椭圆与标志点坐标系  $x$  轴、 $y$  轴及各辅助直线的关系, 确定码椭圆的编号: 点  $O$  为中心的码椭圆定义为  $C_2$ ; 计算  $D_1$  中心关于直线  $l_{02}$  对称的点坐标, 以该点为中心的码椭圆记为  $C_1$ ; 计算  $D_3$  中心关于标志点坐标系  $x$  轴的对称点, 以该点为中心的码椭圆记为  $C_3$ ; 计算  $D_3$  与  $C_0$  关于  $l_{12}$  对称的点坐标, 则为  $C_4$ ; 计算  $D_2$  中心关于  $l_{12}$  对称的点坐标, 以该点为中心的码椭圆记为  $C_5$ 。

4) 码椭圆  $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  分别对应二进制编码的第 0, 1, 2, 3, 4, 5 位, 利用 6 个码椭圆的编码组合确定该编码标志的二进制编码。

5) 利用表 1 所示的映射表, 进一步确定该自编码标志的外码。

### 3.3 标志点外码自动编码方法

如图 1 所示, 普通标志和编码标志均匀布置在多面标定场中, 普通标志的区域轮廓是四边形, 自编码标志的区域轮廓线为椭圆。根据此特点, 首先读取标定场图像, 利用 Canny 边缘检测、8 邻域边缘跟踪获取各个标志点区域的边界线, 识别普通标志区域和编码标志区域。若为普通标志区域, 则以椭圆检测方法<sup>[29]</sup>检测椭圆并在椭圆内部检测“十字”标志, 提取区域的中心线, 获取两条中心线的交点坐标; 若为自编码标志, 则依据 3.2 节所述方法, 分别提取编码标志外围椭圆中心坐标、内部各定向椭圆编号和参数、各码椭圆编号和参数。本文设计的自编码标志的内码编码数量可达 64 个, 将 64 个编码标志均匀布设在标定场内, 作为普通标志自动编码的基准。由上文可知, 仅需识别出标定场图像上的一个自编码标志, 即可实现整幅图像上普通标志的自动解码。假设某标定场图像检测到的标志点集合为  $P$ , 其中普通标志  $N$  个、自编码标志共  $M$  ( $0 < M < 10$ ) 个, 其自动解码方法如下。

1) 按照从左到右、由上到下的顺序搜索自编码标志, 以检测到的第 1 个编码标志为“起始编码标志”, 建立如图 2(a) 所示的编码标志坐标系作为本影像的编码坐标系。如图 2(b) 所示, 同幅图像上所有自编码标志坐标系的  $x$  轴平行、 $y$  轴平行, 设编码标志坐标系的坐标原点为该标志区域椭圆的中心, 其像平面坐标为  $(x_0, y_0), (x_{D_1}, y_{D_1}), (x_{D_2},$

$y_{D_2}), (x_{D_3}, y_{D_3})$  分别为定向椭圆  $D_1$  中心、 $D_2$  中心、 $D_3$  中心的像平面坐标, 则可推导出两个坐标系的转换关系为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

式中:  $\alpha$  为编码坐标系与像平面坐标系的旋转参数, 依照表 2, 计算该参数。

表 2 旋转角  $\alpha$  计算

Table 2 Calculation of rotation angle  $\alpha$

$x_{D_1}$	$y_{D_1}$	$\alpha / (^\circ)$
$x_{D_1} = x_0$	$y_{D_1} < y_0$	90
	$y_{D_1} > y_0$	270
$x_{D_1} > x_0$	$y_{D_1} < y_0$	$-\arctan(y_{D_1} - y_0)(x_{D_1} - x_0)^{-1}$
	$y_{D_1} > y_0$	$360 - \arctan(y_{D_1} - y_0)(x_{D_1} - x_0)^{-1}$
	$y_{D_1} = y_0$	0
$x_{D_1} < x_0$	$y_{D_1} < y_0$	$180 + \arctan(y_{D_1} - y_0)(x_{D_1} - x_0)^{-1}$
	$y_{D_1} > y_0$	$180 + \arctan(y_{D_1} - y_0)(x_{D_1} - x_0)^{-1}$
	$y_{D_1} = y_0$	180

2) 两步编码法: 第一步, 确定行编号。根据 (9) 式将标定场图像内检测的标志点中心像平面坐标转换为编码坐标系坐标, 按照  $x$  坐标从小到大的顺序对集合中的元素排序, 因同列标志点  $x$  坐标相较于相邻列的  $x$  坐标发生突变, 很容易将集合进一步分组, 分组结果为  $P_G = \{G_0, G_1, \dots, G_z\}$ , 满足

$$|Q_{c,r}(x) - Q_{c+1,0}(x)| > 2a, \quad (12)$$

式中:  $G_c$  为第  $c$  列的标志点集合,  $c = 1, 2, \dots, s, \dots, z$  为十六进制数,  $s$  为起始列,  $z$  为末列;  $Q_{c,r}(x) \in G_c, Q_{c,r}(x)$  是  $G_c$  中的最后一个元素;  $Q_{c+1,0}(x) \in G_{c+1}, Q_{c+1,0}(x)$  是  $G_{c+1}$  中的第 1 个元素;  $a$  为编码标志长轴半径。则标志点集合  $P$  被划分为  $z$  组。

其次, 计算  $x$  坐标绝对值的均值,

$$\bar{Q}_c(x) = \sum_{d=0}^r |Q_{c,d}(x)| / r, \quad (13)$$

式中:  $Q_{c,d}(x)$  为第  $c$  列的标志点,  $d = 0, 1, \dots, r$ 。

假定“起始编码标志”的物方编码为“ $H_x M_y$ ”, 则  $\bar{Q}_s(x) < a$  的  $G_s$  组为起始列, 其列号为“ $H_x$ ”, 对于任意  $G_c$ , 其列号为十六进制数  $[H_x + (c - s)]$ 。

第二步, 确定行编号。对于任意的子集  $G_c$ , 按照  $y$  坐标从小到大排序, 则  $|Q_{c,i}(y)| < a$  的元素为起始行  $e$  的标志, 其行号为“ $M_y$ ”; 对于任意元素  $Q_{c,d}(y)$ , 其行号为十六进制数  $[M_y + (d - e)]$ 。

## 4 实验分析

本文设计 1 套由 8 个处于同一平面的网络摄像

机构成的多视组合相机。如图 3 所示,该组合相机可获取水平视场  $360^\circ$ ,垂直观场为  $60^\circ$  的影像。将组合相机分成两组,编号为 1、2、3、4、5 的相机为一组,编号为 1、8、7、6 的相机为一组,利用图 1 所示的靶标定场实施分组标定实验,本文仅给出第一组实验结果。2018 年 9 月 10 日分别进行 6 批次连续标定实验,为了避免参数间的相关性,每批次布设 3~6 个摄站,使得每个子相机能在不同深度位置以不同的方向对多面标定场以交向成像方式摄影,并使每个影像上含有至少一个自编码标志。如图 4 所示,读取每个子相机获取的靶标图像,并提取靶标图像标志点,利用本文方法自动获取自编码标志内码,并基于表 1 的映射表获取其外码;其次,根据本文两步编码法,获取靶标影像上的所有标志点的外码。

当影像上自编码标志大于 2 个时,可利用多余的自编码标志发现并剔除其编码粗差。根据标志点外码,也就是标志点在物方的唯一编号,基于“同名点同编号”原则自动对应标志点和其他同名物方点。

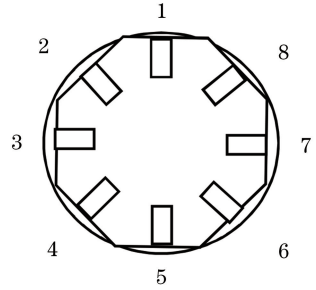


图 3 组合相机几何结构

Fig. 3 Geometrical structure of combined camera

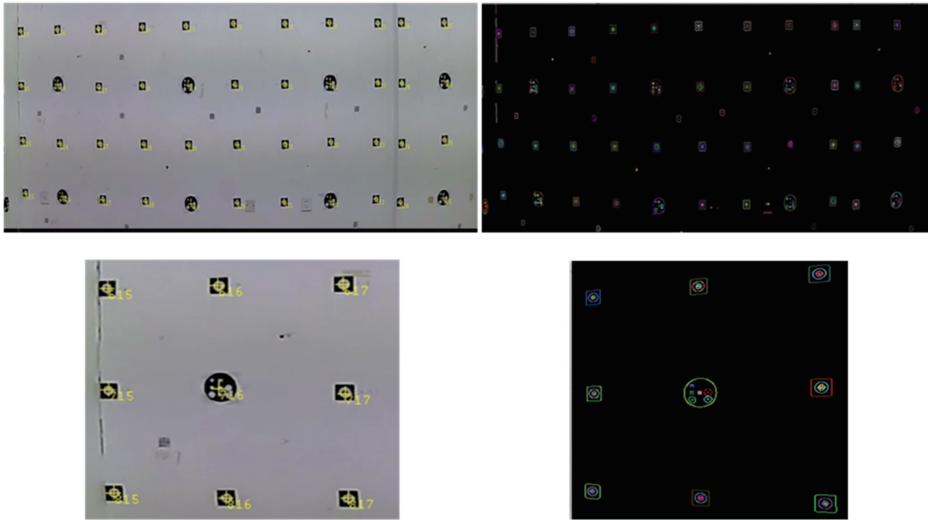


图 4 标志点自动编码

Fig. 4 Automatic coding of markers

分别利用两种方法标定多视组合相机,方法 A 即传统标定方法,也就是利用传统单相机多片空间交会的方法标定子相机,方法 B 为 2.3 节所述的方法。分别利用获取的子影像的外方位元素,计算同批次同曝光历元相邻相机的相对定向元素。如图 5 所示, $X_{S_A}$ 、 $Y_{S_A}$ 、 $Z_{S_A}$ 、 $\varphi_A$ 、 $\omega_A$ 、 $\kappa_A$  为方法 A 的标定结果, $X_{S_B}$ 、 $Y_{S_B}$ 、 $Z_{S_B}$ 、 $\varphi_B$ 、 $\omega_B$ 、 $\kappa_B$  为方法 B 的标定结果。前 3 个批次每批次分别布设 3 个摄站,每个摄站 4 个方向,后 3 个批次每组分别布设 4、5、6 个摄站。

由图 5 可知,方法 A 组合相机内部相对定向参数的稳健性受影像的姿态、摄站的布置等复杂因素的复合影响较大,随着摄站数和影像数的增多,其不同批次标定结果波动减小并趋于稳定。方法 B 则因引入了固定的几何约束条件,不同批次标定的结果受摄站数量和影像数目影响较小,有利于克服参数之间的相关性,结果稳健。

方法 A 同批次不同曝光历元得到的相邻相机的相对定向元素不一致,以其平均值作为该批次的标定结果;方法 B 因隐式引入附加约束条件,同批次不同曝光历元计算的相邻相机的相对定向元素是一致的,不同批次的相对定向元素存在微小差异。

为进一步评定方法 A、B 的精度,选取控制场内均匀分布的 100 个普通标志点作为检查点,选取同相机不同摄站的影像组成立体像对,共 40 个像对(每相机建立立体像对 8 个),选取后 3 个批次标定(方法 A 和方法 B)的内、外方位元素,以空间前方交会计算检查点的空间坐标,并统计各子相机影像上的反投影像点方均根误差和检查点在 X、Y 和 Z 方向上的坐标方均根误差,如表 3、表 4 所示。

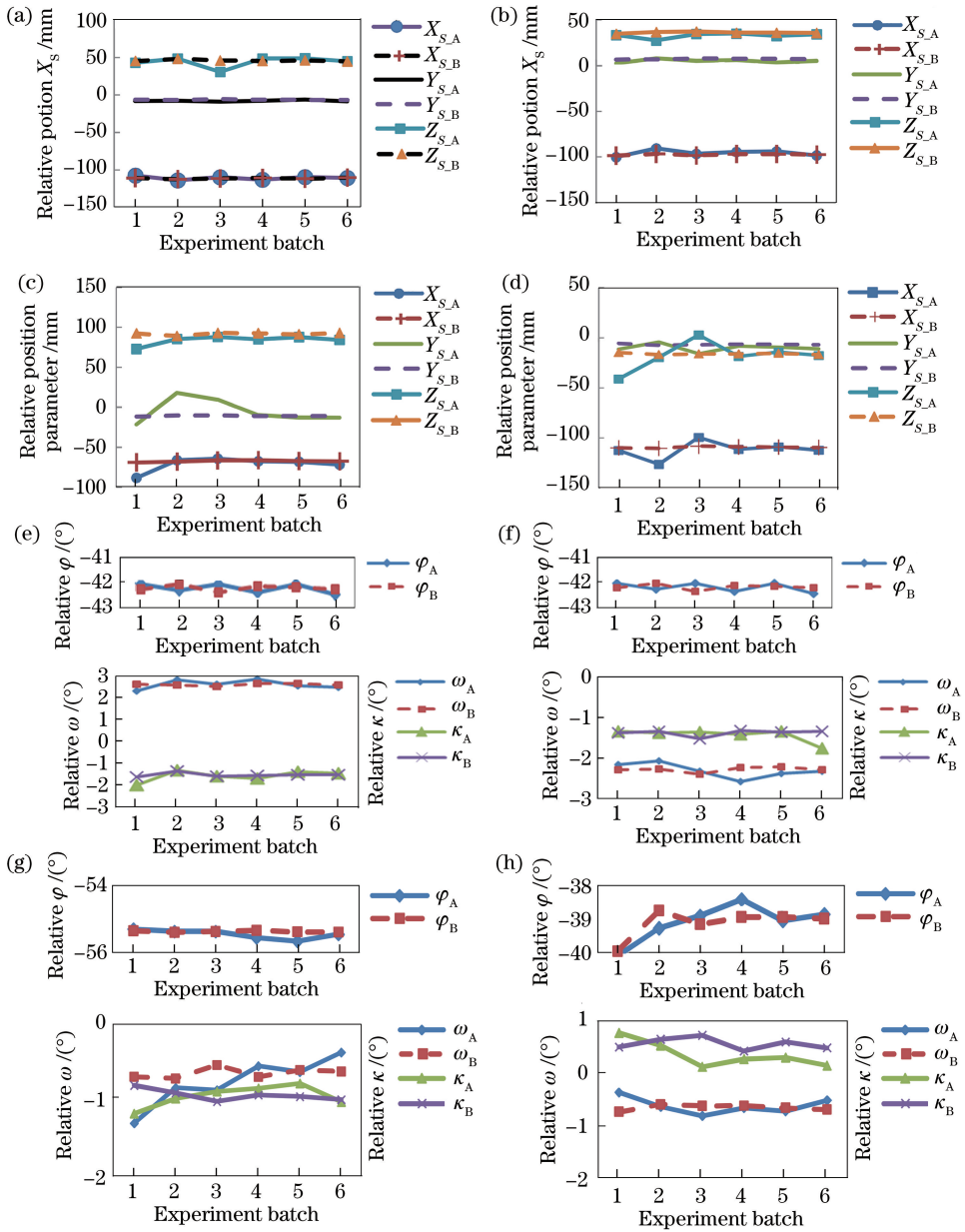


图5 相机间相对定向元素。(a)相机1、2间相对线元素;(b)相机2、3间的线元素;(c)相机3和4间相对线元素;(d)相机4、5间的线元素;(e)相机1、2间相对角元素;(f)相机2、3间的角元素;(g)相机3和4间相对角元素;(h)相机4和5间的角元素  
 Fig. 5 Relative orientation elements among cameras. (a) Relative position elements for cameras 1 and 2; (b) relative position elements for cameras 2 and 3; (c) relative position elements for cameras 3 and 4; (d) relative linear elements for cameras 4 and 5; (e) relative angular elements for cameras 1 and 2; (f) relative angular elements for cameras 2 and 3; (g) relative angular elements for cameras 3 and 4; (h) relative angular elements for cameras 4 and 5

由表3、表4可知:方法A检查点反投影像点方均根误差小于 $0.65\ \mu\text{m}$ ,即小于 $0.25\ \text{pixel}$ (像元尺寸为 $2.5\ \mu\text{m}\times 2.5\ \mu\text{m}$ ),而方法B小于 $0.55\ \mu\text{m}$ ,即小于 $0.20\ \text{pixel}$ ,方法B的精度略高于方法A;方法A检查点在X、Y和Z上的方均根误差分别小于 $1.32, 0.48, 2.35\ \text{mm}$ ,方法B检查点在X、Y和Z方向上的方均根误差分别小于 $1.14, 0.70, 2.11\ \text{mm}$ ,方法A在X和Z方向的精度略低于方

法B,Y方向的精度略高于方法B。考虑到检查点本身会存在测量误差,两种方法计算的检查点方均根误差并无明显差异。考虑到摄影距离约为 $2600\ \text{mm}$ ,两种方法在X、Y方向平面方向的相对精度约达到 $1/2000$ ,深度方向(Z方向)的相对精度约为 $1/1200$ 。但个别检查点本身误差较大,测量精度不高,尤其在深度方向的精度较差。



表 3 方法 A 检查点方均根误差

Table 3 Root-mean-square error of checking points by method A

Camera number	RMS $x / \mu\text{m}$	RMS $y / \mu\text{m}$	RMS $xy / \mu\text{m}$	RMS $X / \text{mm}$	RMS $Y / \text{mm}$	RMS $Z / \text{mm}$
1	0.248	0.071	0.258	0.649	0.379	2.356
2	0.374	0.438	0.576	0.461	0.126	1.093
3	0.099	0.103	0.143	0.904	0.481	2.159
4	0.329	0.568	0.656	1.357	0.147	2.173
5	0.334	0.166	0.373	0.322	0.496	1.392

表 4 方法 B 检查点方均根误差

Table 4 Root-mean-square error of checking points by method B

Camera number	RMS $x / \mu\text{m}$	RMS $y / \mu\text{m}$	RMS $xy / \mu\text{m}$	RMS $X / \text{mm}$	RMS $Y / \text{mm}$	RMS $Z / \text{mm}$
1	0.278	0.176	0.329	0.729	0.241	2.116
2	0.202	0.442	0.486	1.141	0.599	1.522
3	0.162	0.154	0.224	0.949	0.116	1.858
4	0.438	0.336	0.552	1.011	0.706	2.102
5	0.360	0.402	0.540	0.927	0.068	1.612

## 5 结 论

用于高精度量测目的的多视组合相机,通常采用基于靶标的标定方法,且为了满足其大视场要求,需要建立大型控制场,进而需要大量的标志点。为了实现大量标志点的自编码,提出一种将自编码标志与普通标志结合的方法,该方法能有效避免自编码标志对于标志点数量的限制,使得标志点编码数量可达 65535 个,甚至可以更多,有利于进一步建立拥有更多标志点的大型控制场。此外,传统相机标定方法常需要人工交互,即手工提取至少 4 个控制点,再结合影像匹配等方法实现同名像点、像点和物点编码的对应。与单相机标定相比较,多视组合相机会涉及到更多的相机,因而要采集更多的影像,涉及到大量的标志点匹配和编码的问题,从而导致效率较低。为此,本文提出利用自编码标志建立编码基准,再利用自编码标志和普通标志(控制点)的关系,自动获取普通标志的物方控制点编号,最后根据“同名点同编号”的原则,自动实现同名影像标志点与同名物方控制点标志的编码映射,从而实现同名像点、同名物点的匹配,以提高标定效率,有利于实现基于大型标定控制场的大视场或者多视组合相机的全自动化标定。相较于传统标定方法,本文方法引入了子相机间固定的几何约束条件,建立以主相机及其主从相机之间的隐式约束关系,用于表达空间后方交会标定模型的一般形式,因其标定模型未知数个数减少、自由度增加,故更有利于克服参数之间的相关性,使其标定结果的精度更高、更稳健。利用本文方法可标定由网络摄像头构建的多视组合相

机,该方法可以方便地拓展到其他多视相机标定应用中,以满足高精度图像拼接和基于多视相机的高精度测量、三维重建应用需求。

## 参 考 文 献

- [1] Lu J, Sun H B, Chang Z Y. A novel method for camera calibration with orthogonal vanishing points [J]. Chinese Journal of Lasers, 2014, 41(2): 0208001.  
卢津, 孙惠斌, 常智勇. 新型正交消隐点的摄像机标定方法[J]. 中国激光, 2014, 41(2): 0208001.
- [2] Su C, Zhou X X, Li H F, et al. 360 deg full-parallax light-field display using panoramic camera [J]. Applied Optics, 2016, 55(17): 4729-4735.
- [3] Tao T Y, Chen Q, Da J, et al. Real-time 3-D shape measurement with composite phase-shifting fringes and multi-view system[J]. Optics Express, 2016, 24(18): 20253-20269.
- [4] Shortis M. Calibration techniques for accurate measurements by underwater camera systems [J]. Sensors, 2015, 15(12): 30810-30826.
- [5] Heng L, Lee G H, Pollefeys M. Self-calibration and visual SLAM with a multi-camera system on a micro aerial vehicle[J]. Autonomous Robots, 2015, 39(3): 259-277.
- [6] Wu F L, Liu J J, Ren X, et al. Deep space exploration panoramic camera calibration technique based on circular markers [J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(11): 1115002.  
吴凡路, 刘建军, 任鑫, 等. 基于圆形标志点的深空探测全景相机标定方法 [J]. 光学学报, 2013, 33(11): 1115002.
- [7] Zhang S, Xu Y M, Liu S C, et al. Calibration of Change-3 lunar rover stereo-camera system based on

- control field[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2015, 40(11): 1509-1513.
- 张烁, 徐亚明, 刘少创, 等. 嫦娥-3号月面巡视探测器立体相机的控制场检校[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2015, 40(11): 1509-1513.
- [8] Cui H X, Liu J Q, Su G Z. Combined static and dynamic platform calibration for an aerial multi-camera system[J]. *Ksii Transactions on Internet and Information Systems*, 2016, 10(6): 2689-2708.
- [9] Cui H X, Liu L, Liu C. Displacement vector detection method for low altitude dynamic imaging[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2016, 43(9): 0904008.
- 崔红霞, 刘丽, 刘畅. 低空动态成像位移矢量探测方法[J]. *中国激光*, 2016, 43(9): 0904008.
- [10] Lu X S, Yu J Y, Tian M Y, et al. Fusion method of vehicle laser point cloud and serialized panoramic image[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2018, 45(5): 0510004.
- 卢秀山, 俞家勇, 田茂义, 等. 车载激光点云与序列化全景影像融合方法[J]. *中国激光*, 2018, 45(5): 0510004.
- [11] Zhang L, Tang Q J, Deng D N, et al. Field-of-view correction for dual-camera dynamic phase imaging based on transport of intensity equation[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2019, 46(8): 0804005.
- 张璐, 汤其剑, 邓定南, 等. 基于光强传输方程的双相机动态相位成像的视场校正[J]. *中国激光*, 2019, 46(8): 0804005.
- [12] Meng X Q, Hu Z Y. Recent progress in camera self-calibration[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2003, 29(1): 110-124.
- 孟晓桥, 胡占义. 摄像机自标定方法的研究与进展[J]. *自动化学报*, 2003, 29(1): 110-124.
- [13] Hartley R I. Self-calibration of stationary cameras[J]. *International Journal of Computer Vision*, 1997, 22(1): 5-23.
- [14] de la Escalera A, Armingol J M. Automatic chessboard detection for intrinsic and extrinsic camera parameter calibration[J]. *Sensors*, 2010, 10(3): 2027-2044.
- [15] Tsai R. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses[J]. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 1987, 3(4): 323-344.
- [16] Zhang Z Y. Camera calibration with one-dimensional objects[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004, 26(7): 892-899.
- [17] Rapczynski M, Lilienblum E, von Enzberg S, et al. Simultaneous multi-camera calibration based on phase-shift measurements on planar surfaces[C] // 2014 IEEE International Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC) Proceedings, May 12-15, 2014, Montevideo, Uruguay. New York: IEEE, 2014: 14467382.
- [18] Sun Q, Xu D. Self-calibration of multi-camera networks without feature correspondence between different cameras[J]. *Optik*, 2014, 125(13): 3331-3336.
- [19] Yin L, Wang X J, Ni Y B, et al. Extrinsic parameters calibration method of cameras with non-overlapping fields of view in airborne remote sensing[J]. *Remote Sensing*, 2018, 10(8): 1298.
- [20] Strauß T, Ziegler J, Beck J. Calibrating multiple cameras with non-overlapping views using coded checkerboard targets[C] // 17th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC), May 12-15, 2014, Montevideo, Uruguay. New York: IEEE, 2014: 14467382.
- [21] Zheng S Y, Huang R Y, Guo B Y, et al. Stereo-camera calibration with restrictive constraints[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2012, 41(6): 877-885.
- 郑顺义, 黄荣永, 郭宝云, 等. 附约束条件的立体相机标定方法[J]. *测绘学报*, 2012, 41(6): 877-885.
- [22] Wang Z S, Wu W, Xu X H, et al. Recognition and location of the internal corners of planar checkerboard calibration pattern image[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 185(2): 894-906.
- [23] Li J, Liu Z L. Efficient camera self-calibration method for remote sensing photogrammetry[J]. *Optics Express*, 2018, 26(11): 14213-14231.
- [24] Datchev I, Mazaheri M, Rondeel S, et al. Calibration of multi-camera photogrammetric systems[J]. *ISPRS-International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 2014, XL-1: 101-108.
- [25] Tommaselli A, Galo M, de Moraes M, et al. Generating virtual images from oblique frames[J]. *Remote Sensing*, 2013, 5(4): 1875-1893.
- [26] Habib A, Datchev I, Kwak E. Stability analysis for a multi-camera photogrammetric system[J]. *Sensors*, 2014, 14(8): 15084-15112.
- [27] Yan L, Wang Y D. Block adjustment of vehicle-borne multi-camera rig images using extended collinearity equations[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2017, 46(4): 460-467.
- 闫利, 王奕丹. 扩展共线方程结合车载组合全景相机影像区域网平差[J]. *测绘学报*, 2017, 46(4): 460-467.
- [28] Fraser C S. Digital camera self-calibration[J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 1997, 52(4): 149-159.
- [29] Ahn S J, Rauh W. Geometric least squares fitting of circle and ellipse[J]. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 1999, 13(7): 987-996.