

基于稀疏快速傅里叶变换的 光纤 F-P 传感器腔长解调方法

陶珺, 陈杨黎*, 卢景琦

武汉理工大学理学院, 湖北 武汉 430070

摘要 因光纤法布里-珀罗(F-P)传感器的干涉光信号频谱具有稀疏性,求解腔长时,传统的快速傅里叶变换(FFT)算法需要计算整个频率范围内的频谱成分,计算速度较慢。稀疏快速傅里叶变换(SFFFT)算法只需计算干涉光信号的主要频谱成分,通过频谱重排、窗函数滤波、频域降采样,以及循环定位与估值,能快速地计算出信号频谱中 K 个极大的傅里叶系数,从中找出腔长对应的频率,解调出腔长。该算法结构简单,时间复杂度低。通过分析光纤 F-P 传感器腔长解调系统的实际干涉光信号,验证解调结果的准确性,以及相比 FFT 算法的高效性。因此,SFFFT 算法适用于对光纤 F-P 传感器腔长进行在线实时解调,以实时测量物理量。

关键词 传感器; 光纤传感器; 腔长解调; 稀疏快速傅里叶变换; 干涉光信号

中图分类号 TN247

文献标识码 A

doi: 10.3788/CJL201845.0510001

Method of the Cavity Length Demodulation for Optical Fiber F-P Sensors Based on Sparse Fast Fourier Transform

Tao Jun, Chen Yangli, Lu Jingqi

School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan, Hubei 430070, China

Abstract Because the spectrum of the interference optical signal in optical fiber Fabry-Pérot (F-P) sensor is sparse, the traditional fast Fourier transform (FFT) algorithm needs to calculate the spectrum components in the whole frequency range in the process of solving the cavity length, and the calculation speed is slow. While sparse fast Fourier transform (SFFFT) algorithm only needs to calculate the main spectrum components of the interference optical signal. Through rearranging spectrum, filtering with window function, down sampling in frequency domain, and finally looping location and valuation, SFFFT can quickly calculate the K maximal Fourier coefficients of the signal spectrum. Thus SFFFT can quickly find the frequency corresponding to cavity length and demodulate the cavity length. The algorithm is simple in structure and low in time complexity. It is verified that the accuracy of the demodulation results of SFFFT algorithm is better, and the efficiency is faster than that of FFT algorithm by analyzing the actual interference optical signal of optical fiber F-P sensor demodulation system. It is proved that SFFFT is very suitable for on-line real-time demodulation of cavity length of optical fiber F-P sensors, so as to measure physical quantities in real time.

Key words sensors; fiber sensors; cavity length demodulation; sparse fast Fourier transform; interference optical signal

OCIS codes 060.2370; 060.2300; 070.4790; 060.2330

收稿日期: 2017-10-19; 收到修改稿日期: 2017-11-21

基金项目: 国家重大科学仪器设备开发专项(2013YQ160551)

作者简介: 陶珺(1979—),女,博士,副教授,硕士生导师,主要从事光纤传感及信号处理方面的研究。

E-mail: taojun0411@163.com

* 通信联系人。E-mail: Jemmyregret@163.com

1 引 言

光纤法布里-珀罗传感器(F-P 传感器)能够在恶劣环境下测量物理参数,且具有易复用、易实现实时、在线、分布式测量和多参数传感^[1],以及抗电磁干扰、适用范围广、精度高、体积小和质量轻等显著优点,因此在民用基础设施和军事上都得到了广泛的应用^[2-7]。在光纤 F-P 传感器测量系统中,为获得所测物理量,通常对输出的干涉光信号作傅里叶变换,通过找到频谱中腔长对应的频率来求解腔长^[8-10]。离散傅里叶变换(DFT)是一种常用的频谱分析方法,但由于其计算量大、运算时间长,通常采用改进的快速傅里叶变换(FFT)算法计算^[11]。与 DFT 相比,FFT 大大简化了运算过程,可将运算量缩小 1~2 个数量级^[12]。即使如此,面对如今越来越大的数据规模和对信息实时处理越来越严格的时效性要求,FFT 也难以满足人们的需求。实际应用中,许多信号的频谱是稀疏的,即信号的大多数傅里叶系数很小,甚至接近于零,而只有傅里叶系数较大的频谱成分才具有某些特征含义,因此傅里叶系数非常小的频谱成分可以忽略掉^[13-14]。如果存在仅计算主要频谱成分的算法,其运算效率则会大幅提高,无论是对信号分析的计算速度还是信号存储都具有十分重大的意义。而光纤 F-P 传感器干涉光频谱

也具有稀疏性,因此该算法也必将会大大提高腔长解调的速度和信号处理的时效性。

稀疏快速傅里叶变换(SFFT)是 2012 年由麻省理工学院的 4 位研究员提出的一种信号处理算法^[15-16]。SFFT 可根据信号稀疏度 K ,计算出 K 个极大的傅里叶系数,得到信号的主要频谱成分。SFFT 时间复杂度由信号长度 N 和稀疏度 K 决定,运算时间缩短为 FFT 的 $1/100\sim 1/10$ ^[17]。

本文利用 SFFT 算法计算光纤 F-P 传感器干涉光频谱,实现对腔长的解调。将该结果与 FFT 算法的频谱分析和解调结果作比较,通过实验验证了 SFFT 算法用于腔长解调时具有高准确性和时效性的特点。

2 SFFT 算法原理

SFFT 算法是一种利用信号频谱的稀疏性来降低运算复杂度的算法,其理论框图如图 1 所示。图 1 中, $x(n)$ 为长度为 N 的时域信号, $X(k)$ 为 $x(n)$ 经过 SFFT 计算得到的频谱。SFFT 算法的核心思想是将信号的频点按照一定规则 Γ 分到 B 个“筐”中。由于信号频域的稀疏性,每个“筐”中只有一个大值频点的概率很高。对各“筐”进行频域降采样得到 B 点频域短序列,从中找出含大值频点的“筐”。最后设计重构算法 Γ^{-1} 恢复大值频点在原频谱的位置和幅值,还原出 N 点原始信号频谱。

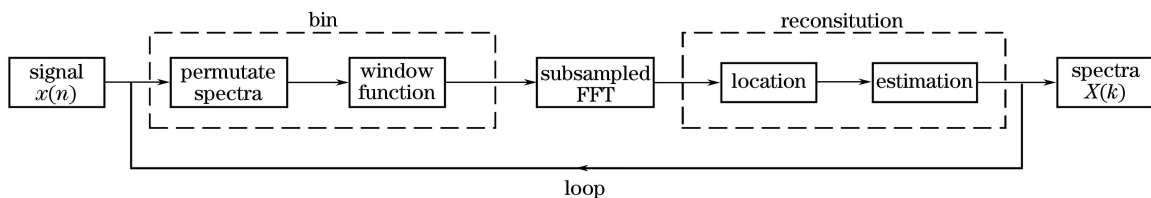


图 1 SFFT 算法理论框图

Fig. 1 Theoretical block diagram of SFFT

2.1 分 筐

首先对 $x(n)$ 进行频谱随机重排,使各大值频点彼此分离,以避免同一“筐”中出现多个大值点。在时域上,令 $p(n)=x(\sigma \cdot n+\tau)$,式中 σ 与 N 互质,且 $\sigma, \tau \in [0, N-1]$,则其频域为 $P(\sigma \cdot k)=X(k)W_N^{\tau k}$,可以看出 $W_N^{\tau k}$ 仅改变相位,不改变幅值,从而实现频谱重排。

然后利用窗函数滤波。通过矩形窗和高斯窗的频域卷积实现一个参数为 $[1/B, 1/(2B), \delta, \omega]$ 的平坦窗函数 $g(n)$,式中,窗长度 $\omega=O\left(B \ln \frac{N}{\delta}\right)$ ^[15,18], $\delta \approx 1/N^C$, C 指常数,也可替代为时间复杂度 $O(1)$, $B \approx \sqrt{NK}$, K 为提前预估的信号稀疏度,表示信号频谱

中大值频点的个数。平坦窗函数避免了基于迭代方法或插值方法的缺陷^[15]。加窗后可得序列 $y(n)$ 。

2.2 频域降采样

对 $y(n)$ 降采样,有 $z(i)=\sum_{j=0}^{N/B-1} y(i+Bj), i \in [0, B-1]$,再对 $z(i)$ 进行 B 点 FFT 变换,得 $Z(i)=Y(i \cdot N/B)$ 。

2.3 重 构

定义哈希映射函数为 $h_{\sigma}(k)=\text{round}[\text{mod}(\sigma \cdot k, N) \cdot B/N]$,它确定了频点分“筐”的规则;定义偏移量: $O_{\sigma}(k)=\text{mod}(\sigma \cdot k, N)-h_{\sigma}(k) \cdot N/B$,它描述了频点在“筐”中的相对位置。哈希映射法重构的实现步骤如下:

1) 频谱重排。取随机正整数 $\sigma, \tau \in [0, N-1]$, 其中 σ 与 N 互质, $p(n) = x(\sigma \cdot n + \tau)$ 。

2) 窗函数滤波 $y(n) = p(n) \cdot g(n)$ 。

3) 频域降采样 $Z(i) = Y(i \cdot N/B)$ 。

4) 定位。找出 $Z(i)$ 中前 $d \cdot K$ 个较大幅值的频点坐标 i , 亦即“筐”序, 放入集合 J 中, 参数 $d = O(1/\epsilon)$ 。通过哈希反映射得到 $d \cdot K \cdot N/B$ 个 J 的坐标原象, 放入集合 I 中, $I = \{k \in [0, N-1] | h_\sigma(k) \in J\}$ 。

5) 估值。对于每一个 $k \in I$, 将 $X'(k) = Z[h_\sigma(k)] \cdot W_N^k / G[O_\sigma(k)]$ 作为对应的频率估计值, G 为平坦窗函数频域。

为提高结果置信度, 步骤 1)~5) 循环 $L = O(\ln N)$ 次, 统计坐标 $k \in I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_L$ 每个值出现的次数。满足条件的坐标 k 出现的次数最多或大于 $L/2$ 次的 K 个坐标, 即为大值频点的准确坐标。取 L 次循环得到的 $X'(k)$ 的中值作为最终的频率值, 即 $X(k) = \text{median}[X'_r(k) | r \in (1, \dots, L)]$ 。

2.4 时间复杂度

由 Hassanieh 等^[15] 的证明可知, SFFT 算法的总时间复杂度为 $O[LB \cdot \ln(N/\delta) + LdKN/B]$ 。式中因为 $B = O\{\sqrt{NK}/[\epsilon \ln(N/\delta)]\}$, $d = O(1/\epsilon)$, 故 SFFT 算法的总时间复杂度可简化为 $O[\ln N \times \sqrt{NK \ln(N/\delta)}/\epsilon]$ 。 $N = 2^q$, q 为正整数时, 传统的 FFT 算法总时间复杂度近似为 $O(N \ln N)$, SFFT 算法时间复杂度近似为 $O(\sqrt{NK \ln N} \cdot \ln N)$ ^[10, 13, 17]。两者相比, SFFT 算法的速度比较快。

3 光纤 F-P 传感器腔长解调原理

F-P 传感器腔长解调主要利用超辐射发光二极管 (SLED) 在 F-P 腔中多次反射形成干涉光的光强来求解腔长信息。图 2 为光纤 F-P 传感器的腔长解调系统。

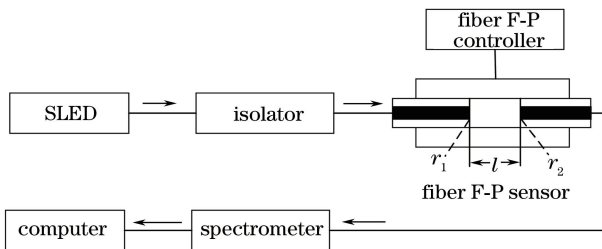


图 2 光纤 F-P 传感器的腔长解调系统
Fig. 2 Cavity length demodulation system of fiber F-P sensor

根据多光束干涉原理, 忽略 F-P 传感器耦合损耗, 透射干涉光的光强可表示为

$$I(\nu) = \frac{(1-r_1)(1-r_2)}{1+r_1r_2-2\sqrt{r_1r_2}\cos(4\pi n l \nu/c)} I_0(\nu), \quad (1)$$

式中: r_1 和 r_2 分别为 F-P 腔前后反射面的反射率; l 为腔长; n 为腔体折射率; ν 为光频率; c 为光速; $I_0(\nu)$ 为 SLED 光强的分布, 理想条件下为常数。可以看出, 干涉光强是光频 ν 的严格周期函数, 其基频角频率为 $\omega = 2\pi f = \frac{4\pi n l}{c}$, 其中 f 为干涉光强信号对光频采样的频率, 可得

$$f = \frac{2nl}{c}, \quad (2)$$

因此可通过 f 求解腔长 l 。

在实际工程应用中, SLED 光强在光频域近似为高斯分布^[8]:

$$I_0(\nu) = I_p \exp\left[-\frac{(\nu - \nu_p)^2 c^2}{\nu_p^4 B_\lambda^2}\right] = I_p \exp\left[-\frac{(\nu - \nu_p)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (3)$$

式中: I_p 为 SLED 的峰值光强; ν_p 为 SLED 的中心频率; B_λ 为高斯函数标准差的 $\sqrt{2}$ 倍, 其值取决于 SLED 的带宽 B ; $\sigma = \nu_p^2 B_\lambda / \sqrt{2} c$ 。结合 (1) 式和 (3) 式, 则实际光源条件下干涉光的光强可表示为

$$I(\nu) = I_p \frac{(1-r_1)(1-r_2)}{1+r_1r_2-2\sqrt{r_1r_2}\cos(4\pi n l \nu/c)} \times \exp\left[-\frac{(\nu - \nu_p)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (4)$$

(4) 式的傅里叶变换为多项高斯函数, 其主要谱峰的中心分别位于直流 $\omega_0 = 0$ 和 $\omega_L = \pm 4\pi n l / c$, 即 $f_0 = 0$ 和 $f_L = \pm \frac{2nl}{c}$ 处。不考虑负频率和直流成分, 通过对频谱进行检峰得到中心频率后, 即可根据 (2) 式得到腔长:

$$l = \frac{f_L c}{2n}. \quad (5)$$

检峰时, FFT 会计算出频谱的所有频点, 但 SFFT 只计算大值频点, 将其余幅值较小的频点视为 0, 因此会大大节省运算时间。

4 SFFT 解调结果和分析

按图 2 搭建解调系统, 使用美国 Inphenix 公司的 IPEVM 1020 驱动板调节白光 SLED, 产生中心

波长为 1566 nm, 3 dB 带宽约为 50 nm, 功率约 2.1 mW 的宽谱光。宽谱光经光纤进入隔离器, 以减弱反射光对光源的光谱输出功率稳定性的影响, 再进入美国 Micron Optics 公司的光纤 F-P 可调谐滤波器 (FFP-TF)。美国 Micron Optics 公司的光纤 F-P 控制器 (FFP-C) 通过压电陶瓷改变滤波器腔长, 使宽谱光在腔内多次反射并产生干涉。透射光由日本 YOKOGAWA 公司的 AQ6370C 光谱仪接收, 光谱数据被送入计算机。控制器电压为 29.7 V 时, FFP-TF 的干涉谱如图 3 所示。

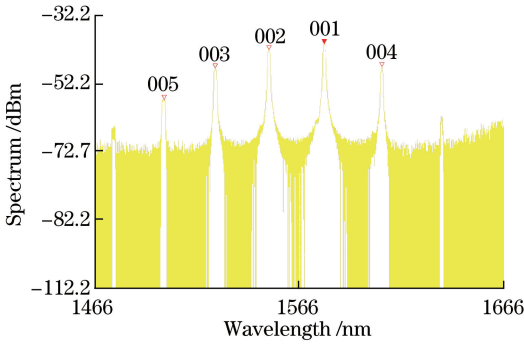


图 3 FFP-TF 的干涉谱

Fig. 3 Interference spectrum of FFP-TF

光谱仪得到的干涉谱是对光波长均匀采样后的离散光强信号。光频率间隔 $\delta\nu$ 和光波长间隔 $\delta\lambda$ 之间的关系为

$$\delta\nu = \frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda + \delta\lambda} = \frac{c\delta\lambda}{\lambda(\lambda + \delta\lambda)} \quad (6)$$

可知, 信号在光频域上不均匀, 然而无论是 FFT 还是 SFFT, 都属于离散傅里叶变换, 要求自变量均匀采样, 即对光频率均匀采样, 因此需对信号转化为光频域后, 再进行 3 次样条插值处理^[1]。为观察插值结果与理论计算结果的吻合度, 在 $l = 30 \mu\text{m}$, $n = 1$ 条件下进行仿真分析, 图 4(a) 给出了对信号的插值的仿真结果, 图 4(b) 给出了对光频域 FFT 后频谱的对比结果, 图中的数值频率 f 代表 1 Hz 光频率内的周期性变化次数。

从图 4(a) 和 4(b) 可看出, 插值后的信号及其频谱比不插值时都更契合理论计算曲线, 说明插值可以提高解调精度, 体现了插值的必要性。除直流分量外, 峰值最大的高斯函数的谱峰频率, 即为 $f_L = 2nl/c$ 。为便于计算, 实际应用中可利用高通滤波函数滤除直流分量。

对图 3 的干涉谱在光频域进行插值和高通滤波后, 作 FFT 频谱分析, 其结果如图 5 所示。从中得出谱峰频率 $f_L = 8.4229 \times 10^{-12}$, 代入(5)式解得腔

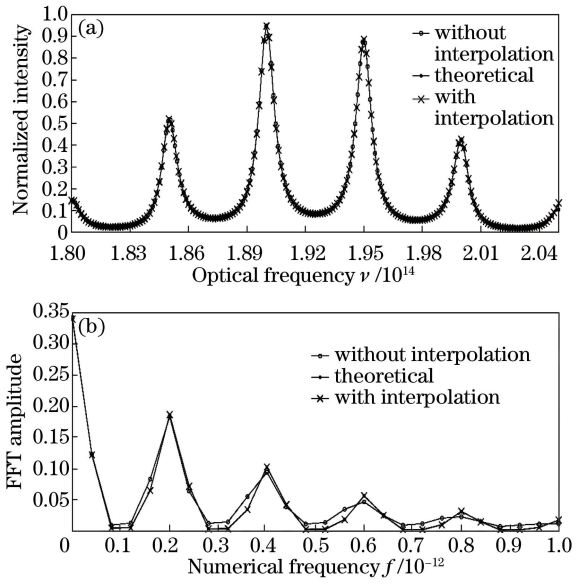


图 4 (a) 信号仿真结果; (b) 信号频谱仿真结果

Fig. 4 (a) Simulation results of signal; (b) simulation results of signal spectrum

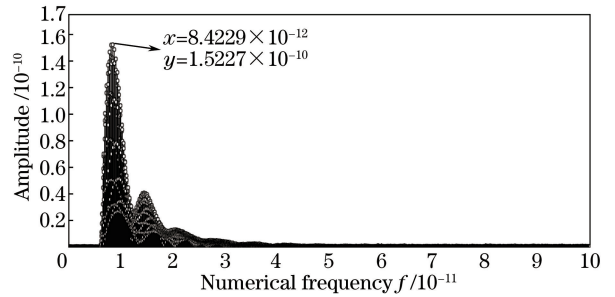


图 5 干涉信号的 FFT 频谱

Fig. 5 FFT spectra of interference signal

长 $l = 1263.435 \mu\text{m}$ 。

由图 5 可以看出, 频谱中的大值频点只占整个频带的一小部分, 具有稀疏性, 适合采用 SFFT 计算。由 SFFT 原理可知, 其计算结果和计算时间主要受信号长度 N 和稀疏度 K 影响。这里信号长度 $N = 2^{15}$, 分别选择 $K = 800, 400, 40, 4, 2$ 进行 SFFT 计算, 其单边谱如图 6 所示。

从图 6 可以看出, 虽然 K 取值不同, 但 SFFT 计算出的谱峰频率数值均为 8.4229×10^{-12} , 解得腔长 $l = 1263.435 \mu\text{m}$, 与 FFT 解调结果基本无异。 K 的取值越小, 图中频谱的频率成分就越少, 可只关注感兴趣的频谱信息。SFFT 将估计的频点幅值从大到小排序, 取前 K 个频点作频谱, 只考虑单边谱, 则共有 $K/2$ 个大值频点。在所求前 x 个大值频率与周围频率的幅值相差不大的情况下, SFFT 可能会因估值精度不够而误判所求大值频率为第 $x + 1$ 个或 $x + 2$ 个大值频率。若 $K/2 \leq$

x , 则被误判的大值频率会被排除在 $K/2$ 个频点外, 从而缺失所求频率。如图 6(e) 所示, 所求为谱峰频率, 若 $x=1$, K 值太小则会导致频谱缺失真正谱峰频率。由此可知, 稀疏度 K 会影响 SFFT 频谱的完整性。因此, 尽量预估稀疏度 K 大于所

求频率个数的 2 倍, 以保障所需频谱信息, 再根据观测需求对其进行适当调整。为了降低计算时间, 稀疏度 K 也应尽量小于 $N/10$ 。相比于 FFT 频谱, SFFT 频谱基本不含噪声成分, 更加清晰可观, 有利于在线监测。

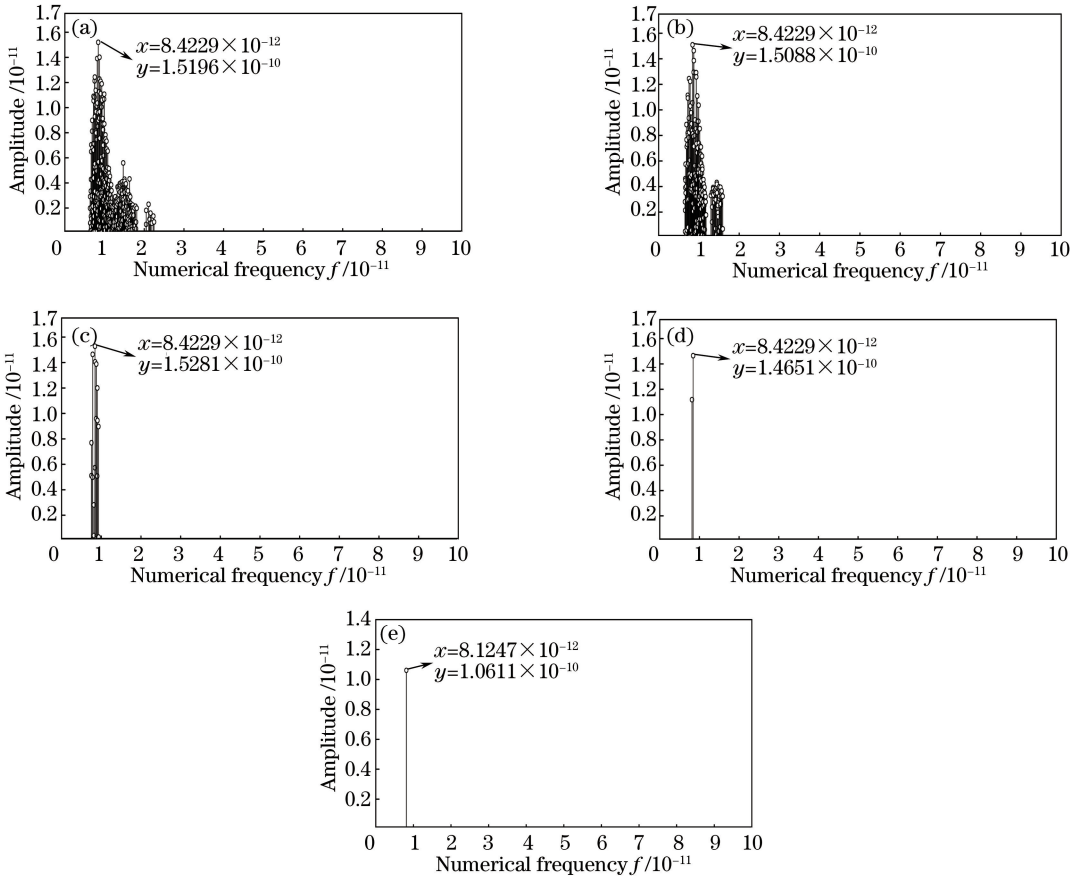


图 6 不同稀疏度时的 SFFT 频谱。(a)稀疏度 $K=800$; (b)稀疏度 $K=400$; (c)稀疏度 $K=40$; (d)稀疏度 $K=4$; (e)稀疏度 $K=2$

Fig. 6 SFFT spectra at different sparsity values. (a) $K=800$; (b) $K=400$; (c) $K=40$; (d) $K=4$; (e) $K=2$

为体现适用性, 根据以上原则可选取 $K=40$, 调节 FFP-C 电压为 40 V, 以改变腔长, 干涉信号的 FFT 频谱和 SFFT 频谱如图 7 和图 8 所示。

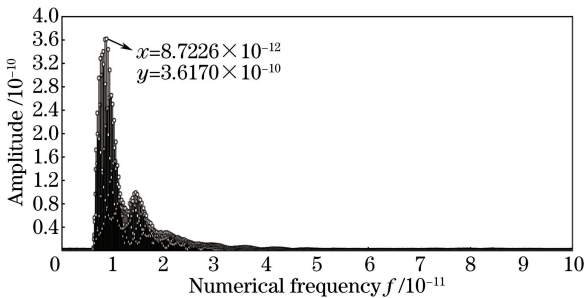


图 7 FFP-C 电压为 40 V 时的干涉信号的 FFT 频谱
Fig. 7 FFT spectrum of interference signal when FFP-C voltage is 40 V

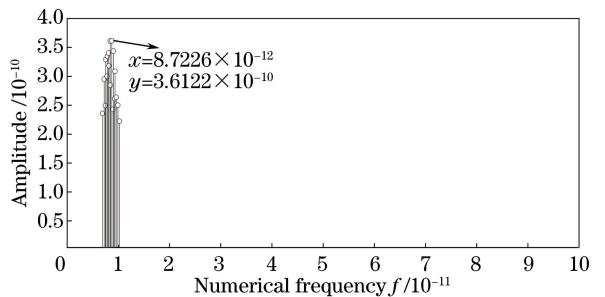


图 8 FFP-C 电压为 40 V 时的干涉信号的 SFFT 频谱
Fig. 8 SFFT spectrum of interference signal when FFP-C voltage is 40 V

由图 7 和图 8 可看出, FFT 和 SFFT 谱峰频率均为 8.7226×10^{-12} , 解调出的腔长相同, 说明 SFFT 算法在腔长不同时依然适用。

为比较同一平台、同样语言环境下的运算时间,

在 Linux 系统下用 C++ 语言编写 SFFT 算法,与 FFTW(Faster Fourier Transform in the West)程序库的 FFT 算法作对比。固定信号长度 $N=2^{20}$,依次取 $K=5,10,20,40,100,200,400,800$,生成 10 次随机信号作 SFFT 和 FFT 运算,以 $K=10$ 运算的时间平均值作为结果,得到 SFFT 和 FFT 在信号稀疏度 K 不同时的运算时间,如图 9 所示。同样,固定稀疏度 $K=40$,依次取 $N=2^{13},2^{14},2^{15},2^{16},2^{17},2^{18},2^{19},2^{20},2^{21},2^{22},2^{23},2^{24}$,得到 SFFT 和 FFT 在信号长度 N 不同时的运算时间,如图 10 所示。

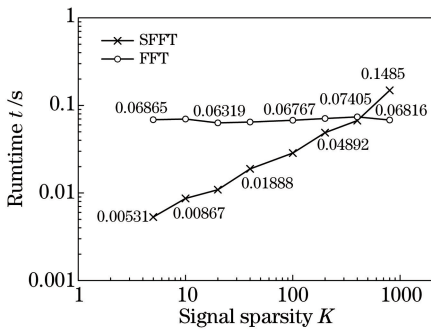


图 9 不同信号稀疏度 K 下的运算时间
Fig. 9 Run time versus signal sparsity K

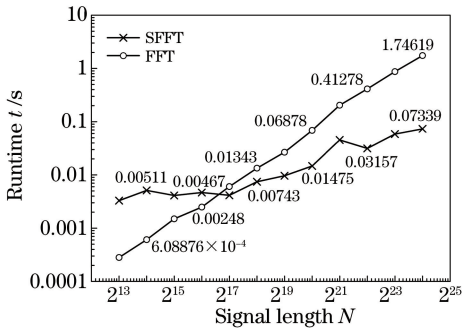


图 10 不同信号长度 N 下的运行时间
Fig. 10 Runtime versus signal length N

从图 9 可看出,信号长度 N 不变时,FFT 运算时间基本在 0.06~0.07 s 左右,而 SFFT 运算时间可随信号稀疏度 K 减少而缩短,即信号越稀疏,用时则越短,当 $K=5$ 时,SFFT 运算时间为 0.00531 s,缩短为 FFT 的运算时间 0.06865 s 的 1/13 左右;从图 10 也可看出,在稀疏度一定时,信号长度越长,SFFT 运算时间比 FFT 快得越显著。

从上述分析可知,信号长度 N 和稀疏度 K 可影响 SFFT 频谱的频率成分数量和运算时间。通过设置光谱仪采样点数来控制信号长度 N ,并合理选择稀疏度 K ,可以保证 SFFT 以最高效率计算出主要特征频谱,进而比 FFT 更快地求解出腔长。

5 结 论

研究了 SFFT 算法的基本原理和实现过程,针对光纤 F-P 传感器干涉光信号,比较了 SFFT 和 FFT 算法解调腔长的结果和运算时间。结果证明:SFFT 解调结果与 FFT 结果相同,即准确度相同,但在信号长度大,且频谱很稀疏时,SFFT 的运算时间缩短为 FFT 的 1/100~1/10。因此,SFFT 可更快速地实现光纤 F-P 传感器的腔长解调。信号长度越大,或信号越稀疏,SFFT 算法的优越性就越明显,且 SFFT 的频谱不含噪声成分,更清晰易读,对如今越来越大的信息处理量和实时性要求越来越严苛的在线测量具有重要意义。

参 考 文 献

- [1] Huang H. Study on new methods and systems of the cavity length demodulation for optical fiber Fabry-Pérot sensors [D]. Chongqing: Chongqing University, 2010: 2-26.
黄海. 光纤法布里-珀罗传感器腔长解调新方法 with 系统研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2010: 2-26.
- [2] Lee C L, Hong W Y, Hsieh H J, *et al.* Air gap fiber Fabry-Pérot interferometer for highly sensitive micro-airflow sensing [J]. IEEE Photonics Technology Letters, 2011, 23(13): 905-907.
- [3] Hoogenboom B W, Frederix P, Yang J L, *et al.* A Fabry-Perot interferometer for micrometer-sized cantilevers [J]. Applied Physics Letters, 2005, 86 (7): 074101.
- [4] Bai Y, Yan F, Liu S, *et al.* Ring cavity fiber laser based on Fabry-Pérot interferometer for high-sensitive micro-displacement sensing [J]. Optoelectronics Letters, 2015, 11(6): 421-425.
- [5] Guo J J, Li M, Tong B. Dual-fiber Fabry-Perot displacement sensor based on direct phase demodulation [J]. Chinese Journal of Lasers, 2012, 39(8): 0805005.
郭晶晶, 黎敏, 童斌. 基于直接相位解调的双光纤法布里-珀罗位移传感器 [J]. 中国激光, 2012, 39(8): 0805005.
- [6] Kang J M, Kim Y O, Han S K. Multi-wavelength conversion using FP-LD with linear optical amplifier [J]. Acta Optica Sinica, 2003, 23(s1): 651-652.
- [7] Yong G, Qi Q, Wang Y X, *et al.* Research on stability of Fabry-Perot cavity based on PDH [J]. Chinese Journal of Lasers, 2016, 43(4): 0402003.
郭勇, 邱琪, 王云祥, 等. 基于 PDH 的法布里-珀罗腔稳定性研究 [J]. 中国激光, 2016, 43 (4): 0402003.

- [8] Zhang P, Zhu Y, Tang X C, *et al.* Demodulation of the optical fiber Fabry-Perot sensor based on Fourier transform[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, 25(2): 186-189.
章鹏, 朱永, 唐晓初, 等. 基于傅里叶变换的光纤法布里-珀罗传感器解调研究[J]. *光学学报*, 2005, 25(2): 186-189.
- [9] Li Z W, Chen L Q. Design of F-P fiber optic sensor array based on Fourier transform [J]. *Optical Communication Technology*, 2014, 38(8): 42-43.
李忠武, 陈丽清. 基于傅里叶变换的 F-P 光纤传感器阵列设计[J]. *光通信技术*, 2014, 38(8): 42-43.
- [10] Lei X H, Chen W M, Zhang P, *et al.* Demodulation method based on Fourier transform with cubic spline interpolation for optical fiber Fabry-Perot sensors[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, 37(4): 705-708.
雷小华, 陈伟民, 章鹏, 等. 基于三次样条插值的光纤 F-P 传感器傅里叶变换解调研究[J]. *光子学报*, 2008, 37(4): 705-708.
- [11] Zhao H S, Gao D, Zhang J P. Analysis of sparse Fourier transform for vibration signal of wind turbine gearbox[J]. *Electric Power*, 2016, 49(8): 69-73.
赵洪山, 高夺, 张健平. 风机齿轮箱振动信号的稀疏傅里叶变换分析[J]. *中国电力*, 2016, 49(8): 69-73.
- [12] Zhong S A, Wang X, Wang W J, *et al.* Recent advances in the sparse Fourier transform [J]. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2017, 37(2): 111-118.
仲顺安, 王雄, 王卫江, 等. 稀疏傅里叶变换理论及研究进展[J]. *北京理工大学学报*, 2017, 37(2): 111-118.
- [13] Liu Q H, Yang G Q, Zhang Y N. Signal compression processing based on sparse fast Fourier transform[J]. *Microcomputer & Its Applications*, 2016, 35(14): 61-63.
刘清华, 杨桂芹, 张妍妮. 基于稀疏快速傅里叶变换的信号压缩处理[J]. *微型机与应用*, 2016, 35(14): 61-63.
- [14] Zhang W M, Gao D, Zhang H J, *et al.* Sparse fast Fourier transform analysis of transformer vibration signal[J]. *Electrical Engineering*, 2017, 18(3): 59-63.
张文民, 高夺, 张慧娟, 等. 变压器振动信号稀疏快速傅里叶变换分析[J]. *电气技术*, 2017, 18(3): 59-63.
- [15] Hassanieh H, Indyk P, Katabi D, *et al.* Simple and practical algorithm for sparse Fourier transform [C]// *Proceedings of the Twenty-Third Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 2012: 1183-1194.
- [16] Hassanieh H, Indyk P, Katabi D, *et al.* Nearly optimal sparse fourier transform[C]// *Proceedings of the Forty-Fourth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 2012: 563-578.
- [17] Na M L, Zhou Z G, Li P P. Wideband spectrum sensing at low sampling rate based on the sparse Fourier transform [J]. *Application of Electronic Technique*, 2015, 41(11): 85-88.
那美丽, 周志刚, 李霏霏. 基于稀疏傅里叶变换的低采样率宽带频谱感知[J]. *电子技术应用*, 2015, 41(11): 85-88.
- [18] Qin J L. Structural dynamical signal analysis based on sparse FFT algorithm [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2016: 14-38.
秦金龙. 基于 SFFT 算法的结构动态信号分析[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2016: 14-38.
- [19] Wang X. Fast demodulation algorithm of underwater acoustic based on the sparse Fourier transform[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2015: 19-29.
王雄. 基于稀疏傅里叶变换的水声快速解调算法研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2015: 19-29.