

# 基于典型相关分析的点云配准算法

唐志荣<sup>1</sup>, 刘明哲<sup>1\*</sup>, 蒋悦<sup>2</sup>, 赵飞翔<sup>1</sup>, 赵成强<sup>1</sup>

<sup>1</sup>成都理工大学地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室, 四川 成都 610059;

<sup>2</sup>四川大学电气信息学院, 四川 成都 610065

**摘要** 提出了一种基于典型相关分析的点云配准算法。对目标点云和待配准点云进行中心化处理, 将其绕坐标原点进行转动, 两组点云满足各维度间相关系数平方值最大; 采用典型相关分析法, 对两组转动矩阵进行求解; 使用转动矩阵, 求解两点云间刚性变换的旋转矩阵和平移向量, 实现了点云的配准。利用协方差矩阵特征值的比例开方值, 对待配准点云进行等比例放大, 完成了仿射配准。当点云无序、数据存在遮挡、缺失不完整、放缩及有噪声干扰时, 仿真结果表明, 相比于其他几种算法, 所提算法能快速精确配准, 且稳定性良好。

**关键词** 测量; 点云配准; 典型相关分析; 相关系数; 仿射配准

中图分类号 TP391.9

文献标识码 A

doi: 10.3788/CJL201946.0404006

## Point Cloud Registration Algorithm Based on Canonical Correlation Analysis

Tang Zhirong<sup>1</sup>, Liu Mingzhe<sup>1\*</sup>, Jiang Yue<sup>2</sup>, Zhao Feixiang<sup>1</sup>, Zhao Chengqiang<sup>1</sup>

<sup>1</sup>State Key Laboratory of Geohazard Prevention and Geoenvironment Protection, Chengdu University of Technology, Chengdu, Sichuan 610059, China;

<sup>2</sup>School of Electrical Engineering and Information, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610065, China

**Abstract** A point cloud registration algorithm based on canonical correlation analysis is proposed. We centralize the target point cloud and the point cloud to be registered, and rotate it around the coordinate origin. The two sets of point clouds can satisfy the maximum square of the correlation coefficient between the dimensions. The two sets of rotation matrices are solved by typical correlation analysis method. The rotation matrix and the translation vector of the rigid transformation between the two points of the clouds are solved by the rotation matrix, and the registration of the point cloud is realized. We use the proportional square value of the eigenvalues of the covariance matrix to scale the registration point cloud proportionally, and complete the affine registration. The simulation results show that, compared with several other algorithms, the proposed algorithm can be quickly and accurately registered with good stability, when point clouds are out of order, occluded, missing, size scaling and interrupted by noise.

**Key words** measurement; point cloud registration; canonical correlation analysis; correlation coefficient; affine registration

**OCIS codes** 120.2040; 150.6910; 110.6880; 110.3010

## 1 引 言

配准技术是一种重要的数字检测技术, 其可用于无损检测、虚拟现实及机器人等诸多领域。特别在地面三维激光扫描中, 每次扫描得到的点云数据都是在以当前测量站为零点的局部坐标系内, 所以需要在不同的位置对待测区进行多次扫描, 为了获取完整的三维点云模型, 需要对在不同视角采集到的三维样本数据进行旋转和平移, 以此将采集到的

三维点云拼接为一个完整的点云。Besl 等<sup>[1]</sup>提出的最近点迭代 (ICP) 算法是被广泛应用于配准的经典算法, 其核心思想如下: 寻找两个点集的对应点, 并计算其变换矩阵, 但是这种算法的收敛性过分依赖于较好的初始值。因此, 许多学者对 ICP 算法进行了相应的改进, 或提出了初配准算法。Yang 等<sup>[2]</sup>提出了一种基于 7 维空间迭代的 Scale-ICP 算法, 该算法具有较快的收敛速度, 且能适应不同尺度的配准。虽然, 在迭代速度和配准精度上 ICP 算法的确得

收稿日期: 2018-11-20; 修回日期: 2018-12-15; 录用日期: 2018-12-29

\* E-mail: liumz@cdu.edu.cn

到了不同程度的改进,但改进的 ICP 算法仍依赖于迭代过程,导致算法仍然存在收敛比较缓慢的问题。文献[3]中提出了一种基于粒子群(PSO)算法的点云初配准方法,该算法能提高初始精度,但是需要的初始值越精确,需要的搜索时间就越多。遗传算法(GA)<sup>[4-6]</sup>具有较快的配准速度,但是在配准精度方面有待进一步提升,适合用作 ICP 算法的初配准。

此外,王畅等<sup>[7]</sup>提出了一种基于结构特征的点云快速配准方法,该算法在配准精度和配准效率方面都有一定的提高,但点云数据点缺失严重和交叉数据点不够,可能会使算法配准结果不理想,甚至可能失效。赵敏等<sup>[8]</sup>提出了一种基于  $l^p$  空间力学模型点云配准算法, $l$  表示线性赋范空间, $p$  表示空间维度,该算法收敛速度较快,效果优良,但是仍然需要结合经典 ICP 算法来寻找对应点对。Myronenko 等<sup>[9]</sup>提出了一种相干点漂移(CPD)算法,该算法结合 GMM 算法能对存在噪声及有异常值和缺失点的情况下的点云进行准确配准,但是会导致配准后的点云数据失真。

Yang 等<sup>[10]</sup>根据点云配准过程中的几何变换特性提出了一种全局最优解(Go-ICP)算法,将配准过程转变为三维欧式群的优化问题,采用 BnB(branch and bound)算法搜索全局最优解,然而,其旋转矩阵限定于三维旋转群空间,是否真能找到全局最优解,仍然值得研究。混合高斯模型(GMM)<sup>[11-16]</sup>对点云数据具有较好的拟合能力,配准精度较高,但是计算量大且计算时间较长。

王畅等<sup>[17]</sup>结合点云的统计学特性与形状的特征,提出一种带方差补偿的多向仿射配准算法,将求解点云未知放缩因子的问题转化为带方差超定非线性方程组的求解问题,该算法配准效率高,但配准精度有待提高。唐志荣等<sup>[18]</sup>提出一种基于多维混合 Cauchy 分布的点云配准算法,该算法将点云数据模型转换为多维混合 Cauchy 分布模型,用数据中心点进行配准,该算法能以较高的精度逼近点云分布模型,配准效果较好,但配准效率有待提升。

本文提出一种基于典型相关分析(CCA)的点云配准算法。对目标点云与待配准点云进行中心化转移到同一坐标系下,再分别绕坐标原点进行转动,使其各自到达行相关系数最大的位置。求出各自的转动矩阵,再根据两组转动矩阵求解出点云间的刚性变换旋转矩阵和平移向量。在实验中,与其他几种算法相比,即使在点云无序、数据存在遮挡、缺失不完整以及噪声环境下,本文算法可实现快速精确

配准,收敛速度快。并且旋转后,利用两点云对应的协方差特征值之间的均方根比值关系,完成点云的仿射配准。

## 2 基于 CCA 的点云配准算法

### 2.1 基于 CCA 的点云配准

经典 ICP 算法对目标点云  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  和待配准点云  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$  进行配准,点云元素均属于  $\mathbb{R}^3$ ,即实数域,两者之间的刚性几何变换为

$$p_i = Rq_j + t, \quad (1)$$

式中: $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  为旋转矩阵,且  $R^T R = I$ ;  $t \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  为平移向量; $i, j$  表示元素位置  $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m, m = n$ 。经典 ICP 算法对匹配点云初始位置的依赖性较高,若是没有比较好的初始位置,经典 ICP 算法可能难以完成点云间的精确配准。

在三维空间中,对点云进行旋转,会改变点云各维度数据间的相关系数。为了提高点云配准精度和速度,采用相关系数最大法对其进行配准。对目标点云  $P$  和待配准点云  $Q$  进行中心化,使得两个点云的中心均在原点处,从而得到点云  $\hat{P} = \{\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n\}$  和点云  $\hat{Q} = \{\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_m\}$ ,即

$$\hat{p}_i = p_i - \bar{p}, \hat{q}_j = q_j - \bar{q}, \quad (2)$$

式中: $\bar{p} = \sum_{i=1}^n p_i / n$  为目标点云  $P$  的均值点; $\bar{q} = \sum_{j=1}^m q_j / m$  为待配准点云  $Q$  的均值点。中心化后的点云  $\hat{P}$  与  $\hat{Q}$  满足

$$\hat{P} = R\hat{Q}. \quad (3)$$

绕坐标原点对点云  $\hat{P}$  和点云  $\hat{Q}$  进行转动,使其满足各自的行向量之间的相关系数平方最大,即

$$\begin{cases} \tilde{P} = W_P \hat{P} = \{w_{P1}^T \hat{P}, w_{P2}^T \hat{P}, w_{P3}^T \hat{P}\}^T = \{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3\}^T \\ \tilde{Q} = W_Q \hat{Q} = \{w_{Q1}^T \hat{Q}, w_{Q2}^T \hat{Q}, w_{Q3}^T \hat{Q}\}^T = \{\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3\}^T \end{cases}, \quad (4)$$

式中: $W_P = \{w_{P1}, w_{P2}, w_{P3}\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , 为正交矩阵,满足  $W_P W_P^T = W_P^T W_P = I$ ;  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$  均为  $n \times 1$  阶列向量; $W_Q = \{w_{Q1}, w_{Q2}, w_{Q3}\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , 为正交矩阵,满足  $W_Q W_Q^T = W_Q^T W_Q = I$ ;  $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3$  为  $m \times 1$  阶列向量。当点云  $\tilde{P}$  和点云  $\tilde{Q}$  都满足行相关系数最大时,有

$$\tilde{P} = \tilde{Q}. \quad (5)$$

经由上述关系可得

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{W}_P^{-1} \mathbf{W}_Q, \quad (6)$$

$$\mathbf{t}_0 = \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{R}_0 \bar{\mathbf{q}}. \quad (7)$$

为了得到较为精准的  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{t}$ , 将  $\mathbf{R}_0$  和  $\mathbf{t}_0$  作为其初始值带入代价函数, 代价函数为

$$\begin{cases} [\mathbf{R}^{(k+1)}, \mathbf{t}^{(k+1)}] = \underset{\mathbf{R}^{(k)} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \mathbf{t}^{(k)} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{R}^{(k)} \mathbf{Q} + \mathbf{t}^{(k)} \mathbf{I}_m - \mathbf{\Omega}^{(k)}\|_F^2 \\ \mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{R}_0, \mathbf{t}^{(0)} = \mathbf{t}_0 \end{cases}, k = 1, 2, \dots, N, \quad (8)$$

式中:  $\mathbf{\Omega}^{(k)}$  为采用三角剖分在点云  $\mathbf{P}$  中找出的与  $\mathbf{R}^{(k)} \mathbf{Q}$  相对应的点组成的点云;  $k$  为迭代次数;  $\|\cdot\|_F$  表示 Frobenius 范数。

## 2.2 仿射比例求取

当目标点云与待配准点云存在缩放的情况时, 点云间的平移向量存在一个比例系数, 其大小与缩放率相等, 需要对前面求取平移向量的方法做进一步改进。由于点云间的放缩不改变点云的旋转特性, 所以旋转矩阵  $\mathbf{R}_0$  的求取与 2.1 节的相同。转动之后得到的点云  $\tilde{\mathbf{P}}$  和点云  $\tilde{\mathbf{Q}}$  的协方差矩阵分别为

$$\begin{cases} \mathbf{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{P}}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{\mathbf{p}}_i - \bar{\tilde{\mathbf{p}}}) (\tilde{\mathbf{p}}_i - \bar{\tilde{\mathbf{p}}})^T}{n-1} \\ \mathbf{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{Q}}} = \frac{\sum_{j=1}^m (\tilde{\mathbf{q}}_j - \bar{\tilde{\mathbf{q}}}) (\tilde{\mathbf{q}}_j - \bar{\tilde{\mathbf{q}}})^T}{m-1} \end{cases}, \quad (9)$$

式中:  $\mathbf{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{P}}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  为点云  $\tilde{\mathbf{P}}$  的协方差矩阵;  $\mathbf{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{Q}}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  为点云  $\tilde{\mathbf{Q}}$  的协方差矩阵;  $\bar{\tilde{\mathbf{p}}} = \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{p}}_i / n$  表示点云  $\tilde{\mathbf{P}}$  的均值点;  $\bar{\tilde{\mathbf{q}}} = \sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{q}}_j / m$  表示点云  $\tilde{\mathbf{Q}}$  的均值点。由刚性变换可知, 旋转不改变点云的协方差矩阵的特征值, 所以有

$$\lambda_{\tilde{\mathbf{p}}}^{(o)} = \lambda_{\tilde{\mathbf{q}}}^{(o)}, o = 1, 2, 3, \quad (10)$$

式中:  $\lambda_{\tilde{\mathbf{p}}}^{(o)}$  为  $\mathbf{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{P}}}$  的第  $o$  个特征值;  $\lambda_{\tilde{\mathbf{q}}}^{(o)}$  为  $\mathbf{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{Q}}}$  的第  $o$  个特征值;  $o$  表示元素位置。点云  $\mathbf{P}$  和点云  $\mathbf{Q}$  之间的仿射尺寸为

$$k_o = \sqrt{\frac{\lambda_{\tilde{\mathbf{p}}}^{(o)}}{\lambda_{\tilde{\mathbf{q}}}^{(o)}}}, \quad (11)$$

式中:  $k_o$  为第  $o$  个对应特征值的仿射尺度值。为了使  $k$  的取值更精确, 这里取其均值

$$k = \sum_{o=1}^3 k_o / 3. \quad (12)$$

然后, 对待配准点云  $\mathbf{Q}$  的尺寸放大  $k$  倍:

$$\mathbf{Q}_k = k \mathbf{Q}, \quad (13)$$

式中:  $\mathbf{Q}_k = \{\mathbf{q}_{k1}, \mathbf{q}_{k2}, \dots, \mathbf{q}_{km}\} = \{k\mathbf{q}_1, k\mathbf{q}_2, \dots, k\mathbf{q}_m\}$ 。

从而, 相应的平移向量的求解式为

$$\mathbf{t}_{k0} = (\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{R}_0 \bar{\mathbf{q}}_k) / k, \quad (14)$$

式中:  $\bar{\mathbf{q}}_k = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{q}_{kj}$ 。再由 (8) 式求出  $\mathbf{t}_k$ 。

## 3 参数确定

由第 2 节可知, 需要求解的参数有  $\mathbf{W}_P$  和  $\mathbf{W}_Q$ 。利用求解出的  $\mathbf{W}_P$  和  $\mathbf{W}_Q$ , 再根据 (6) 式和 (7) 式就可以求出旋转矩阵和平移向量。为了使两组点云各自满足各维度间相关系数平方值 (相关性的平方值) 最大, 本研究选用 CCA 法对参数进行求解。

### 3.1 CCA 法

采用 CCA 法对点云  $\tilde{\mathbf{P}}$  和点云  $\tilde{\mathbf{Q}}$  间的各行向量求取相关系数:

$$\begin{cases} \rho_{(\tilde{\mathbf{p}}_i, \tilde{\mathbf{p}}_j)} = \frac{\operatorname{Cov}(\tilde{\mathbf{p}}_i, \tilde{\mathbf{p}}_j)}{\sigma_{\tilde{\mathbf{p}}_i} \sigma_{\tilde{\mathbf{p}}_j}} = \frac{\mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{P}}_i}^T \mathbf{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{P}}} \mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{P}}_j}}{\sqrt{\mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{P}}_i}^T \mathbf{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{P}}} \mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{P}}_i}} \sqrt{\mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{P}}_j}^T \mathbf{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{P}}} \mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{P}}_j}}}, \\ \rho_{(\tilde{\mathbf{q}}_i, \tilde{\mathbf{q}}_j)} = \frac{\operatorname{Cov}(\tilde{\mathbf{q}}_i, \tilde{\mathbf{q}}_j)}{\sigma_{\tilde{\mathbf{q}}_i} \sigma_{\tilde{\mathbf{q}}_j}} = \frac{\mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{Q}}_i}^T \mathbf{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{Q}}} \mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{Q}}_j}}{\sqrt{\mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{Q}}_i}^T \mathbf{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{Q}}} \mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{Q}}_i}} \sqrt{\mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{Q}}_j}^T \mathbf{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{Q}}} \mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{Q}}_j}} \end{cases}, \quad (15)$$

式中:  $\sigma_{(\cdot)}$  表示标准差;  $\mathbf{\Sigma}_P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  为点云  $\mathbf{P}$  的协方差矩阵;  $\mathbf{\Sigma}_Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  为点云  $\mathbf{Q}$  的协方差矩阵。由于随机变量乘以常数不会改变它们之间的相关系数, 故有以下约束条件

$$\begin{cases} \operatorname{Var}(\tilde{\mathbf{p}}_i) = 1, \operatorname{Var}(\tilde{\mathbf{p}}_j) = 1 \\ \operatorname{Var}(\tilde{\mathbf{q}}_i) = 1, \operatorname{Var}(\tilde{\mathbf{q}}_j) = 1 \end{cases}, \quad (16)$$

式中:  $\operatorname{Var}$  表示求方差。

根据数学分析中的极值条件, 引入拉格朗日乘数, 可得

$$\begin{cases} \varphi(\tilde{\mathbf{p}}_i, \tilde{\mathbf{p}}_j) = \mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{P}}_i}^T \mathbf{\Sigma}_P \mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{P}}_j} - \frac{\nu_P}{2} (\mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{P}}_i}^T \mathbf{\Sigma}_P \mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{P}}_i} - 1) - \frac{\gamma_P}{2} (\mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{P}}_j}^T \mathbf{\Sigma}_P \mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{P}}_j} - 1) \\ \varphi(\tilde{\mathbf{q}}_i, \tilde{\mathbf{q}}_j) = \mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{Q}}_i}^T \mathbf{\Sigma}_Q \mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{Q}}_j} - \frac{\nu_Q}{2} (\mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{Q}}_i}^T \mathbf{\Sigma}_Q \mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{Q}}_i} - 1) - \frac{\gamma_Q}{2} (\mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{Q}}_j}^T \mathbf{\Sigma}_Q \mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{Q}}_j} - 1) \end{cases}, \quad (17)$$

式中:  $\nu_P, \gamma_P, \nu_Q, \gamma_Q$  为正则化因子。分别对  $\mathbf{w}_{P_i}, \mathbf{w}_{P_j}$  和  $\mathbf{w}_{Q_i}, \mathbf{w}_{Q_j}$  求偏导, 并令导数为零, 得到的极值条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(\tilde{\mathbf{p}}_i, \tilde{\mathbf{p}}_j)}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_i} = \mathbf{\Sigma}_P \mathbf{w}_{P_j} - \lambda_P \mathbf{\Sigma}_P \mathbf{w}_{P_i} = 0 \\ \frac{\partial \varphi(\tilde{\mathbf{p}}_i, \tilde{\mathbf{p}}_j)}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_j} = \mathbf{\Sigma}_P \mathbf{w}_{P_i} - \lambda_P \mathbf{\Sigma}_P \mathbf{w}_{P_j} = 0 \\ \frac{\partial \varphi(\tilde{\mathbf{q}}_i, \tilde{\mathbf{q}}_j)}{\partial \tilde{\mathbf{q}}_i} = \mathbf{\Sigma}_Q \mathbf{w}_{Q_j} - \lambda_Q \mathbf{\Sigma}_Q \mathbf{w}_{Q_i} = 0 \\ \frac{\partial \varphi(\tilde{\mathbf{q}}_i, \tilde{\mathbf{q}}_j)}{\partial \tilde{\mathbf{q}}_j} = \mathbf{\Sigma}_Q \mathbf{w}_{Q_i} - \lambda_Q \mathbf{\Sigma}_Q \mathbf{w}_{Q_j} = 0 \end{cases}, \quad (18)$$

可以得出

$$\rho(\tilde{\mathbf{p}}_i, \tilde{\mathbf{p}}_j) = \mathbf{w}_{P_i}^T \mathbf{\Sigma}_P \mathbf{w}_{P_j}, \rho(\tilde{\mathbf{q}}_i, \tilde{\mathbf{q}}_j) = \mathbf{w}_{Q_i}^T \mathbf{\Sigma}_Q \mathbf{w}_{Q_j}. \quad (19)$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\begin{cases} \rho_{[\tilde{\mathbf{p}}_i, \tilde{\mathbf{p}}_j]}^2 = (\mathbf{w}_{P_i}^T \mathbf{\Sigma}_P \mathbf{w}_{P_j})^2 \leq (\mathbf{w}_{P_i}^T \mathbf{w}_{P_i}) [(\mathbf{\Sigma}_P \mathbf{w}_{P_j})^T (\mathbf{\Sigma}_P \mathbf{w}_{P_j})] = \mathbf{w}_{P_i}^T \mathbf{\Sigma}_P^T \mathbf{\Sigma}_P \mathbf{w}_{P_j} \\ \rho_{[\tilde{\mathbf{q}}_i, \tilde{\mathbf{q}}_j]}^2 = (\mathbf{w}_{Q_i}^T \mathbf{\Sigma}_Q \mathbf{w}_{Q_j})^2 \leq (\mathbf{w}_{Q_i}^T \mathbf{w}_{Q_i}) [(\mathbf{\Sigma}_Q \mathbf{w}_{Q_j})^T (\mathbf{\Sigma}_Q \mathbf{w}_{Q_j})] = \mathbf{w}_{Q_i}^T \mathbf{\Sigma}_Q^T \mathbf{\Sigma}_Q \mathbf{w}_{Q_j} \end{cases}. \quad (20)$$

由矩阵范数的相容性可得

$$\begin{cases} \rho_{[\tilde{\mathbf{p}}_i, \tilde{\mathbf{p}}_j]}^2 \max = \max(\mathbf{w}_{P_j}^T \mathbf{\Sigma}_P^T \mathbf{\Sigma}_P \mathbf{w}_{P_j}) = \max_{\|\mathbf{w}_{P_j}\|=1} \|\mathbf{\Sigma}_P \mathbf{w}_{P_j}\|_2^2 = \lambda_{P_j}^* \\ \rho_{[\tilde{\mathbf{q}}_i, \tilde{\mathbf{q}}_j]}^2 \max = \max(\mathbf{w}_{Q_j}^T \mathbf{\Sigma}_Q^T \mathbf{\Sigma}_Q \mathbf{w}_{Q_j}) = \max_{\|\mathbf{w}_{Q_j}\|=1} \|\mathbf{\Sigma}_Q \mathbf{w}_{Q_j}\|_2^2 = \lambda_{Q_j}^* \end{cases}, \quad (21)$$

式中:  $\|\cdot\|_2$  表示 L-2 范数;  $\lambda_{P_j}^*$  为  $\mathbf{\Sigma}_P^T \mathbf{\Sigma}_P$  的特征值;  $\lambda_{Q_j}^*$  为  $\mathbf{\Sigma}_Q^T \mathbf{\Sigma}_Q$  的特征值。可以得出

$$\mathbf{\Sigma}_P^T \mathbf{\Sigma}_P \mathbf{w}_{P_j} = \lambda_{P_j}^* \mathbf{w}_{P_j}, \mathbf{\Sigma}_Q^T \mathbf{\Sigma}_Q \mathbf{w}_{Q_j} = \lambda_{Q_j}^* \mathbf{w}_{Q_j}, \quad (22)$$

即  $\mathbf{w}_{P_j}$  为  $\mathbf{\Sigma}_P^T \mathbf{\Sigma}_P$  的特征值  $\lambda_{P_j}^*$  对应的特征向量,  $\mathbf{w}_{Q_j}$  为  $\mathbf{\Sigma}_Q^T \mathbf{\Sigma}_Q$  的特征值  $\lambda_{Q_j}^*$  对应的特征向量。到此便求解出初始的  $\mathbf{W}_P^{(0)}$  和  $\mathbf{W}_Q^{(0)}$ 。

### 3.2 参数校准

由于可能存在负相关的情况, 所以采用均值向量对求解出的  $\mathbf{W}_P^{(0)}$  和  $\mathbf{W}_Q^{(0)}$  进行校准。将点云  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  的均值点作为目标向量, 当点云无序、数据存在遮挡、缺失不完整以及有噪声干扰时, 均值向量也比较稳定。采用符号函数 sign 对  $\mathbf{W}_P^{(0)}$  和  $\mathbf{W}_Q^{(0)}$  进行方向校准, 即

$$\mathbf{w}_{P_o}^{(1)} = \text{sign}[\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{w}_{P_o}^{(0)}] \mathbf{w}_{P_o}^{(0)}, \mathbf{w}_{Q_o}^{(1)} = \text{sign}[\bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{w}_{Q_o}^{(0)}] \mathbf{w}_{Q_o}^{(0)}, \quad (23)$$

可得到  $\mathbf{W}_P^{(1)} = \{\mathbf{w}_{P_1}^{(1)}, \mathbf{w}_{P_2}^{(1)}, \mathbf{w}_{P_3}^{(1)}\}$  和  $\mathbf{W}_Q^{(1)} = \{\mathbf{w}_{Q_1}^{(1)}, \mathbf{w}_{Q_2}^{(1)}, \mathbf{w}_{Q_3}^{(1)}\}$ 。分别求出  $\mathbf{W}_P^{(1)}, \mathbf{W}_Q^{(1)}$  与  $\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}$  的夹角余弦值:

$$\begin{cases} \theta_{P_o}^{(0)} = \cos \langle \mathbf{w}_{P_o}^{(1)}, \bar{\mathbf{p}} \rangle = \frac{[\mathbf{w}_{P_o}^{(1)}]^T \bar{\mathbf{p}}}{\|\mathbf{w}_{P_o}^{(1)}\| \|\bar{\mathbf{p}}\|} \\ \theta_{Q_o}^{(0)} = \cos \langle \mathbf{w}_{Q_o}^{(1)}, \bar{\mathbf{q}} \rangle = \frac{[\mathbf{w}_{Q_o}^{(1)}]^T \bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{w}_{Q_o}^{(1)}\| \|\bar{\mathbf{q}}\|} \end{cases}, \quad (24)$$

式中:  $\|\cdot\|$  表示向量模长。根据(24)式可得到

$$\theta_P^{(0)} = \{\theta_{P_1}^{(0)}, \theta_{P_2}^{(0)}, \theta_{P_3}^{(0)}\}, \theta_Q^{(0)} = \{\theta_{Q_1}^{(0)}, \theta_{Q_2}^{(0)}, \theta_{Q_3}^{(0)}\}. \quad (25)$$

分别对  $\theta_P^{(0)}$  和  $\theta_Q^{(0)}$  中的元素按从大到小依次排列, 得到

$$\theta_P^{(1)} = \{\theta_{P_1}^{(1)}, \theta_{P_2}^{(1)}, \theta_{P_3}^{(1)}\}, \theta_Q^{(1)} = \{\theta_{Q_1}^{(1)}, \theta_{Q_2}^{(1)}, \theta_{Q_3}^{(1)}\}, \quad (26)$$

式中:  $\theta_{P_1}^{(1)} \geq \theta_{P_2}^{(1)} \geq \theta_{P_3}^{(1)}, \theta_{Q_1}^{(1)} \geq \theta_{Q_2}^{(1)} \geq \theta_{Q_3}^{(1)}$ 。按照  $\theta_P^{(1)}, \theta_Q^{(1)}$  的排列位置, 分别对  $\mathbf{W}_P^{(1)}, \mathbf{W}_Q^{(1)}$  中相应位置上的列向量进排序, 可得到  $\mathbf{W}_P^{(2)} = \{\mathbf{w}_{P_1}^{(2)}, \mathbf{w}_{P_2}^{(2)}, \mathbf{w}_{P_3}^{(2)}\}$ ,  $\mathbf{W}_Q^{(2)} = \{\mathbf{w}_{Q_1}^{(2)}, \mathbf{w}_{Q_2}^{(2)}, \mathbf{w}_{Q_3}^{(2)}\}$ 。由于最大余弦值对应特征向量的偏差可能较大, 所以利用另外两组小的余弦值对应的列向量的叉乘来代替最大余弦值对应的特征向量, 即

$$\mathbf{w}_{P_1}^{(3)} = \mathbf{w}_{P_2}^{(2)} \times \mathbf{w}_{P_3}^{(2)}, \mathbf{w}_{Q_1}^{(3)} = \mathbf{w}_{Q_2}^{(2)} \times \mathbf{w}_{Q_3}^{(2)}. \quad (27)$$

最后得到  $\mathbf{W}_P = \{\mathbf{w}_{P_1}^{(3)}, \mathbf{w}_{P_2}^{(2)}, \mathbf{w}_{P_3}^{(2)}\}$ ,  $\mathbf{W}_Q = \{\mathbf{w}_{Q_1}^{(3)}, \mathbf{w}_{Q_2}^{(2)}, \mathbf{w}_{Q_3}^{(2)}\}$ 。本研究算法流程图如图 1 所示。

本研究所用算法为 CCA 法, 该方法的输入和输出如下。输入: 目标点云  $\mathbf{P}$  和待配准点云  $\mathbf{Q}$ , 其中  $\mathbf{Q}$  可以存在无序排列和随机丢失; 输出: 配准后的点云  $\mathbf{Q}$ , 以及旋转矩阵  $\mathbf{R}$ 、平移向量  $\mathbf{t}$  或仿射平移向量  $\mathbf{t}_k$ 。算法具体步骤如下:

①通过(2)式对点云  $\mathbf{P}$  和点云  $\mathbf{Q}$  去中心化, 得到点云  $\hat{\mathbf{P}}$  和点云  $\hat{\mathbf{Q}}$ ;



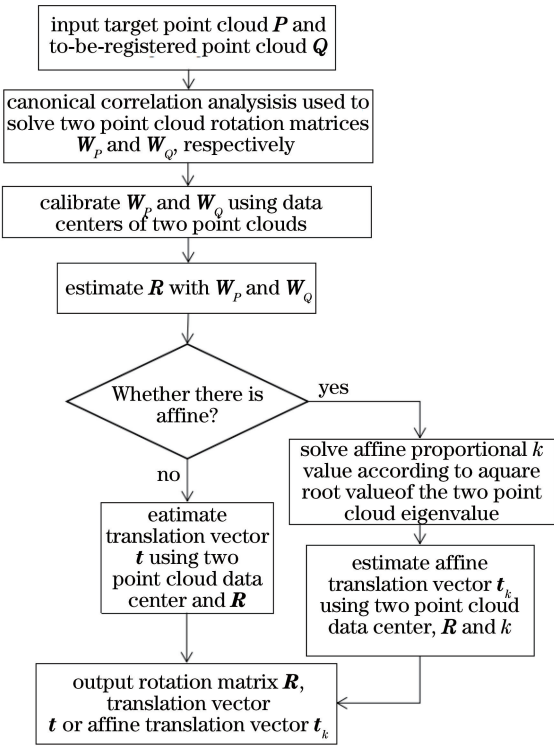


图 1 算法流程图

Fig. 1 Flow chart of algorithm

②根据(22)~(27)式分别求解出转动矩阵  $W_P$

和  $W_Q$ ;

③由(6)式求出旋转矩阵  $R_0$ ,由(7)式求出平移

向量  $t_0$  或根据(9)~(14)式求出仿射平移向量  $t_{k0}$ ;

④由(8)式求出旋转矩阵  $R$  和平移向量  $t$  或  $t_k$ 。

## 4 实 验

采用 Stanford 大学提供的 Armadillo(34526)、Bunny (31607)、Cat (10000)、Dragon (43775)、Elephant(24955)和 Horse(48485)三维点云数据进

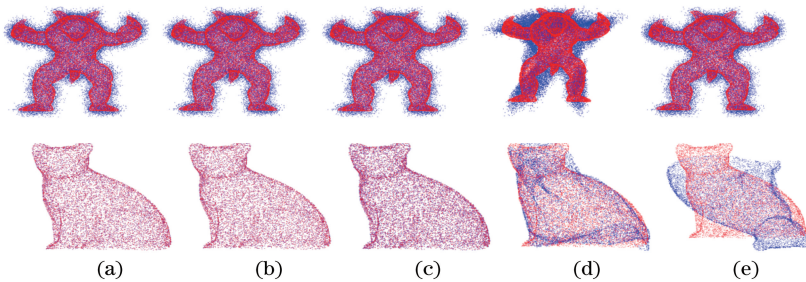


图 3 各算法配准效果。(a) CCA;(b) GA+ICP;(c) GA+Scale-ICP;(d) CPD;(e) Go-ICP

Fig. 3 Registration effect of each algorithm. (a) CCA; (b) GA+ICP; (c) GA+Scale-ICP; (d) CPD; (e) Go-ICP

各算法的配准时间和配准精度如表 1 所示。从图 3 和表 1 可以看出,在 Armadillo 点云带有 20 dB 高斯白噪声的情况下,CCA 算法与 GA + ICP、

行仿真。仿真计算是在 MATLAB 2017a 版本、i7-6700HQ 四核处理器和 GTX965M 下进行的。

### 4.1 带有高斯白噪声下的配准

通常认为点云数据在一一对应的情况下不存在遮挡和缺失不完整的情况,但在实际中由于环境的因素可能会存在噪声的干扰,为了验证所提算法具有抗干扰能力,仿真中给 Armadillo 点云加上 20 dB 高斯白噪声对点云进行偏移,Cat 点云加上 50 dB 高斯白噪声对原有点云进行偏移,通过对点云的随机旋转和平移得到待配准点云,红色表示目标点云,蓝色表示待配准点云(彩图请见电子版)。点云配准前的初始状态如图 2 所示。

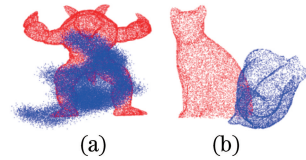


图 2 点云的初始状态。(a) Armadillo;(b) Cat

Fig. 2 Initial state of point clouds.

(a) Armadillo; (b) Cat

本研究先采用 GA 算法分别对 Scale-ICP 算法和 ICP 算法进行初配,在此条件下,将所提算法与 Scale-ICP、ICP、CPD 和 Go-ICP 算法的配准效果进行比较,如图 3 所示。

为验证各算法配准精度,采用均方根误差 (RMSE) 对配准精度进行评价,将均方根误差定义为

$$R_{MSE} = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(x_i^{(Q)} - x_i^{(P)})^2 + (y_i^{(Q)} - y_i^{(P)})^2 + (z_i^{(Q)} - z_i^{(P)})^2] \right\}^{1/2}, \quad (28)$$

式中: $P$  和  $Q$  表示点云。

GA+Scale-ICP、CPD 和 Go-ICP 算法相比,配准效率分别提升了 99.6%、48.6%、98.3%、88.1%;CCA 算法与 GA + ICP 算法和 GA + Scale-ICP 算法配准

表 1 5 种算法的配准时间和配准误差

Table 1 Registration time and error of 5 algorithms

Algorithm	Time /s		RMSE /mm	
	Armadillo	Cat	Armadillo	Cat
CCA	3.7	1.1	2.0332	$8.5744 \times 10^{-4}$
GA+ICP	223.8	16.4	2.0327	$8.5718 \times 10^{-4}$
GA+Scale-ICP	7.2	1.9	2.0337	0.0016
CPD	215.9	32.4	3.4036	0.0169
Go-ICP	31.2	26.6	2.1488	0.0326

精度近似相等,配准效果相当,比 Go-ICP 算法的配准精度高出 5.38%,CPD 算法配准精度和配准效果最差。在 Cat 点云带有 50dB 高斯白噪声的情况下,CCA 算法与 GA+ICP、GA+Scale-ICP、CPD 和 Go-ICP 算法相比,配准速度分别提高了 93.3%、42.1%、96.6%、95.8%;CCA 算法与 GA+ICP 算法的配准精度差值在  $10^{-7}$  mm 级;CPD 算法导致了待

配准点云的形态失真;GA+Scale-ICP 算法的配准精度与 CCA 算法的相比有所下降;Go-ICP 算法不能完成对 Cat 点云的配准。

#### 4.2 带有高斯白噪声且不同数据丢失下的配准

多数情况下,点云数据存在遮挡和缺失不完整。在实验中,对待配准数据 Bunny 和 Dragon 点云数据分别进行 15%、20% 和 25% 的随机丢失,且前者添加 20 dB 的高斯白噪声,后者添加 50 dB 的高斯白噪声,利用高斯白噪声对点云进行偏移。当点云数据存在遮挡和缺失时,由于缺乏对应关系,GA 算法不能直接用于点云的配准。因此,采用本研究的 CCA 算法对 ICP 算法和 Scale-ICP 算法进行初始配准,在相同条件下用 CCA 算法与 ICP 算法、Scale-ICP 算法、Go-ICP 算法和 CPD 算法进行比较。配准后效果如图 4 和图 5 所示。

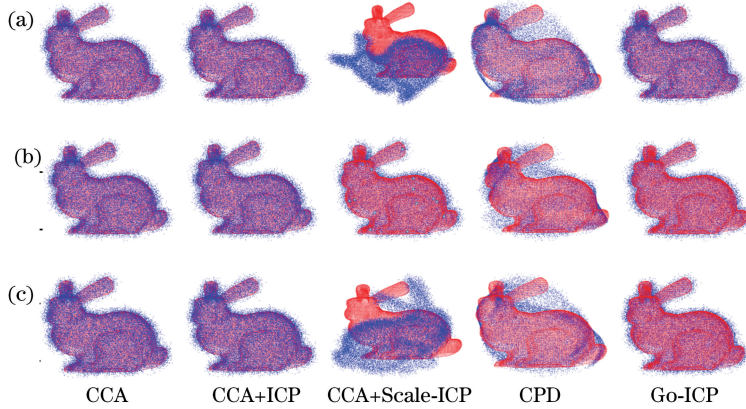


图 4 Bunny 点云配准效果。(a)数据丢失 15%;(b)数据丢失 20%;(c)数据丢失 25%

Fig. 4 Registration effects of Bunny point cloud. (a) 15% data loss; (b) 20% data loss; (c) 25% data loss

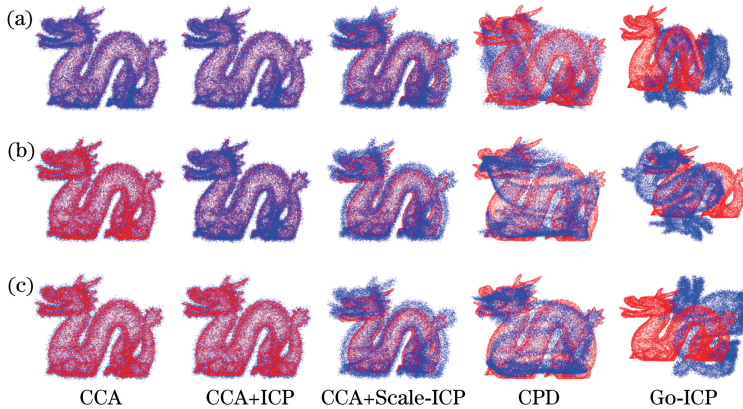


图 5 Dragon 点云配准效果。(a)数据丢失 15%;(b)数据丢失 20%;(c)数据丢失 25%

Fig. 5 Registration effects of Dragon point cloud. (a) 15% data loss; (b) 20% data loss; (c) 25% data loss

当实验数据存在缺失时,点云数据的排列顺序不再一一对应,为便于比较各算法的配准性能,引入另一种均方根误差:

$$R_{MSE} = \left\{ \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} \min_j [(x_i^{(Q)} - x_j^{(P)})^2 + (y_i^{(Q)} - y_j^{(P)})^2 + (z_i^{(Q)} - z_j^{(P)})^2] \right\}^{1/2}, \quad (29)$$

式中:  $m$  表示丢失数据点的数目, 当  $m=0$  时, 即为上一种均方根误差。各算法的配准均方根误差和配准时间如图 6 所示。

由图 4、图 5 和 6 可知, ICP 算法与 CCA 算法的均方根误差几乎一样, 但 CCA 算法对 Bunny 点云和 Dragon 点云的配准效率有很大的提高; 与

Scale-ICP 算法相比, CCA 算法对两点云的配准效率很快, 但是配准精度比较差; CPD 算法对两点云的配准效果都比 CCA 算法的差, 且 CPD 算法改变了待配准点云的形状; Go-ICP 算法对 Bunny 点云有较好配准效果, 但对 Dragon 点云不能进行配准, 表明 Go-ICP 算法稳健性较差。

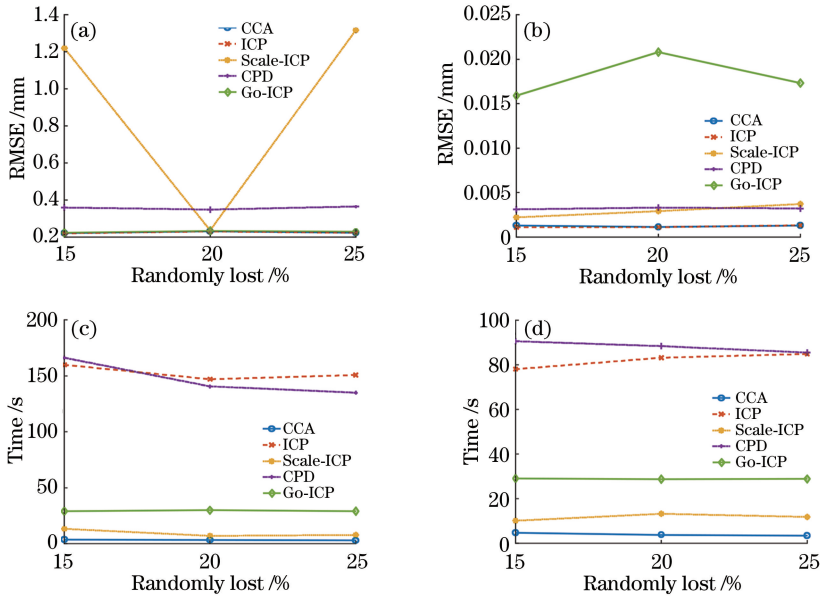


图 6 5 种算法的配准误差和时间。(a) Bunny 点云配准误差; (b) Dragon 点云配准误差; (c) Bunny 点云配准时间; (d) Dragon 点云配准时间

Fig. 6 Registration error and registration time of 5 algorithms. (a) Registration error of Bunny point cloud; (b) registration error of Dragon point cloud; (c) registration time of Bunny point cloud; (d) registration time of Dragon point cloud

### 4.3 仿射配准

通常在实际扫描数据的过程中, 被扫描物体、扫描器件的型号不同和扫描距离不相同等因素可能会造成扫描出来的数据尺寸大小存在差异。为验证 CCA 算法具有仿射配准的能力, 对 Elephant 点云进行随机旋转得到待配准点云, 将待配准点云数据缩小为原来的 1/3, 再加 30 dB 高斯白噪声对点云进行偏移处理。对 Horse 点云进行随机旋转, 得到待配准点云, 对待配准点云数据进行放大 1.5 倍且随机丢失 25% 处理。点云初始状态如图 7 所示。

准比较, 配准效果如图 8 所示。

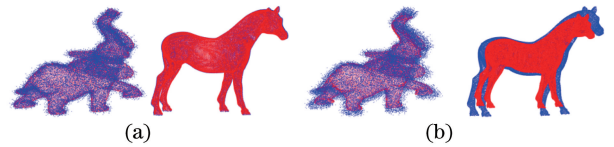


图 8 两种算法仿射配准效果。(a) CCA; (b) Scale-ICP

Fig. 8 Affine registration effects of two algorithms.

(a) CCA; (b) Scale-ICP

两种算法的均方根误差和配准时间如表 2 所示。从图 8 和表 2 可以看出, 在有噪声和数据缺失及待配准点云存在放缩的情况下, CCA 算法在配准精度和配准效率上都优于 Scale-ICP 算法, 且 CCA 算法比 Scale-ICP 算法具有更好的稳定性。对于 Elephant 点云在有 30 dB 高斯白噪声的环境下, CCA 算法配准比 Scale-ICP 算法配准快 0.2 s, 配准精度相对于 Scale-ICP 算法提高了 44.9%; 对于 Horse 点云在数据随机丢失 25% 的情况下, CCA 算法配准效率比 Scale-ICP 算法提升了 38.2%, 配准精度相对 Scale-ICP 算法提高了 85.1%。

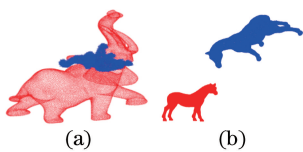


图 7 点云的初始状态。(a) Elephant; (b) Horse

Fig. 7 Initial state of point clouds.

(a) Elephant; (b) Horse



表 2 两种配准算法的均方根误差和配准时间

Table 2 RMSE and registration time of two registration algorithms

Algorithm	Time /s		RMSE /mm	
	Elephant	Horse	Elephant	Horse
CCA	2.6	4.2	0.0203	$5.0824 \times 10^{-4}$
Scale-ICP	2.8	6.8	0.0369	0.0034

4.4 实物数据配准

为验证所提算法的实用性,采用三维激光扫描仪获取两组实物点云数据,两组实物图如图 9 所示。

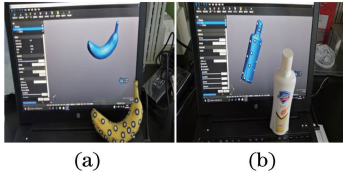


图 9 两组实物图。(a) A;(b) B  
Fig. 9 Two sets of physical pictures.  
(a) A; (b) B

A 目标点云的扫描数据有 16873 个点,待配准点云有 16618 个点,对其添加 20 dB 的高斯白噪声对点云进行偏移。从不同角度扫描任意两组数据 B 点云进行配准。B 目标点云的扫描数据有 21469 个点,待配准点云的扫描数据有 21430 个点。两组扫描点云的初始状态如图 10 所示。

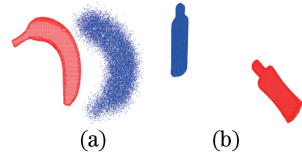


图 10 两组点云初始状态。(a) A 点云;(b) B 点云  
Fig. 10 Initial state of two sets of point clouds.  
(a) A point cloud; (b) B point cloud

采用本研究的 CCA 算法先对 ICP 算法和 Scale-ICP 算法实现初始配准。在同样的配准条件下,对 ICP 算法、Scale-ICP 算法、Go-ICP 算法和 CPD 算法进行比较。配准效果如图 11 所示。

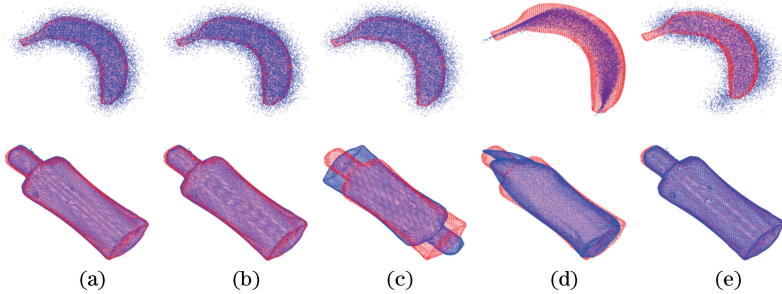


图 11 5 种算法的配准效果。(a) CCA;(b) CCA+ICP;(c) CCA+Scale-ICP;(d) CPD;(e) Go-ICP  
Fig. 11 Registration effects of five algorithms. (a) CCA; (b) CCA+ICP; (c) CCA+Scale-ICP; (d) CPD; (e) Go-ICP

5 种算法的配准精度和配准时间如表 3 所示。

表 3 5 种算法的配准误差和时间

Table 3 Registration error and time of 5 algorithms

Algorithm	Time /s		RMSE /mm	
	A point cloud	B point cloud	A point cloud	B point cloud
CCA	1.9	3.8	4.1680	0.4251
CAA+ICP	317.8	375.8	4.1447	0.3755
CAA+Scale-ICP	10.3	26.7	5.5035	3.2537
CPD	43.0	62.3	5.9309	1.3431
Go-ICP	27.6	27.7	4.9031	0.4706

从图 11 和表 3 中可以明确看出,CCA 算法配准精度与 ICP 算法配准精度的差值在 0.01 mm 级别,且较之于 ICP 算法配准时间大幅度缩短;Scale-ICP 算法在 CCA 算法配准的基础上并没有进一步提高配准精度,反而使配准精度变得很低;CPD 算法虽然能将两组点云配准,但也导致待配准点云失

真;Go-ICP 算法对 A 点云的配准效果有明显的倒位,对 B 点云的配准精度与 CCA 算法的相当,但配准时间是 CCA 算法的 7 倍。

5 结 论

针对散乱点云提出了一种基于 CCA 的配准算法。所提算法能在无任何先验信息和点云数据部存在部分重叠、缺失且带有噪声的情况下实现自动配准。分别先对目标点云和待配准点云进行中心化处理,然后绕坐标原点进行转动,获得了两组点云各自满足各维度间相关系数平方值最大;再使用转动矩阵求解了两点云间刚性变换的旋转矩阵和平移向量,实现了点云的配准。依据协方差矩阵对应特征值的比例开方值,对待配准点云进行等比例放大,完成了仿射配准。实验验证所提算法在配准精度上和经典 ICP 算法相当,但配准效率有较大提升;与 Scale-ICP 算法、Go-ICP 算法和 CPD 算法相比,所

提 CCA 算法具有较好的稳定性。

## 参 考 文 献

- [1] Besl P J, McKay N D. A method for registration of 3-D shapes [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14 (2): 239-256.
- [2] Ying S H, Peng J G, Du S Y, *et al.* A scale stretch method based on ICP for 3D data registration [J]. IEEE Transactions on Automation Science & Engineering, 2009, 6(3): 559-565.
- [3] Hsu C C, Chang H E, Lu Y Y. Map building of unknown environment using PSO-tuned enhanced iterative closest point algorithm [C] // 2013 International Conference on System Science & Engineering (ICSSE), July 4-6, 2013, Budapest, Hungary. New York: IEEE, 2013: 279-284.
- [4] Ji S, Ren Y, Ji Z, *et al.* An improved method for registration of point cloud [J]. Optik, 2017, 140: 451-458.
- [5] Yan S J, Zhou Y F, Peng F Y, *et al.* Research on the localisation of the workpieces with large sculptured surfaces in NC machining [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2004, 23(5/6): 429-435.
- [6] Huang A W, Sullivan J M, Kulkarni P, *et al.* Automatic 3D image registration using voxel similarity measurements based on a genetic algorithm [J]. Proceedings of SPIE, 2006, 6144: 968-976.
- [7] Wang C, Shu Q, Yang Y X, *et al.* Quick registration algorithm of point clouds using structure feature [J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38 (09): 0911005.  
王畅, 舒勤, 杨赞秀, 等. 利用结构特征的点云快速配准算法 [J]. 光学学报, 2018, 38(09): 0911005.
- [8] Zhao M, Shu Q, Chen W, *et al.* Three-dimensional point cloud registration algorithm based on  $l^p$  spatial mechanics model [J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38 (10): 1010005.  
赵敏, 舒勤, 陈蔚, 等. 基于  $l^p$  空间力学模型的三维点云配准算法 [J]. 光学学报, 2018, 38 (10): 1010005.
- [9] Myronenko A, Song X B. Point set registration: coherent point drift [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2010, 32 (12): 2262-2275.
- [10] Yang J L, Li H D, Campbell D, *et al.* Go-ICP: a globally optimal solution to 3D ICP point-set registration [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2016, 38 (11): 2241-2254.
- [11] Campbell D, Petersson L. GOGMA: globally-optimal Gaussian mixture alignment [C] // 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), June 27-30, 2016, Las Vegas, NV, USA. New York: IEEE, 2016: 5685-5694.
- [12] Campbell D, Petersson L. An adaptive data representation for robust point-set registration and merging [C] // 2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV), December 7-13, 2015, Santiago, Chile. New York: IEEE, 2015: 4292-4300.
- [13] Jian B, Vemuri B C. Robust point set registration using Gaussian mixture models [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2011, 33(8): 1633-1645.
- [14] Chui H, Rangarajan A. A feature registration framework using mixture models [C] // Proceedings IEEE Workshop on Mathematical Methods in Biomedical Image Analysis. MMBIA-2000 (Cat. no. PR00737), June 12-12 2000, Hilton Head Island, SC, USA. New York: IEEE, 2000: 190-197.
- [15] Tsin Y, Kanade T. A correlation-based approach to robust point set registration [M] // Pajdla T, Matas J. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004: 558-569.
- [16] Li Q S, Xiong R, Vidal-Calleja T. A GMM based uncertainty model for point clouds registration [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2017, 91: 349-362.
- [17] Wang C, Shu Q, Yang Y X, *et al.* Point cloud registration in multidirectional affine transformation with variance compensation [J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(2): 0215002.  
王畅, 舒勤, 杨赞秀, 等. 带方差补偿的多向仿射变换点云配准算法 [J]. 光学学报, 2019, 39 (2): 0215002.
- [18] Tang Z R, Liu M Z, Wang C, *et al.* Point cloud registration algorithm based on multi-dimensional mixed Cauchy distribution [J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(1): 0115005.  
唐志荣, 刘明哲, 王畅, 等. 基于多维混合柯西分布的点云配准 [J]. 光学学报, 2019, 39(1): 0115005.