

# 基于高斯光束传播性质的激光相位恢复

彭金平<sup>\*\*</sup>, 冯国英<sup>\*</sup>, 兰斌

四川大学电子信息学院, 四川 成都 610064

**摘要** 为解决傅里叶变换法处理干涉图的去载频误差问题,并准确地恢复激光待测相位,提出了一种基于高斯光束传播性质的相位恢复方法。激光器输出的高斯光束沿其传播方向的横截面上,其相位为一对称的凸面或凹面,凸面或凹面的曲率与传播距离有关。根据这一性质求出载频大小,并最终恢复待测相位。理论上该方法可以精确计算得到载频的大小,并高精度地恢复待测相位。数值仿真与实验结果都证明该方法可以准确地恢复待测相位。

**关键词** 测量;干涉;相位恢复;高斯光束;傅里叶分析

中图分类号 O436.1

文献标识码 A

doi: 10.3788/CJL201845.1005001

## Laser Phase Recovery Based on Propagation Properties of Gaussian Beam

Peng Jinping<sup>\*\*</sup>, Feng Guoying<sup>\*</sup>, Lan Bin

School of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China

**Abstract** In order to reduce the carrier frequency error of the processed interferogram by using the Fourier transform method, and accurately recover the laser phase to be measured, we propose a phase retrieval method based on the propagation property of Gaussian beam. On the cross section of the Gaussian beam along its direction of propagation, the phase of the beam is a symmetrical convex or concave surface. The curvature of the convex or concave surface is related to the propagation distance. According to this property, the size of the carrier frequency is calculated and the phase to be measured is finally restored. In theory, the size of the carrier frequency can be calculated accurately, and the phase to be measured can be restored with high precision. Both numerical simulation and experimental results show that the proposed method can accurately recover the phase to be measured.

**Key words** measurements; interferometry; phase retrieval; Gaussian beam; Fourier analysis

**OCIS codes** 120.5050; 260.3160; 010.7350; 140.3460

## 1 引言

在激光领域的研究中,测量激光器输出光束的复振幅是不可避免的。干涉测量法是一种有效、可靠的测量方法。在干涉测量中,从空间载波干涉条纹图恢复相位是一个必要的课题<sup>[1-4]</sup>。通过干涉图恢复相位的方法通常有时域相移法<sup>[5-8]</sup>和传统傅里叶变换法(FTM)两种<sup>[9-13]</sup>。时域相移法至少需要采集 3 幅干涉条纹图,且要求 3 幅干涉条纹图的相位存在一定差值;而传统 FTM 仅需一幅干涉图即可恢复待测相位,但其对干涉条纹图的离散化处理,导致所求得的载频存在小数部分误差,从而严重影响了相位恢复精度<sup>[14-15]</sup>。

本文采用一种新的方法恢复相位,该方法利用高斯光束传播性质从干涉条纹图准确解得载频的大小,并最终从单幅干涉图中恢复出待测相位。该方法有效减小了离散化处理导致的载频小数部分的误差,使相位恢复精度得到了很大的提高。下文将该方法简称为传输傅里叶法(TFM)。

## 2 理论分析

### 2.1 高斯光束传播性质

激光器输出的高斯光束的相移特性由相位因子决定,其表达式为

$$\phi(x, y, z) = k \left( z + \frac{r^2}{2R} \right) - \arctg \left( \frac{z}{f} \right), \quad (1)$$

收稿日期: 2018-04-04; 修回日期: 2018-04-19; 录用日期: 2018-05-11

基金项目: 国家自然科学基金(U1730141)

\* E-mail: guoing\_feng@scu.edu.cn; \*\* E-mail: 1090228606@qq.com

式中:  $k$  为波数;  $f$  为高斯光束的共焦参数;  $z$  为传播距离;  $r^2$  为  $x^2$  与  $y^2$  之和;  $R$  为等相位面半径。(1)式描述了光束在点  $(x, y, z)$  处相对于原点  $(0, 0, 0)$  的相位滞后;  $kz$  描述几何相移;  $\arctg(z/f)$  描述高斯光束在空间行进距离为  $z$  时相对几何相移的附加相位超前; 因子  $kr^2/2R$  表示与横向坐标  $(x, y)$  有关的相位移动, 表明高斯光束的等相位面是以  $R$  为半径的球面,  $R$  可表示为

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right], \quad (2)$$

式中:  $\lambda$  为波长;  $\omega_0$  为束腰半径。(2)式说明激光器输出的高斯光束在传播距离为  $z$  处的相位为一对称的凹面或凸面, 这个凸面或凹面的凹凸程度随传播距离  $z$  而改变。

### 2.2 激光器高斯光束的相位恢复

CCD 相机所采集的干涉条纹图的光强分布可表示为

$$I(m, n) = a(m, n) + b(m, n) \cos \left[ 2\pi \left( \frac{c_1 m}{M} + \frac{c_2 n}{N} \right) + \phi(m, n) \right], \quad (3)$$

式中:  $a, b$  分别为背景光强和调制度;  $c_1, c_2$  分别为  $x, y$  方向上的载频;  $\phi(m, n)$  为待恢复相位;  $M, N$  为  $x, y$  方向上的采样点数。干涉图大小为  $M \times N$ 。

干涉图相移如图 1 所示, 一幅实验所得干涉条纹图可通过相移得到 3 帧  $(M-1) \times (N-1)$  大小的干涉条纹图。  $I_1$  为第一帧,  $I_2$  为第二帧,  $I_3$  为第 3 帧<sup>[16-21]</sup>。由于背景光强、调制度一般为平滑信号, 所以背景光强、调制度在相邻像素间的大小可认为是相等的。3 帧相移所得干涉图表达式分别为

$$I_1(m, n) = a(m, n) + b(m, n) \cos \left[ 2\pi \left( \frac{c_1 m}{M} + \frac{c_2 n}{N} \right) + \phi(m, n) \right], \quad (4)$$

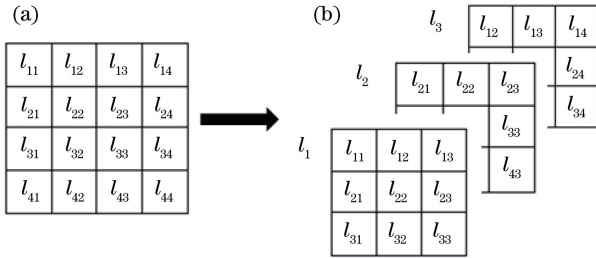


图 1 干涉图相移。(a) 实验所得干涉图像素分布; (b) 3 帧相移干涉图像素分布

Fig. 1 Phase shift of interferogram. (a) Pixel distribution of experimental interferogram; (b) pixel distribution of three frame phase shift interferograms

$$I_2(m, n) = a(m, n) + b(m, n) \times \cos \left[ 2\pi \left( \frac{c_1 m}{M} + \frac{c_2 n}{N} \right) + \frac{2\pi c_1}{M} + \phi(m+1, n) \right], \quad (5)$$

$$I_3(m, n) = a(m, n) + b(m, n) \times \cos \left[ 2\pi \left( \frac{c_1 m}{M} + \frac{c_2 n}{N} \right) + \frac{2\pi c_2}{N} + \phi(m, n+1) \right]. \quad (6)$$

通过傅里叶变换可求得 3 帧相移干涉条纹图的含载频的相位, 其表达式分别为

$$\varphi_1(m, n) = 2\pi \left( \frac{c_1 m}{M} + \frac{c_2 n}{N} \right) + \phi(m, n), \quad (7)$$

$$\varphi_2(m, n) = 2\pi \left( \frac{c_1 m}{M} + \frac{c_2 n}{N} \right) + \frac{2\pi c_1}{M} + \phi(m+1, n), \quad (8)$$

$$\varphi_3(m, n) = 2\pi \left( \frac{c_1 m}{M} + \frac{c_2 n}{N} \right) + \frac{2\pi c_2}{N} + \phi(m, n+1). \quad (9)$$

(8)式、(9)式分别减去(7)式可得:

$$l_{21}(m, n) = \phi(m+1, n) + \frac{2\pi c_1}{M} - \phi(m, n), \quad (10)$$

$$l_{31}(m, n) = \phi(m, n+1) + \frac{2\pi c_2}{N} - \phi(m, n). \quad (11)$$

分别对  $l_{21}(m, n), l_{31}(m, n)$  各点求和并取均值得

$$s_{21} = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} [\phi(M, n) - \phi(1, n)]}{(M-1) \times (N-1)} + \frac{2\pi c_1}{M}, \quad (12)$$

$$s_{31} = \frac{\sum_{m=1}^{M-1} [\phi(m, N) - \phi(m, 1)]}{(M-1) \times (N-1)} + \frac{2\pi c_2}{N}. \quad (13)$$

由 2.1 节分析可知, 激光器输出的高斯光束传输一定距离后, 其相位为曲率不同的对称凹面或凸面, 即

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{N-1} [\phi(M, n) - \phi(1, n)] = 0, & \text{for concave} \\ \sum_{m=1}^{M-1} [\phi(m, N) - \phi(m, 1)] = 0, & \text{for convex} \end{cases}. \quad (14)$$

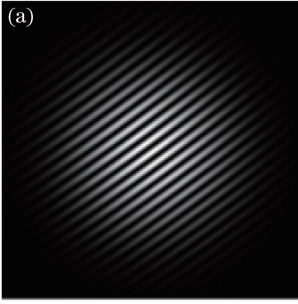
由(11)式和(12)式可求得载频  $c_1$  和  $c_2$ , 其表达式为

$$c_1 = \frac{s_{21} \times M}{2\pi}, \quad (15)$$

$$c_2 = \frac{s_{31} \times N}{2\pi}. \quad (16)$$

根据(3)式,通过对实验采集的干涉图进行傅里叶变化求得载频相位与待测相位之和,利用所求载频重构载频相位并恢复待测相位:

$$\varphi(m, n) = \underbrace{2\pi\left(\frac{c_1 m}{M} + \frac{c_2 n}{N}\right)}_{\text{sum}} + \phi(m, n) - \underbrace{2\pi\left(\frac{c_1 m}{M} + \frac{c_2 n}{N}\right)}_{\text{reconstruction}}. \quad (17)$$



### 3 模拟仿真

图2为模拟的干涉图与相位。图2(a)中所模拟的包含待测相位信息的干涉条纹图表达式为  $I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[2\pi(c_1 x + c_2 y) + \phi(x, y)]$ 。图2(b)中待测相位的表达式为  $\phi(x, y) = 7 \times [\exp(x^2/16 + y^2/16) - 1]$ 。载频  $c_1 = 22.728, c_2 = 16.482$ , 背景光强及调制度表达式为  $a(x, y) = b(x, y) = 7.5 \exp(-x^2 - y^2)$ 。 $x, y$  方向上采样点数都为128, 取值范围为  $-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$ 。

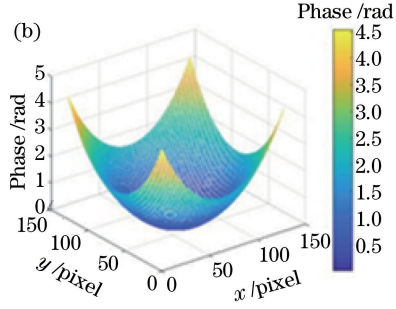


图2 模拟的干涉图与相位。(a)干涉图;(b)相位

Fig. 2 Analog interferogram and phase. (a) Interferogram; (b) phase

采用传统FTM和所提TFM对干涉图进行相位恢复。利用TFM可解得载频为  $c_1 = 22.7374, c_2 = 16.4978$ , 所求的载频与实际载频非常接近。而用FTM求得的载频为  $c_1 = 23, c_2 = 16$ , 误差较大, 主要原因是离散化处理所致的载频小数部分误差。图3(a)和(c)分别为采用FTM和TFM恢复的相

位。将恢复的相位与待测相位  $\phi(x, y)$  之间的差值定义为恢复误差。图3(b)、(d)分别为对应的恢复误差, 图中彩条单位为弧度。由图3(b)、(d)可见, FTM的离散化处理会导致较大的载频误差, 致使恢复相位存在明显的倾斜误差, 而用TFM则基本不存在这一现象。TFM的相位恢复误差的峰谷(PV)

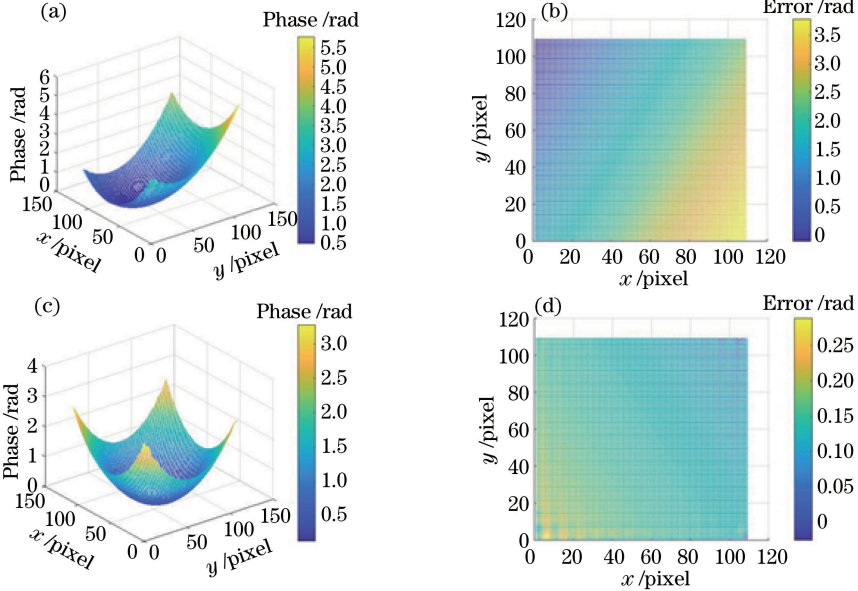


图3 恢复的相位及误差。(a) FTM恢复的相位;(b) FTM恢复误差;(c) TFM恢复的相位;(d) TFM恢复误差

Fig. 3 Recovery phase and error. (a) Recovery phase by FTM; (b) recovery error of FTM; (c) recovery phase by TFM; (d) recovery error of TFM

值和均方根 (RMS) 值分别为 0.3158 rad 和 0.0290 rad, 远小于 FTM 的 3.9783 rad 和 0.8550 rad。两种方法的模拟结果如表 1 所示。从表 1 可知,TFM 可以非常精确地恢复待测相位。

为了对所提方法的抗噪性进行检测,计算了在不同噪声水平下相位恢复误差的 RMS 值以及 PV 值。不同噪声水平下的相位恢复误差如表 2 所示。随着噪声的增大,相位恢复误差也增大,这是由于噪声在傅里叶频谱中存在杂频,因此所求干涉图的含载频的相位即(17)式的 sum 项受影响,致使恢复的相位有轻微误差。但整体的相位恢复误差依然保持

表 2 不同噪声水平下的相位恢复误差

Table 2 Phase recovery error under different noise levels

Error	Noise level / %					
	0	2	4	6	8	10
PV /rad	0.3158	0.4458	0.6658	0.7287	0.8297	0.9550
RMS /rad	0.0290	0.0292	0.0332	0.0406	0.0552	0.0682

## 4 实验结果

为了证明所提方法的可行性,对实验室激光器光束传输一定距离后的相位进行了测量。实验所用激光器的波长为 632.8 nm,束腰半径为 0.35 mm,在距束腰半径 56 cm 处采集干涉图。实验中所用的光纤点衍射干涉仪的示意图如图 4 所示。光束经分光镜(BS)后分为两束,其中反射光为包含待测相位的信号光,透射光为参考光。信号光直接反射在 CCD 上,透射光经过透镜 L1 聚焦进入单模光纤(SMF)后,通过光纤传导并由透镜 L2 准直形成放大的近似平面参考光。参考光再次透过分光镜并与信号光在 CCD 处发生干涉,干涉图被 CCD 采集。透镜 L1、L2 的焦距  $f_1$ 、 $f_2$  分别为 1 cm 和 3 cm。

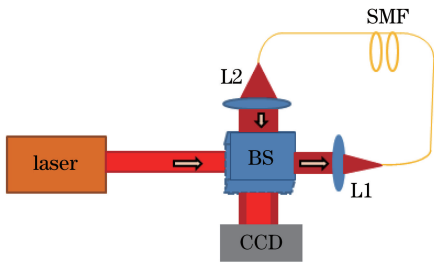


图 4 光纤点衍射干涉仪示意图

Fig. 4 Schematic of optical fiber point diffraction interferometer

通过上述干涉仪采集的干涉条纹图如图 5(a) 所示。图 5(b)为待测相位的理论分布,其 PV 值和 RMS 值分别为 3.2965 rad 和 0.7038 rad。通过传统

在一个很低的水平,这表明所提方法有较强的抗噪能力。

表 1 两种方法的模拟结果

Table 1 Detailed simulation results by using two methods

Item	Real	Method	
		FTM	TFM
$c_1$	22.728	23.000	22.7374
$c_2$	16.482	16.000	16.4978
Phase PV /rad	3.1168	5.3089	3.1382
Phase RMS /rad	0.6279	1.0556	0.6293
Error PV /rad		3.9783	0.3158
Error RMS /rad		0.8550	0.0290

FTM 求得的  $x, y$  方向上的载频分别为 30, 20, 所恢复的相位如图 5(c)所示,恢复相位的 PV 值及 RMS 值分别为 4.9973 rad 和 1.0302 rad。由图 5(c)可以看到所恢复的相位存在明显的倾斜误差。通过所提方法求得的  $x, y$  方向上的载频分别为 30.0428、19.5469,恢复的相位如图 5(d)所示,恢复相位的 PV 值及 RMS 值分别为 3.3441 rad 和 0.6954 rad。定义恢复的相位与待测相位理论分布之差为恢复误差,则 TFM 恢复误差的 PV 值和 RMS 值分别为 0.4091 rad 和 0.0670 rad,远低于 FTM 恢复误差的 PV 值 3.0541 rad 和 RMS 值 0.7829 rad。采用所提方法恢复的相位与模拟的待测相位理论分布都为对称凹面,这与 2.1 节理论分析所得结果一致。

## 5 结 论

传统 FTM 通过干涉条纹图恢复激光待测相位,所得结果误差比较大,主要原因是计算所得的载频不够准确。本研究基于高斯光束的传播特性提出了一种新的测量方法。该方法仅需采集一幅干涉条纹图即可准确计算出载频大小,精确地恢复待测相位。该方法具有抗噪能力较强、易于操作等优点。模拟仿真和实验结果都证明该方法测量规则光束相位具有很高的可靠性及准确性。

## 参 考 文 献

[1] Dorrio B V, Fernández J L. Phase-evaluation methods in whole-field optical measurement

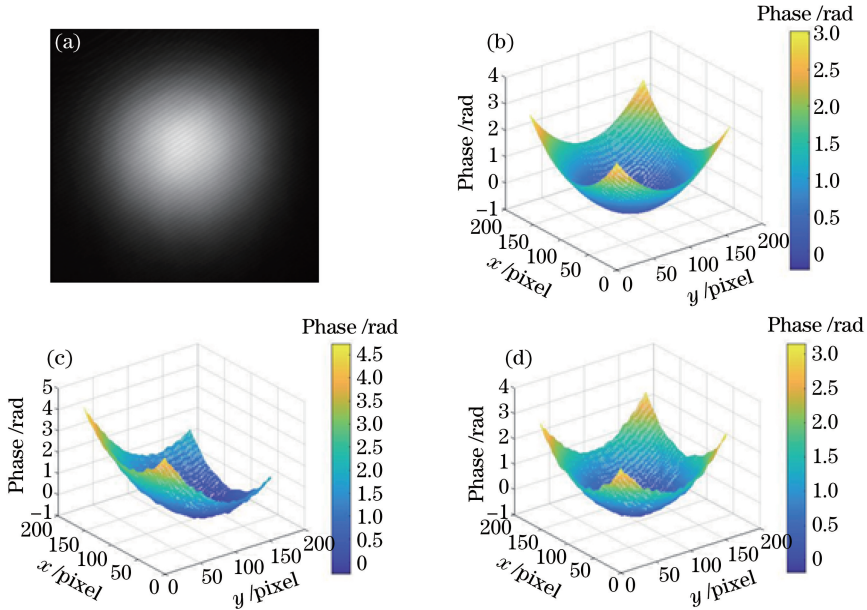


图 5 测量结果。(a)干涉条纹图;(b)待测相位理论分布;(c)FTM 恢复相位;(d)TFM 恢复相位  
Fig. 5 Measurement results. (a) Interference fringes; (b) theoretical distribution of measured phase;  
(c) recovery phase by FTM; (d) recovery phase by TFM

techniques [J]. Measurement Science and Technology, 1999, 10(3): R33-R55.

[2] Juarez-Salazar R, Guerrero-Sanchez F, Robledo-Sanchez C. Theory and algorithms of an efficient fringe analysis technology for automatic measurement applications [J]. Applied Optics, 2015, 54 (17): 5364-5374.

[3] Rajshekhar G, Rastogi P. Fringe analysis: premise and perspectives [J]. Optics and Lasers in Engineering, 2012, 50(8): iii-x.

[4] Surril Y. Topics in applied physics: fringe analysis [M]. Heidelberg: Springer, 2000, 77(20): 55-102.

[5] Srinivasan V, Liu H C, Halioua M. Automated phase-measuring profilometry of 3-D diffuse objects [J]. Applied Optics, 1984, 23(18): 3105-3108.

[6] Srinivasan V, Liu H C, Halioua M. Automated phase-measuring profilometry: a phase mapping approach [J]. Applied Optics, 1985, 24 (2): 185-188.

[7] Patil A, Rastogi P. Approaches in generalized phase shifting interferometry [J]. Optics and Lasers in Engineering, 2005, 43(3/4/5): 475-490.

[8] Xu X F, Cai L Z, Wang Y R, *et al.* Blind phase shift extraction and wavefront retrieval by two-frame phase-shifting interferometry with an unknown phase shift [J]. Optics Communications, 2007, 273(1): 54-59.

[9] Takeda M, Ina H, Kobayashi S. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry [J]. Journal of the Optical Society of America, 1982, 72(1): 156-160.

[10] Takeda M, Mutoh K. Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes [J]. Applied Optics, 1983, 22(24): 3977-3982.

[11] Roddier C, Roddier F. Interferogram analysis using Fourier transform techniques [J]. Applied Optics, 1987, 26(9): 1668-1673.

[12] Massig J H, Heppner J. Fringe-pattern analysis with high accuracy by use of the Fourier-transform method: theory and experimental tests [J]. Applied Optics, 2001, 40(13): 2081-2088.

[13] Zhang W P, Lü X X, Liu S D, *et al.* Generalized phase-shifting phase retrieval approach based on time-domain Fourier transform [J]. Chinese Journal of Lasers, 2015, 42(9): 0908004.  
张望平, 吕晓旭, 刘胜德, 等. 基于时域傅里叶变换的广义相移相位恢复方法 [J]. 中国激光, 2015, 42 (9): 0908004.

[14] Liu J B, Ronney P D. Modified Fourier transform method for interferogram fringe pattern analysis [J]. Applied Optics, 1997, 36(25): 6231-6241.

[15] Nugent K A. Interferogram analysis using an accurate fully automatic algorithm [J]. Applied Optics, 1985, 24(18): 3101-3105.

[16] Kujawinska M, Wojciak J. Spatial-carrier phase-shifting technique of fringe pattern analysis [J]. Proceedings of SPIE, 1991, 1508: 61-68.

[17] Chan P H, Bryanston-Cross P J, Parker S C. Spatial phase stepping method of fringe-pattern analysis [J]. Optics and Lasers in Engineering, 1995, 23(5): 343-

- 354.
- [18] Ferrari J A, Frins E M. Multiple phase-shifted interferograms obtained from a single interferogram with linear carrier [J]. Optics Communications, 2007, 271(1): 59-64.
- [19] Huang L B, Lu X X, Zhou Y F, *et al.* Dual-wavelength interferometry based on the spatial carrier-frequency phase-shifting method [J]. Applied Optics, 2016, 55(9): 2363-2369.
- [20] Lan B, Feng G Y, Zhang T, *et al.* Phase demodulation from a spatial carrier fringe pattern by spatial-temporal fringes method [J]. Journal of Optics, 2016, 18(12): 125704.
- [21] Fan J P, Xu X F, Lü X X, *et al.* Simultaneous phase-shifting multi-wavelength interferometry based on the least-squares iterative algorithm [J]. Chinese Journal of Lasers, 2016, 43(3): 0308007.
- 范金坪, 徐小飞, 吕晓旭, 等. 基于最小二乘迭代的多波长同时相移干涉测量方法 [J]. 中国激光, 2016, 43(3): 0308007.