

# 基于拉普拉斯本征函数的 Woofer-Tweeter 自适应光学系统解耦控制算法

程涛<sup>1,2,3\*\*</sup>, 刘文劲<sup>1,3</sup>, 杨康健<sup>1,2,3</sup>, 文良华<sup>1,2,3</sup>, 何星<sup>1,3</sup>, 董理治<sup>1,3</sup>, 杨平<sup>1,3\*</sup>, 许冰<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>中国科学院自适应光学重点实验室, 四川 成都 610209;

<sup>2</sup>中国科学院大学, 北京 100049;

<sup>3</sup>中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209

**摘要** 为了实现对 Woofer-Tweeter 双变形镜自适应光学系统的解耦控制, 提出了一种基于拉普拉斯本征函数的解耦控制算法。通过求解不同齐次 Neumann 边界条件下的拉普拉斯本征方程, 获得不同光瞳区域下自身和一阶偏导数均正交的拉普拉斯本征函数。利用不同光瞳区域下的拉普拉斯本征函数, 实现了对不同光瞳区域下 Woofer-Tweeter 双变形镜自适应光学系统的解耦控制。此外, 拉普拉斯本征函数的一阶偏导数具备正交性, 这使得在构建 Tweeter 耦合抑制矩阵时无需对 Tweeter 驱动器响应函数面形进行逐个测量, 极大简化了 Tweeter 耦合抑制矩阵的构造过程。采用 Woofer-Tweeter 双变形镜自适应光学系统对该算法的有效性进行了实验验证, 结果表明: 基于拉普拉斯本征函数的解耦控制算法能够实现对 Woofer 和 Tweeter 同步控制, 并能有效地抑制 Woofer 和 Tweeter 之间的耦合误差。

**关键词** 自适应光学; 双变形镜; 解耦控制; 拉普拉斯本征函数

中图分类号 O439

文献标识码 A

doi: 10.3788/CJL201845.0905003

## Decoupling Control Algorithm Based on Laplacian Eigenfunction for Woofer-Tweeter Adaptive Optics System

Cheng Tao<sup>1,2,3\*\*</sup>, Liu Wenjin<sup>1,3</sup>, Yang Kangjian<sup>1,2,3</sup>, Wen Lianghua<sup>1,2,3</sup>,  
He Xing<sup>1,3</sup>, Dong Lizhi<sup>1,3</sup>, Yang Ping<sup>1,3\*</sup>, Xu Bing<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Key Laboratory on Adaptive Optics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China;

<sup>2</sup>University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

<sup>3</sup>Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China

**Abstract** In order to realize the decoupling control for the Woofer-Tweeter adaptive optics system, we propose a decoupling control algorithm based on Laplacian eigenfunction. By solving Laplacian eigen equations under different homogeneous Neumann boundary conditions, we can obtain Laplacian eigenfunctions which are orthogonal to themselves and whose first-order partial derivatives are orthogonal under different pupil regions. Using the Laplacian eigenfunctions under different pupil regions, we achieve the decoupling control for the Woofer-Tweeter adaptive optics system in different pupil regions. In addition, the first-order partial derivatives of the Laplacian eigenfunction is orthogonality, so that it is not necessary to measure the response function surface shape of Tweeter actuator to construct a constraint matrix for Tweeter. A Woofer-Tweeter adaptive optics system is used to verify the validity of this algorithm. The experimental results show that the decoupling control algorithm based on Laplacian eigenfunctions can synchronously control Woofer and Tweeter, and effectively suppress the coupling error between Woofer and Tweeter.

**Key words** adaptive optics; double deformable mirrors; decoupling control; Laplacian eigenfunction

**OCIS codes** 010.1080; 090.1000; 010.1285

收稿日期: 2018-03-28; 修回日期: 2018-04-19; 录用日期: 2018-05-03

基金项目: 国家自然科学基金(11704382)、中国科学院国防科技创新基金(CXJJ-16M208)

\* E-mail: pingyang2516@163.com; \*\* E-mail: chengtaowusang@163.com

# 1 引言

自适应光学技术能有效补偿波前畸变,故广泛地应用于天文观测<sup>[1]</sup>、激光光束净化<sup>[2-3]</sup>和人眼医疗成像<sup>[4-5]</sup>等领域。然而,天文望远镜口径的不断增大、激光器功率逐渐加大以及人眼像差差异化等应用领域的不断拓展,均需自适应光学系统具备同时校正大行程和高空间频率的波前像差。但是,决定自适应光学系统像差校正幅值和校正精度的核心器件——波前校正器(一般为变形镜)受驱动器行程与密度的制约,难以实现对大行程和高空间频率像差的同步校正。为了解决这一问题,多个不同类型变形镜组合式的自适应光学系统得到了国内外众多学者的关注,其中最为典型的是 Woofer-Tweeter 双变形镜自适应光学系统<sup>[6-9]</sup>。该系统中 Woofer 包含较少的驱动器数目,主要用于校正大行程低空间频率像差;Tweeter 包含较多的驱动器数目,主要用于校正小行程高空间频率像差。虽然, Woofer-Tweeter 双变形镜自适应光学系统具备同步校正大行程高空间频率像差的能力,但是 Woofer 和 Tweeter 之间的耦合补偿却会造成他们之间行程上的浪费,甚至影响到系统的稳定性<sup>[10]</sup>。

近年来,针对 Woofer 和 Tweeter 之间的耦合问题,国内外学者相继提出了一系列的解耦控制算法并成功应用于相关领域,如两步法<sup>[11-13]</sup>、基于 Zernike 模式的限定项法<sup>[14-15]</sup>、基于 Zernike 模式的控制信号重置法<sup>[16]</sup>、傅里叶模式重构法<sup>[17]</sup>、小波模式重构法<sup>[18]</sup>、分布式区域法<sup>[19]</sup>、响应矩阵正交法<sup>[20]</sup>和拉格朗日阻尼最小二乘法<sup>[21-22]</sup>。上述算法中具备较强耦合抑制能力的方法有两步法、基于 Zernike 模式的限定项法和基于 Zernike 模式的控制信号重置法。然而,两步法因其串行的工作方式难以对变化较快的动态波前畸变(如大气湍流)进行校正。而基于 Zernike 模式的限定项法和控制信号重置算法存在以下两方面的缺陷:1)Zernike 模式本身虽然在单位圆上具备正交性,但是其一阶偏导数却不具备正交性,因此,在 Tweeter 的耦合抑制矩阵构造过程中必须引入 Zernike 理论模式和测量 Tweeter 各个驱动器的响应函数面形,在大规模的 Woofer-Tweeter 双变形镜系统中,对于上千单元驱动器数目的 Tweeter,其驱动器响应函数的测量过程将会非常繁琐。2)Zernike 模式只在单位圆上具备正交性,然而在激光应用领域激光光束多为矩形,在天文观测领域许多大型望远镜的光瞳孔径为圆环形,此

时,若采用基于 Zernike 模式的解耦控制算法,必须先对 Zernike 模式进行施密特正交化以获得矩形域或圆环域上的正交模式<sup>[23]</sup>,但正交模式一阶偏导数的正交性仍得不到保证。

针对上述 Zernike 模式解耦算法的两个问题,本文提出了一种基于拉普拉斯本征函数的解耦控制算法。拉普拉斯本征函数自身和一阶偏导数均具备正交性,因此在 Tweeter 的耦合抑制矩阵构造过程中无需逐个测量 Tweeter 各个驱动器的响应函数面形。此外,在不同齐次 Neumann 边界条件下求解拉普拉斯本征方程能够获得不同光瞳区域下的拉普拉斯本征函数,可以方便地对不同光瞳区域下 Woofer-Tweeter 的双变形镜自适应光学系统进行解耦控制。并搭建了 Woofer-Tweeter 双变形自适应光学原理性实验系统,对该算法的有效性进行了实验验证。

## 2 拉普拉斯本征函数解耦控制算法原理

### 2.1 拉普拉斯本征函数特性

在利用拉普拉斯本征函数实现 Woofer-Tweeter 双变形镜的解耦控制之前,先对拉普拉斯本征函数特性进行介绍。在齐次 Neumann 边界条件下,拉普拉斯本征函数  $W(r)$  满足如下方程<sup>[24]</sup>

$$\begin{cases} \nabla_{\perp}^2 W(r) = -\gamma^2 W(r), & r \in \sigma \\ \partial W(r)/\partial n = 0, & r \in c \end{cases} \quad (1)$$

式中: $c$  为光瞳边界; $\sigma$  为光瞳区域; $\gamma^2$  为本征函数  $W(r)$  对应的本征值。根据 Sturm-Liouville 理论,对应于一组本征值  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$  的本征函数  $W_1(r), W_2(r), W_3(r), \dots$  在光瞳区域  $\sigma$  上为一组正交完备基。即  $W_1(r), W_2(r), W_3(r), \dots$  满足

$$\int_{\sigma} W_i(r) W_j(r) d\sigma = 0, \quad i \neq j. \quad (2)$$

因此,在光瞳区域  $\sigma$  上,任意函数都能由这组正交完备基  $W_1(r), W_2(r), W_3(r), \dots$  表示为

$$\varphi(r) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l W_l(r), \quad (3)$$

式中: $\varphi(r)$  为光瞳区域  $\sigma$  上的任意波前分布; $a_l$  为各阶拉普拉斯本征函数对应的展开系数。

考虑到自适应光学系统中一般用哈特曼传感器对波前畸变进行测量,其测量得到的结果为波前斜率信息,则(3)式可变为

$$\nabla \varphi(r) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \nabla W_l(r), \quad (4)$$

式中: $\nabla = (\partial/\partial_x, \partial/\partial_y)$  表示在  $(x, y)$  方向上的一阶

偏导数;  $\nabla\varphi(r)$  为波前分布  $\varphi(r)$  的一阶偏导数;  $\nabla W_i(r)$  为  $W_i(r)$  的一阶偏导数。与此同时, 对于不同阶次本征函数, 其一阶偏导数之间的相关性可表示为

$$\int_{\sigma} \nabla W_i(r) \nabla W_j(r) d\sigma = \int_{\sigma} \nabla[W_i(r)W_j(r)]d\sigma - \int_{\sigma} W_j(r) \nabla^2 W_i(r) d\sigma. \quad (5)$$

对(5)式右边的第一项, 利用散度定理

$$\oint_c A \cdot dn = \int_{\sigma} \nabla \cdot A d\sigma, \quad (6)$$

(5)式可表示为

$$\int_{\sigma} \nabla W_i(r) \nabla W_j(r) d\sigma = \oint_c W_j(r) \frac{\partial W_i(r)}{\partial n} - \int_{\sigma} W_j(r) \nabla^2 W_i(r) d\sigma. \quad (7)$$

由(1)式可知, 边界条件  $\partial W(r)/\partial n = 0$ , 所以(7)式可表示为

$$\int_{\sigma} \nabla W_i(r) \nabla W_j(r) d\sigma = - \int_{\sigma} W_j(r) \nabla^2 W_i(r) d\sigma = \gamma_i^2 \int_{\sigma} W_j(r) W_i(r) d\sigma = \gamma_i^2 c_i \delta_{ij} = \begin{cases} \gamma_i^2 c_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (8)$$

由(2)式和(8)式可以看出, 利用(1)式求解得到的拉普拉斯本征函数自身及其一阶偏导数均具备正交性。结果表明, 拉普拉斯本征函数可用于 Woofer-Tweeter 双变形镜自适应光学系统的解耦

控制: 当采用拉普拉斯本征函数为 Woofer 和 Tweeter 分配待校正像差时, 若 Woofer 和 Tweeter 能够只拟合分配给他们的待校正像差, 则 Woofer 和 Tweeter 的像差补偿量在二维空间上也具备正交性, 此时两个变形镜之间不存在耦合补偿。

## 2.2 不同区域下的拉普拉斯本征函数

在验证了拉普拉斯本征函数能够用于 Woofer-Tweeter 双变形镜自适应光学系统的解耦控制后, 通过设置(1)式中的光瞳边界条件  $c$ , 可求得不同光瞳区域下的拉普拉斯本征函数, 以实现不同光瞳区域下的 Woofer-Tweeter 双变形镜自适应光学系统的解耦控制。在此, 仅给出常用的圆形、圆环形和矩形区域下的拉普拉斯本征函数数学描述。

当(1)式中的光瞳区域条件为  $0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi$ , 即单位圆形时, 对应的圆域拉普拉斯本征函数可描述为

$$D_{NM}(r, \theta) = \begin{cases} \sqrt{2} J_{\mu}(\gamma_{\mu N} r) \cos(\mu\theta), & M > 0 \\ J_0(\gamma_{0N} r), & M = 0, \\ \sqrt{2} J_{\mu}(\gamma_{\mu N} r) \sin(\mu\theta), & M < 0 \end{cases} \quad (9)$$

式中:  $\mu = |M|$ ;  $J_{\mu}(\cdot)$  为  $\mu$  阶第一类 Bessel 函数;  $\mu = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\gamma_{\mu N}$  为  $\frac{d}{dr} J_{\mu}(r)$  的第  $N$  个正根,  $N = 1, 2, \dots$ 。

当(1)式中的光瞳区域条件为  $r_1 < r < r_2, 0 < \theta < 2\pi$ , 即圆环区域时, 对应的圆环域拉普拉斯本征函数可描述为

$$A_{NM}(r, \theta) = \begin{cases} [Y'_{\mu}(\gamma_{\mu N} r_1) J_{\mu}(\gamma_{\mu N} r) - J'_{\mu}(\gamma_{\mu N} r_1) Y_{\mu}(\gamma_{\mu N} r)] \cos(M\theta), & M \geq 0 \\ - [Y'_{\mu}(\gamma_{\mu N} r_1) J_{\mu}(\gamma_{\mu N} r) - J'_{\mu}(\gamma_{\mu N} r_1) Y_{\mu}(\gamma_{\mu N} r)] \sin(M\theta), & M < 0 \end{cases}, \quad (10)$$

式中:  $\mu = |M|, M = \pm 0, 1, 2, \dots$ ;  $Y_{\mu}(\cdot)$  为第  $\mu$  阶第二类 Bessel 函数;  $\gamma_{\mu N}$  为方程  $Y'_{\mu}(\gamma r_2) J'_{\mu}(\gamma r_1) - J'_{\mu}(\gamma r_2) Y'_{\mu}(\gamma r_1) = 0$  的第  $N$  个正根,  $N = 1, 2, \dots$ 。

当(1)式中的光瞳区域条件为  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ , 其中  $a$  和  $b$  为  $x$  和  $y$  的上边界, 即矩形域时, 对应的矩形域拉普拉斯本征函数可描述为

$$W_{MN}(x, y) = \cos\left(\frac{M}{a}\pi x\right) \cos\left(\frac{N}{b}\pi y\right), \quad (11)$$

式中:  $W_{MN}(x, y)$  对应的本征值  $\gamma_{MN}^2 = \pi^2 \left(\frac{M^2}{a^2} + \frac{N^2}{b^2}\right)$ , 其中  $M, N = 0, 1, 2, \dots$ 。

(9)~(11)式分别给出了圆形、圆环形和矩形域上拉普拉斯本征函数的数学描述, 只需配置边界条件的具体参数, 便能得到特定区域下的拉普拉斯本

征函数。因此, 采用拉普拉斯本征函数可用于不同光瞳区域下的 Woofer-Tweeter 双变形镜自适应光学系统的解耦控制。

## 2.3 拉普拉斯本征函数解耦控制算法流程

根据拉普拉斯本征函数的特性, 拉普拉斯本征函数解耦控制算法具体流程如下。

利用拉普拉斯本征函数对哈特曼测量得到的波前斜率信息  $\mathbf{g}$  进行复原, 即

$$\mathbf{g} = \mathbf{E}\mathbf{a}, \quad (12)$$

式中:  $\mathbf{E}$  是由(4)式中拉普拉斯本征函数一阶偏导数  $\nabla W_i(r)$  构成的波前复原矩阵;  $\mathbf{a}$  为对应的拉普拉斯本征函数系数。利用拉普拉斯本征函数空间频率随阶次增加而增加的性质, 分配给 Woofer 和 Tweeter

的待校正波前斜率  $\mathbf{g}_w$  和  $\mathbf{g}_t$  分别为

$$\mathbf{g}_w = \mathbf{E}\mathbf{a}_w = \mathbf{E}\mathbf{I}_w\mathbf{E}^+\mathbf{g}, \quad (13)$$

$$\mathbf{g}_t = \mathbf{g} - \mathbf{g}_w, \quad (14)$$

式中:  $\mathbf{E}^+$  为复原矩阵  $\mathbf{E}$  的广义逆矩阵;  $\mathbf{I}_w$  为对角矩阵, 用于选择分配给 Woofer 的拉普拉斯本征函数阶次, 如  $\mathbf{I}_w = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots)$ , 则 Woofer 负责校正波前像差中的前 5 阶拉普拉斯本征函数成分。在得到待校正的波前斜率  $\mathbf{g}_w$  和  $\mathbf{g}_t$  后, 经积分控制器作用便可计算出 Woofer 和 Tweeter 对应的电压控制向量, 因需对 Tweeter 进行耦合抑制, 在此仅给出 Tweeter 控制向量的求解过程:

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{R}_t^+\mathbf{g}_t, \quad (15)$$

$$\mathbf{V}_t(k+1) = \eta_1 * \mathbf{V}_t(k) + \eta_2 * \mathbf{v}_t(k), \quad (16)$$

式中:  $\mathbf{R}_t^+$  为 Tweeter 斜率响应矩阵  $\mathbf{R}_t$  的广义逆矩阵;  $\mathbf{v}_t$  为 Tweeter 的累计电压向量;  $\mathbf{V}_t$  为 Tweeter 的控制电压向量;  $\eta_1$  和  $\eta_2$  为积分控制器参数。文献[14]表明, 若不对 Tweeter 加以耦合抑制, Tweeter 的电压控制向量  $\mathbf{V}_t$  必然包含与 Woofer 相互耦合的成分。为抑制 Woofer 和 Tweeter 之间的耦合补偿, 文献[14-16]利用 Tweeter 各个驱动器的响应函数面形与分配给 Woofer 的 Zernike 模式之间的相关性构造了 Tweeter 的耦合抑制矩阵  $\mathbf{R}_m$ :

$$R_m(i, j) = k \frac{\iint V_i(x, y)Z_j(x, y)d\sigma}{\iint Z_j(x, y)Z_j(x, y)d\sigma}, \quad (17)$$

式中:  $V_i(x, y)$  为 Tweeter 第  $i$  个驱动器的响应函数;  $Z_j(x, y)$  为第  $j$  阶 Zernike 模式;  $k$  为经验系数。(17)式的数学本质是将 Tweeter 的各个驱动器响应函数在 Zernike 模式上展开, 因 Zernike 模式在单位圆上具备正交性,  $\mathbf{R}_m$  能准确描述 Tweeter 各个驱动器响应函数与分配给 Woofer 的 Zernike 模式之间的相关性, 进而有效抑制 Tweeter 与 Woofer 之前耦合产生的像差补偿。由(8)式可知, 拉普拉斯本征函数的一阶偏导数也具备正交性, 因此采用拉普拉斯本征函数的一阶偏导数便可以构造出 Tweeter 的耦合抑制矩阵, 可表示为

$$R'_m(i, j) = k \frac{\sum_{r=1}^{2n} R_t(r, i)E(r, j)}{\sum_{r=1}^{2n} E(r, j)E(r, j)}, \quad (18)$$

式中:  $R_t(r, i)$  表示 Tweeter 斜率响应矩阵的第  $(r, i)$  个元素;  $E(r, j)$  表示拉普拉斯本征函数复原矩阵的第  $(r, j)$  个元素。显然, 与(17)式描述的耦合抑制矩阵构造过程相比, 采用拉普拉斯本征函数

的一阶偏导数对 Tweeter 的耦合抑制矩阵进行构造时, 无需对 Tweeter 的每个驱动器响应函数面形进行精确测量或拟合。文献[14]表明, 如 Tweeter 不与 Woofer 产生耦合, 其电压控制向量  $\mathbf{V}_t$  应满足

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}'_m\mathbf{V}_t. \quad (19)$$

根据(19)式对 Tweeter 驱动电压  $V_t$  进行重置, 以剔除其中与 Woofer 之间的耦合成分, 其过程如下:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R}'_m \end{bmatrix} \mathbf{V}'_t \approx \begin{bmatrix} \mathbf{V}_t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\mathbf{V}'_t = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R}'_m \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \mathbf{V}_t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

式中:  $\mathbf{C}$  为 Tweeter 控制电压向量的重置矩阵;  $\mathbf{V}'_t$  为重置后的 Tweeter 控制电压向量;  $\mathbf{V}'_t$  中不包含与 Woofer 相耦合的电压成分。

### 3 实验验证

#### 3.1 实验平台搭建

为验证本征函数解耦控制算法的有效性, 建立了 Woofer-Tweeter 双变形镜自适应光学的实验系统(见图 1, 其中  $f$  表示变形镜的焦距)。需要说明的是, 在此仅从原理上证明算法的有效性, 所以 Woofer 和 Tweeter 均采用 59 单元的压电陶瓷(PZT)变形镜, 变形镜驱动器行程范围为  $\pm 2.5 \mu\text{m}$ , 相邻驱动器间距为 8 mm。变形镜驱动器与夏克-哈特曼(S-H)子孔径的位置对应关系如图 2 所示。使用波长为 671 nm 的激光作为实验光源。实验系统中的初始像差来源于光源与 Woofer 变形镜之间加入的像差板和系统自身引入的静态像差。

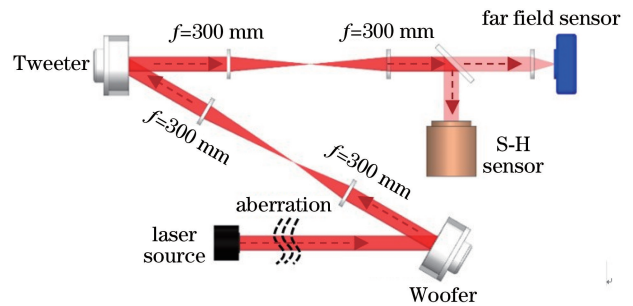


图 1 Woofer-Tweeter 双变形自适应光学实验系统  
Fig. 1 Woofer-Tweeter double deformation adaptive optical experiment system

#### 3.2 像差补偿能力验证

由 2.2 节可知, 求解不同边界条件下的拉普拉斯本征方程可得到不同光瞳区域的拉普拉斯本征函数, 因此, 拉普拉斯本征函数可用于不同光瞳区域下 Woofer-Tweeter 双变形镜的解耦控制。本研究仅



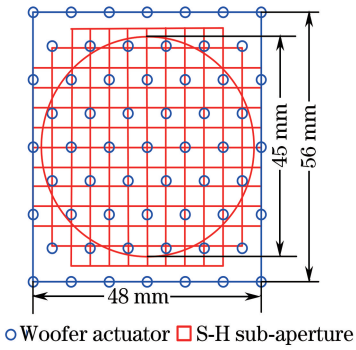


图 2 变形镜驱动器和夏克-哈特曼子孔径的位置对应关系  
Fig. 2 Locations configuration of deformable mirror actuator and S-H sub-aperture

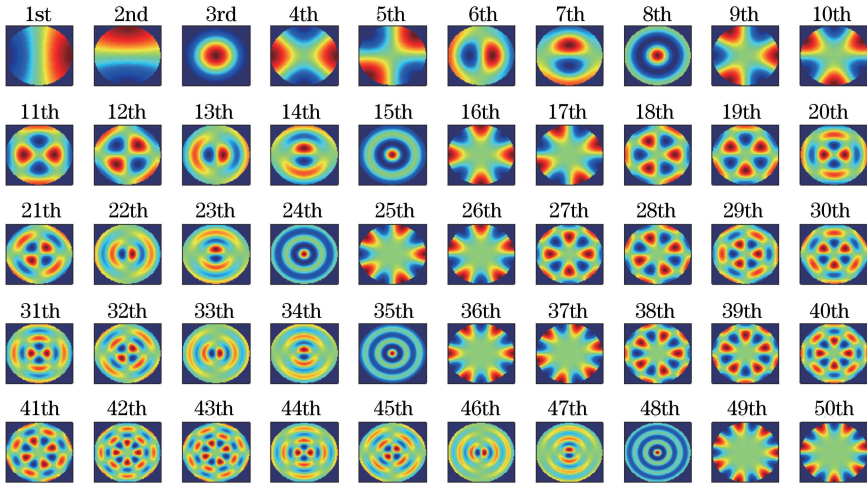


图 3 前 50 阶单位圆域上的拉普拉斯本征函数  
Fig. 3 First 50 order of Laplacian eigenfunctions in circle area

由图 4 可知,圆域上的拉普拉斯本征函数及其一阶偏导数均具备良好的正交性,因此可以用于实现 Woofer-Tweeter 双变形镜自适应光学系统的解耦控制。在此基础上,为了验证拉普拉斯本征函数解耦控制算法的像差补偿能力,首先针对图 1 所示系统中的初始波前像差,在积分控制器参数  $\eta_1$  和  $\eta_2$

以圆域下拉普拉斯本征函数对基于拉普拉斯本征函数解耦控制算法的有效性进行验证。由(9)式求得前 50 阶拉普拉斯本征函数二维空间分布,如图 3 所示。

由图 3 可知,圆域上拉普拉斯本征函数有着和 Zernike 模式近似的空间频率分布特征,即空间频率随着阶次的增加逐渐增加。因此,拉普拉斯本征函数可以用于为 Woofer 和 Tweeter 分配不同空间频率的像差。与 Zernike 模式不同的是,拉普拉斯本征函数及其一阶偏导数均具备正交性,图 4 给出了拉普拉斯本征函数自身的正交性以及经图 2 描述的  $12 \times 12$  子孔径夏克-哈特曼离散采样后拉普拉斯本征函数一阶偏导数的正交性。

分别为 0.99 和 0.20 的条件下,分别采用 Woofer 和 Tweeter 对其进行单独校正,闭环校正后的结果如图 5 所示,图中  $\varphi_{PV}$  表示峰谷(PV)值, $\varphi_{RMS}$  表示方均根(RMS)值。

图 5(a) 和 (b) 为系统的初始波前像差。当 Woofer 和 Tweeter 对其进行单独校正时,闭环后

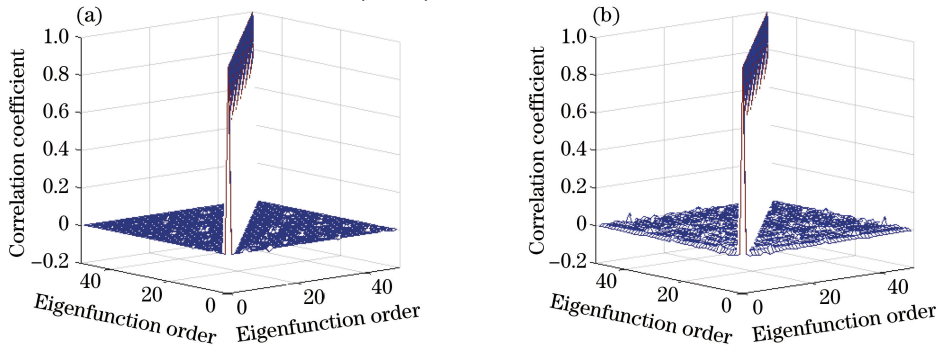


图 4 函数的正交性。(a)本征函数自身正交性;(b)本征函数一阶偏导数正交性  
Fig. 4 Orthogonality of function. (a) Orthogonality of Laplacian eigenfunction;  
(b) orthogonality of the first derivative term of Laplacian eigenfunction

Woofers 和 Tweeters 像差补偿量的 RMS 分别为  $0.38\lambda$  和  $0.39\lambda$ , 如图 5(c) 和 (d) 所示。残余波前的 RMS 分别为  $0.056\lambda$  和  $0.058\lambda$ , 如图 5(e) 和 (f) 所示。根据图 3 给出的前 50 阶拉普拉斯本征函数形式, 在两种不同的像差分配方案下利用拉普拉斯本征函数解耦控制算法同步控制 Woofers 和 Tweeters; 方案

一, 将初始像差中的前 1~3 阶拉普拉斯本征函数像差成分分配给 Woofers, 其余像差分配给 Tweeters; 方案二, 将初始像差中的前 1~5 阶拉普拉斯本征函数像差成分分配给 Woofers, 其余像差分配给 Tweeters。在相同的积分控制器参数条件下, 两种像差分配方案闭环校正后的结果如图 6 所示。

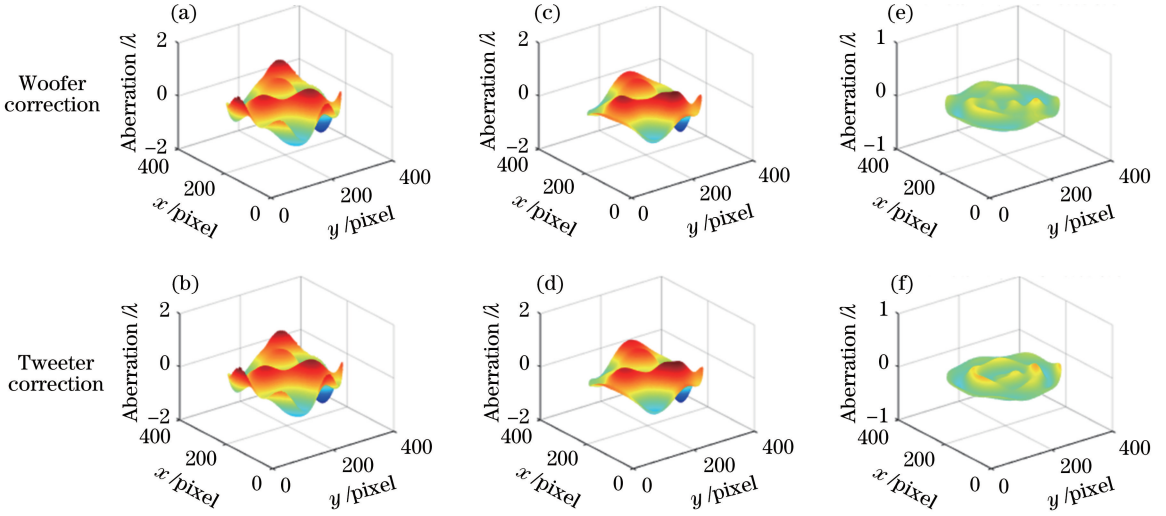


图 5 单个变形镜的校正结果。(a)  $\varphi_{PV}=2.27\lambda, \varphi_{RMS}=0.43\lambda$ ;

(b)  $\varphi_{PV}=2.27\lambda, \varphi_{RMS}=0.43\lambda$ ; (c)  $\varphi_{PV}=2.05\lambda, \varphi_{RMS}=0.38\lambda$ ; (d)  $\varphi_{PV}=2.07\lambda, \varphi_{RMS}=0.39\lambda$ ;

(e)  $\varphi_{PV}=0.31\lambda, \varphi_{RMS}=0.056\lambda$ ; (f)  $\varphi_{PV}=0.31\lambda, \varphi_{RMS}=0.058\lambda$

Fig. 5 Correction results of single deformable mirror. (a)  $\varphi_{PV}=2.27\lambda, \varphi_{RMS}=0.43\lambda$ ;

(b)  $\varphi_{PV}=2.27\lambda, \varphi_{RMS}=0.43\lambda$ ; (c)  $\varphi_{PV}=2.05\lambda, \varphi_{RMS}=0.38\lambda$ ; (d)  $\varphi_{PV}=2.07\lambda, \varphi_{RMS}=0.39\lambda$ ;

(e)  $\varphi_{PV}=0.31\lambda, \varphi_{RMS}=0.056\lambda$ ; (f)  $\varphi_{PV}=0.31\lambda, \varphi_{RMS}=0.058\lambda$

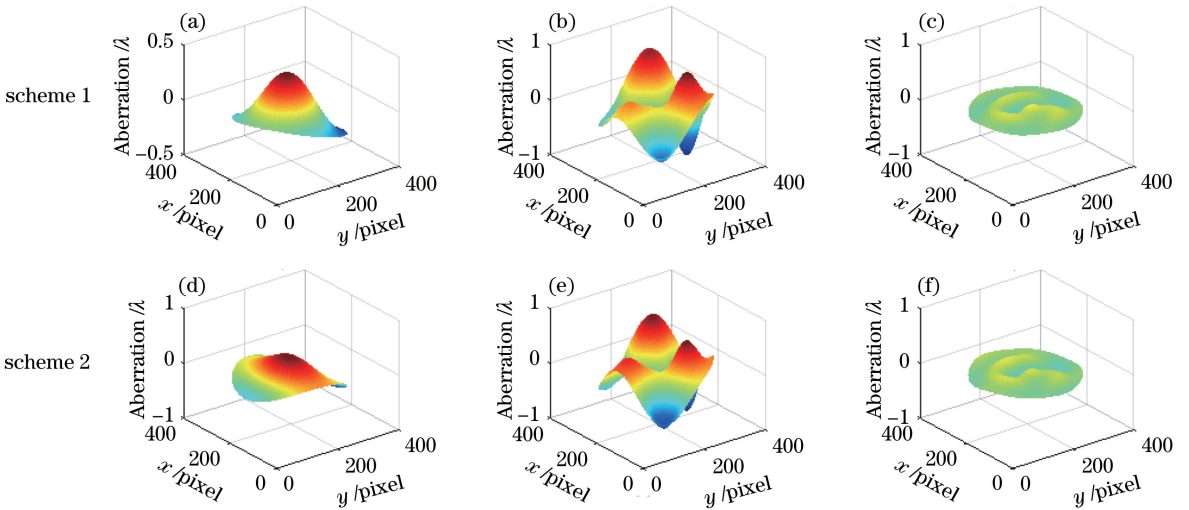


图 6 基于拉普拉斯特征函数的两种像差解耦算法的校正结果。(a)  $\varphi_{PV}=0.43\lambda, \varphi_{RMS}=0.16\lambda$ ; (b)  $\varphi_{PV}=1.20\lambda, \varphi_{RMS}=0.35\lambda$ ;

(c)  $\varphi_{PV}=0.15\lambda, \varphi_{RMS}=0.040\lambda$ ; (d)  $\varphi_{PV}=0.55\lambda, \varphi_{RMS}=0.19\lambda$ ; (e)  $\varphi_{PV}=1.03\lambda, \varphi_{RMS}=0.33\lambda$ ; (f)  $\varphi_{PV}=0.14\lambda, \varphi_{RMS}=0.039\lambda$

Fig. 6 Correction results of decoupling algorithm based on Laplacian eigenfunction in two schemes to aberration.

(a)  $\varphi_{PV}=0.43\lambda, \varphi_{RMS}=0.16\lambda$ ; (b)  $\varphi_{PV}=1.20\lambda, \varphi_{RMS}=0.35\lambda$ ; (c)  $\varphi_{PV}=0.15\lambda, \varphi_{RMS}=0.040\lambda$ ;

(d)  $\varphi_{PV}=0.55\lambda, \varphi_{RMS}=0.19\lambda$ ; (e)  $\varphi_{PV}=1.03\lambda, \varphi_{RMS}=0.33\lambda$ ; (f)  $\varphi_{PV}=0.14\lambda, \varphi_{RMS}=0.039\lambda$

当 Woofer 只校正前 3 阶拉普拉斯本征函数像差时, Woofer 和 Tweeter 的像差校正量以及残余波前如图 6(a)~(c) 所示。闭环校正后, 波前残差的 PV 值和 RMS 值分别达到了  $0.15\lambda$  和  $0.040\lambda$ , 而且 Woofer 的像差校正量相当于前 3 阶拉普拉斯本征函数的组合。当 Woofer 只校正前 5 阶拉普拉斯本征函数像差时, Woofer 和 Tweeter 的像差校正量以及残余波前如图 6(d)~(f) 所示。闭环校正后, 波前残差的 PV 值和 RMS 值分别为  $0.14\lambda$  和  $0.039\lambda$ , 且 Woofer 的像差校正量主要为低空间频率像差。图 5 和图 6 结果显示, 采用拉普拉斯本征函数解耦控制算法能够同步控制 Woofer 和 Tweeter, 并能获得优于单个变形镜的像差校正效果。与此同时, 为验证拉普拉斯本征函数解耦控制算法对 Woofer 和 Tweeter 进行同步控制时的闭环收敛速度, 在积分控制器参数  $\eta_1$  和  $\eta_2$  分别为 0.99 和 0.20 的条件下, 对比了单个变形镜与两种像差分配方式下 Woofer-Tweeter 组合变形镜的校正过程, 如图 7 所示。

由图 7 可知, 在两种不同的像差分配方式下, 拉普拉斯本征函数解耦控制算法仅需 8 次迭代便能使 Woofer-Tweeter 组合变形镜系统达到稳态, 并具备与 Woofer 和 Tweeter 单独校正时一致的闭环收敛过程, 结合夏克-哈特曼传感器 500 Hz 的采样频率, 可以计算出此时系统的调节时间仅为 16 ms。结果表明, 在相同的积分控制器参数下, 采用拉普拉斯本

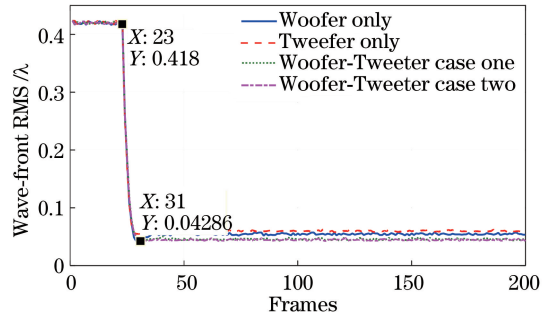


图 7 单个变形镜与 Woofer-Tweeter 组合变形镜的像差校正过程

Fig. 7 Correction process of single deformable mirror and Woofer-Tweeter composite deformable mirror

征函数解耦控制算法对 Woofer 和 Tweeter 进行同步控制时, Woofer-Tweeter 组合变形镜系统近似于一个单变形镜的自适应光学系统, 其对像差校正的收敛速度取决于积分控制器参数和夏克-哈特曼传感器的采样频率。

### 3.3 耦合抑制能力验证

针对图 6 给出的两种像差分配方式下的校正结果, 为验证拉普拉斯本征函数解耦控制算法的耦合抑制效果, 将 Woofer 和 Tweeter 的校正量在本征函数的前 30 阶上进行分解, 并与采用本征函数 [(17)式] 进行耦合抑制矩阵构造时的 Woofer 和 Tweeter 校正量在本征函数前 30 阶上的分解结果进行对比, 如图 8 和图 9 所示。

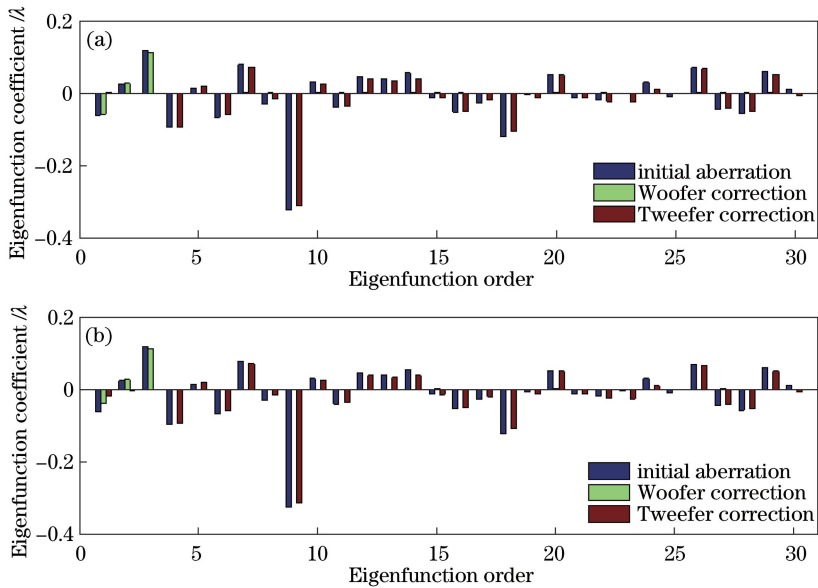


图 8 方案一条件下 Woofer 和 Tweeter 的校正量。(a)本征函数进行耦合抑制矩阵构造; (b)本征函数一阶偏导数进行耦合抑制矩阵构造

Fig. 8 Woofer and Tweeter correction under the scheme I. (a) Constraint matrix based on Laplacian eigenfunction; (b) constraint matrix based on the first derivative term of Laplacian eigenfunction

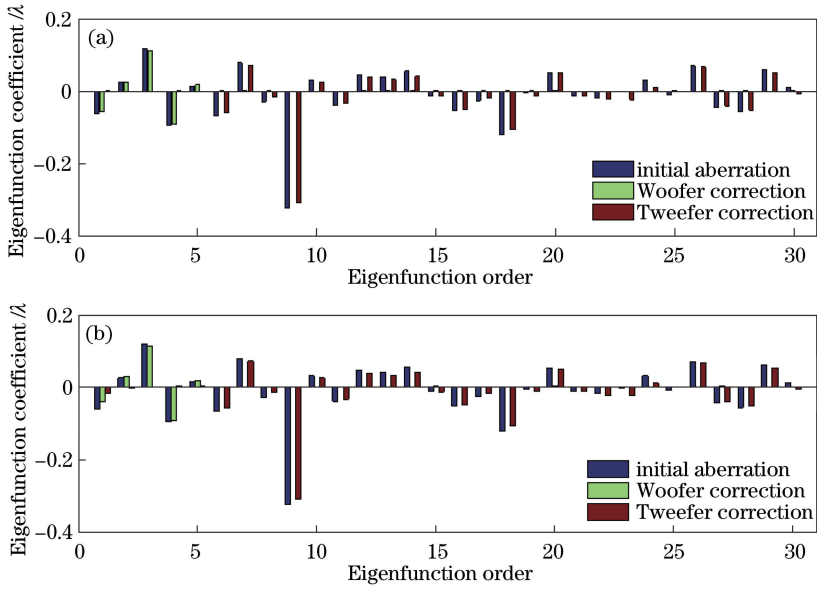


图 9 方案二条件下 Woofers 和 Tweeters 的校正量。(a)本征函数进行耦合抑制矩阵构造；  
(b)本征函数一阶偏导数进行耦合抑制矩阵构造

Fig. 9 Woofers and Tweeters correction under the scheme II. (a) Constraint matrix based on Laplacian eigenfunction; (b) constraint matrix based on the first derivative term of Laplacian eigenfunction

由图 8 和图 9 可知,实际系统中,采用拉普拉斯本征函数一阶偏导数进行耦合抑制矩阵构造时,能够获得与本征函数自身进行耦合抑制矩阵构造时近似的耦合抑制效果。为评估两者之间的耦合抑制效果差异,两种分配方式下 Woofers 和 Tweeters 之间的耦合系数可表示为

$$\gamma = \frac{\left| \iint \varphi_w \varphi_t d\sigma \right|}{\sqrt{\iint \varphi_w \varphi_w d\sigma} \sqrt{\iint \varphi_t \varphi_t d\sigma}}, \quad (22)$$

式中: $\varphi_w$  和  $\varphi_t$  分别为 Woofers 和 Tweeters 的像差补偿量; $\gamma$  为 Woofers 和 Tweeters 之间的耦合系数,描述了  $\varphi_w$  与  $\varphi_t$  的相似程度。 $\gamma$  越接近 0,表示 Woofers 和 Tweeters 之间的耦合程度越小;反之, $\gamma$  越接近 1,表示 Woofers 和 Tweeters 之间的耦合程度

越大。两种分配方式下,连续 2000 帧 Woofers 和 Tweeters 之间的耦合系数如图 10 所示。

由图 10 可知,实际系统中,采用拉普拉斯本征函数一阶偏导数和 Tweeters 的斜率响应函数矩阵直接进行耦合抑制矩阵的构造时,同样能够获得与采用拉普拉斯本征函数自身和 Tweeters 响应函数面形进行耦合抑制矩阵时近似的耦合抑制效果,尽管其耦合系数有所增加,但仍然被控制为很小的数值,分别为  $6.4 \times 10^{-3}$  和  $4.6 \times 10^{-3}$ 。图 8~10 所示的结果可以证明,基于拉普拉斯本征函数的解耦控制算法可以直接利用其一阶偏导数和 Tweeters 的斜率响应函数矩阵进行耦合抑制矩阵的构造,而无需事先对 Tweeters 的每个驱动器响应函数面形进行测量。

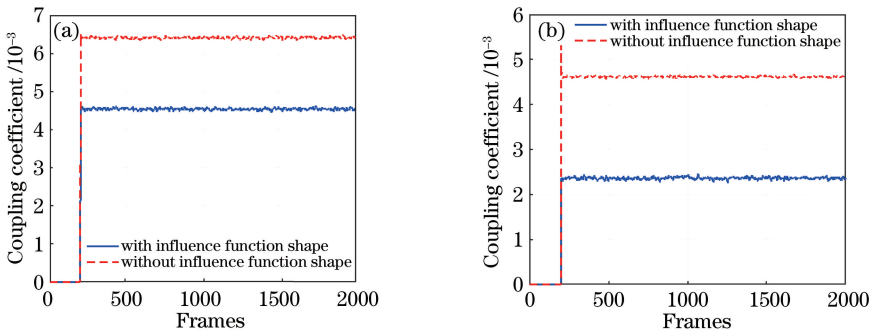


图 10 Woofers 和 Tweeters 间的耦合系数。(a)方案一;(b)方案二

Fig. 10 Coupling coefficient between Woofers and Tweeters. (a) Scheme I; (b) scheme II



## 4 结 论

本文提出了一种基于拉普拉斯本征函数的 Woofer-Tweeter 自适应光学系统解耦控制算法。通过求解不同齐次 Neumann 边界条件下的拉普拉斯本征方程可以获得不同光瞳区域下自身正交且一阶偏导数也正交的拉普拉斯本征函数。利用相应的拉普拉斯本征函数可以实现对不同光瞳区域下 Woofer-Tweeter 自适应光学系统的解耦控制。此外,因拉普拉斯本征函数的一阶偏导数具有正交性,这使得在构造 Tweeter 的耦合抑制矩阵时无需测量 Tweeter 各个驱动器的响应函数面形,该算法将在 Tweeter 驱动器数目达至上千单元的 Woofer-Tweeter 自适应光学系统中更具实用性。通过建立的 Woofer-Tweeter 自适应光学系统在圆形光瞳区域上验证了该算法的有效性。实验结果表明,在圆域上,该算法能够实现对 Woofer 和 Tweeter 的解耦控制,且无需测量 Tweeter 的驱动器响应函数面形。虽然,本文仅在圆域上对该算法的有效性进行验证,但不同光瞳区域下的拉普拉斯本征函数均具备自身正交且一阶偏导数也正交的特性,因此,可以认为拉普拉斯本征函数解耦控制算法对不同光瞳区域下的 Woofer-Tweeter 自适应光学系统中具有普适性。

## 参 考 文 献

- [1] Esposito S, Tozzi A, Carbillet M, *et al.* First-light adaptive optics system for large binocular telescope [J]. Proceedings of SPIE, 2003, 4839: 164-173.
- [2] Wang S H, Liang Y H, Ma H T, *et al.* Beam cleanup experiments for master oscillator power amplifier laser system by adaptive optics based on stochastic parallel gradient descent algorithm [J]. Chinese Journal of Lasers, 2009, 36(10): 2763-2768.  
王三宏, 梁永辉, 马浩统, 等. 随机并行梯度下降自适应光学对主振荡功率放大器激光系统的光束净化实验[J]. 中国激光, 2009, 36(10): 2763-2768.
- [3] Lei X, Wang S, Yan H, *et al.* Double-deformable-mirror adaptive optics system for laser beam cleanup using blind optimization[J]. Optics Express, 2012, 20(20): 22143-22157.
- [4] Zhou H, Guan C L, Dai Y. Bimorph deformable mirrors for adaptive optics of human retinal imaging system [J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(2): 0211001.  
周虹, 官春林, 戴云. 用于自适应光学视网膜成像系

- 统的双压电片变形反射镜[J]. 光学学报, 2013, 33(2): 0211001.
- [5] Kong N N, Li D Y, Xia M L, *et al.* Liquid crystal adaptive optics system for retinal imaging operated on open-loop and double-pulse mode [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(1): 0111002.  
孔宁宁, 李大禹, 夏明亮, 等. 开环双脉冲液晶自适应光学视网膜成像系统[J]. 光学学报, 2012, 32(1): 0111002.
- [6] Brennan T J, Rhoadarmer T A. Performance of a Woofer-Tweeter deformable mirror control architecture for high-bandwidth, high-spatial resolution adaptive optics [J]. Proceedings of SPIE, 2006, 6306: 63060B.
- [7] Conan R. Mean-square residual error of a wavefront after propagation through atmospheric turbulence and after correction with Zernike polynomials [J]. Journal of the Optical Society of America A, 2008, 25(2): 526-536.
- [8] Morzinski K, Macintosh B, Gavel D, *et al.* Stroke saturation on a MEMS deformable mirror for Woofer-Tweeter adaptive optics [J]. Optics Express, 2009, 17(7): 5829-5844.
- [9] Hampton P J, Conan R, Bradley C. Control of a Woofer Tweeter system of deformable mirrors [J]. Proceedings of SPIE, 2006, 6274: 62741Z.
- [10] Zou W Y, Qi X F, Burns S A. Woofer-Tweeter adaptive optics scanning laser ophthalmoscopic imaging based on Lagrange-multiplier damped least-squares algorithm [J]. Biomedical Optics Express, 2011, 2(7): 1986-2004.
- [11] Chen D C, Jones S M, Silva D A, *et al.* High-resolution adaptive optics scanning laser ophthalmoscope with dual deformable mirrors [J]. Journal of the Optical Society of America A, 2007, 24(5): 1305-1312.
- [12] Zawadzki R J, Choi S S, Jones S M, *et al.* Adaptive optics-optical coherence tomography: optimizing visualization of microscopic retinal structures in three dimensions [J]. Journal of the Optical Society of America A, 2007, 24(5): 1373-1383.
- [13] Cense B, Koperda E, Brown J M, *et al.* Volumetric retinal imaging with ultrahigh-resolution spectral-domain optical coherence tomography and adaptive optics using two broadband light sources [J]. Optics Express, 2009, 17(5): 4095-4111.
- [14] Hu S, Xu B, Zhang X, *et al.* Double-deformable-mirror adaptive optics system for phase compensation [J]. Applied Optics, 2006, 45(12): 2638-2642.
- [15] Hu S, Chen S Q, Xu B, *et al.* Experiment of double deformable mirrors adaptive optics system for phase

- compensation[J]. Proceedings of SPIE, 2007, 6467: 64670K.
- [16] Liu W J, Dong L Z, Yang P, *et al.* A Zernike mode decomposition decoupling control algorithm for dual deformable mirrors adaptive optics system[J]. Optics Express, 2013, 21(20): 23885-23895.
- [17] Lavigne J F, Véran J P. Woofer-Tweeter control in an adaptive optics system using a Fourier reconstructor[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2008, 25(9): 2271-2279.
- [18] Hampton P J, Agathoklis P, Conan R, *et al.* Closed-loop control of a Woofer-Tweeter adaptive optics system using wavelet-based phase reconstruction[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2010, 27(11): A145-A156.
- [19] Conan R, Bradley C, Hampton P, *et al.* Distributed modal command for a two-deformable-mirror adaptive optics system [J]. Applied Optics, 2007, 46(20): 4329-4340.
- [20] Li C H, Sredar N, Ivers K M, *et al.* A correction algorithm to simultaneously control dual deformable mirrors in a Woofer-Tweeter adaptive optics system [J]. Optics Express, 2010, 18(16): 16671-16684.
- [21] Zou W Y, Qi X F, Burns S A. Wavefront-aberration sorting and correction for a dual-deformable-mirror adaptive-optics system[J]. Optics Letters, 2008, 33(22): 2602-2604.
- [22] Zou W Y, Burns S A. Testing of Lagrange multiplier damped least-squares control algorithm for Woofer-Tweeter adaptive optics [J]. Applied Optics, 2012, 51(9): 1198-1208.
- [23] Upton R, Ellerbroek B. Gram-Schmidt orthogonalization of the Zernike polynomials on apertures of arbitrary shape [J]. Optics Letters, 2004, 29(24): 2840.
- [24] Huang S Y, Xi F J, Liu C H, *et al.* Eigenfunctions of Laplacian for phase estimation from wavefront gradient or curvature sensing [J]. Optics Communications, 2011, 284(12): 2781-2783.