

# 捷联惯导系统单位置初始对准可观测性分析

王琦, 高春峰, 应智慧, 魏国, 龙兴武

国防科技大学光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073

**摘要** 针对捷联式惯导系统单位置对准可观测性的问题, 以捷联式惯导 10 状态变量误差方程为研究对象, 利用奇异值分解的方法, 对固定位置对准的系统各状态变量的可观测性进行分析。可观测性分析结果表明: 系统的各状态变量非完全可观, 方位失准角的可观测度较低。为了改善对准系统的可观测性, 根据可观测度分析结果及工程应用特性进行模型降阶, 得到 7 阶卡尔曼滤波参数模型并进行了实验验证。实验结果表明: 降阶后的模型对滤波参数的容忍度更大, 且降阶后模型的精度要高于降阶前的精度。

**关键词** 激光技术; 捷联惯导系统; 单位置对准; 可观测性; 奇异值分解; 模型降阶

中图分类号 U666.1

文献标识码 A

doi: 10.3788/CJL201845.0101004

## Observability Analysis of Fixed Position Initial Alignment of Strapdown Inertial Navigation System

Wang Qi, Gao Chunfeng, Ying Zhihui, Wei Guo, Long Xingwu

College of Opto-Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology,  
Changsha, Hunan 410073, China

**Abstract** Aiming at the observability of the fixed position alignment of a strapdown inertial navigation system (SINS), the observability of each state variable of the system is analyzed by the method of singular value decomposition (SVD), in which the ten-state error equation of SINS is taken as the object of study. The results show that the state variables of the system are not completely observable and the azimuth misalignment angle has a low observability. In order to improve the observability of the alignment system, the state vector is reduced according to the results of observability analysis and the application characteristics of SINS, and the seven-order Kalman filtering model is obtained. Experimental results indicate that the seven-order model is more tolerant to the filter parameter and the navigation accuracy is higher than the original model.

**Key words** laser technique; strapdown inertial navigation system; fixed position alignment; observability; singular value decomposition; model order reduction

**OCIS codes** 280.3420; 130.6010; 060.2800

## 1 引言

初始对准技术是惯导系统的关键技术之一, 惯导系统进入导航工作状态之前必须进行初始对准<sup>[1]</sup>, 初始对准的精度直接决定了系统的精度<sup>[2]</sup>。现代控制理论往往采用卡尔曼滤波对系统进行精对准<sup>[3-4]</sup>, 决定卡尔曼滤波状态估计收敛速度和收敛精

度的是系统状态变量的可观测度<sup>[5]</sup>。为了提高惯导系统对准过程的可观测度, 往往采用多位置对准的方式<sup>[6-9]</sup>, 但单位置对准仍然是主要的对准方式之一。

由于单位置对准的系统可观测性较差, 一些状态量不可观, 这将影响单位置对准的精度。为了提高捷联式惯导系统单位置对准精度, 本文针对单位

收稿日期: 2017-07-18; 收到修改稿日期: 2017-08-12

作者简介: 王琦(1989—), 男, 博士研究生, 主要从事激光多普勒测速及与激光惯性导航系统组合应用方面的研究。

E-mail: tianmawangqi@hotmail.com

导师简介: 龙兴武(1958—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事激光陀螺及惯性技术方面的研究。

E-mail: xwlong110@sina.com(通信联系人)

置对准的可观测性,以系统 10 状态误差方程为研究对象,利用奇异值分解法(SVD)对单位置对准的系统各状态变量的可观测性进行分析<sup>[10-11]</sup>,并根据分析结果进行模型降阶<sup>[12]</sup>。实验结果表明降阶后的 7 阶对准模型优于原 10 阶对准模型。

## 2 单位置对准 10 状态可观测度

单位置对准过程中,惯导系统的真实速度与位置已知,其误差状态量通常设置为

表 1 单位置对准各状态量可观测度

Table 1 Observability degree of each state in fixed position alignment

State variable	$\phi_E$	$\phi_N$	$\phi_U$	$\delta v_E$	$\delta v_N$	$\epsilon_x$	$\epsilon_y$	$\epsilon_z$	$\nabla_x$	$\nabla_y$
Observability degree	0.81357	0.81357	$9.6793 \times 10^{-21}$	3.479	3.479	0.01124	0.01124	$5.7287 \times 10^{-9}$	$2.7266 \times 10^{-17}$	$1.5591 \times 10^{-17}$

从表 1 可以看出,  $\epsilon_z$  的可观测度较低, 而  $\phi_U$ 、 $\nabla_x$  和  $\nabla_y$  为不可观测量, 其余各量均可观。对于单位置对准,  $\phi_U$  的低可观测度必将影响到对准的精度。为了提高对准过程中姿态失准角, 特别是航向失准角  $\phi_U$  的可观测度, 可以从可观测性分析结果及工程应用特性出发, 对上述模型进行降阶, 以提高单位置对准精度。

## 3 单位置对准模型降阶

从上述结果可以看出, 10 状态模型的状态可观测数为 7, 即有 3 个状态量不可观测。从工程应用出发, 速度误差为系统观测量, 姿态误差为待估计

$\mathbf{X}(t) = [\phi_E \phi_N \phi_U \delta v_E \delta v_N \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \nabla_x \nabla_y]^T$ , (1)  
式中  $\phi_E$ 、 $\phi_N$  分别为东向和北向水平失准角,  $\phi_U$  为方位失准角,  $\delta v_E$ 、 $\delta v_N$  分别为东向和北向速度误差,  $\epsilon_i$  ( $i=x, y, z$ ) 为  $i$  陀螺仪随机常值漂移,  $\nabla_i$  ( $i=x, y$ ) 为  $i$  加速度计的随机常值偏置。系统状态方程及量测方程在已有文献[1-2, 5-6]中均有论述。

利用奇异值分解法对上述系统单位置对准的 10 状态进行可观测性分析, 其各状态量对应的可观测度如表 1 所示。

表 1 单位置对准各状态量可观测度

Table 1 Observability degree of each state in fixed position alignment

量, 可以从惯性器件的零偏误差量中去除 3 个状态量使模型降阶, 目的是既保证其余状态量均可观, 又使其可观测度最大。

5 个惯性器件的零偏误差去除其中 3 个共有 10 种不同的组合, 而 10 种不同组合对其他 7 个状态的影响不同, 有的甚至使得系统能观测矩阵降秩。7 状态可观测性计算结果如表 2 所示。

从表 2 可以看出, 有 2 种组合的可观测状态维数为 7, 而其余均有状态量不可观。按奇异值分解的可观测度分析方法, 这 2 种组合各状态量的可观测度如表 3 所示。

表 2 7 状态模型可观测维数

Table 2 Observable states dimension of seven-order model

State removed	$\epsilon_z \nabla_x \nabla_y$	$\epsilon_y \nabla_x \nabla_y$	$\epsilon_y \epsilon_z \nabla_y$	$\epsilon_y \epsilon_z \nabla_x$	$\epsilon_x \nabla_x \nabla_y$
Dimension of observable states	6	6	5	6	7
State removed	$\epsilon_x \epsilon_z \nabla_y$	$\epsilon_x \epsilon_z \nabla_x$	$\epsilon_x \epsilon_y \nabla_y$	$\epsilon_x \epsilon_y \nabla_x$	$\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z$
Dimension of observable states	6	6	6	7	6

表 3 2 种组合各状态量可观测度

Table 3 Observability degree of each state of the two combinations

State variable	$\phi_E$	$\phi_N$	$\phi_U$	$\delta v_E$	$\delta v_N$	$\epsilon_y$	$\epsilon_z$
Observability degree	0.49648	0.49669	$2.8354 \times 10^{-7}$	2.7616	2.7616	0.0044858	$1.5142 \times 10^{-9}$
State variable	$\phi_E$	$\phi_N$	$\phi_U$	$\delta v_E$	$\delta v_N$	$\epsilon_z$	$\nabla_y$
Observability degree	0.49884	0.49648	$2.8354 \times 10^{-7}$	2.7616	2.7628	$1.5142 \times 10^{-9}$	$1.6622 \times 10^{-8}$

比较 2 组状态量的可观测度, 可以看出第 1 组状态量组合优于第 2 组状态量组合。所以可以将单位置对准的 10 状态模型降阶为 7 状态模型, 即  $\mathbf{X}(t) = [\phi_E \phi_N \phi_U \delta v_E \delta v_N \epsilon_x \epsilon_z]^T$ , 其误差状态方程为

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t), \quad (2)$$

式中

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\phi\phi} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & -\mathbf{C}_{32} \\ \mathbf{F}_{v\phi} & \mathbf{F}_{vv} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_{\phi\phi} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{ie} \sin L & -\omega_{ie} \cos L \\ -\omega_{ie} \sin L & 0 & 0 \\ \omega_{ie} \cos L & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_{v\phi} = \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 \\ g & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathbf{F}_{vv} = \begin{bmatrix} 0 & 2\omega_{ie} \sin L \\ -2\omega_{ie} \sin L & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{32} \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{w}(t) = [\epsilon_{wy} \quad \epsilon_{wz}]^T, \quad (8)$$

其中  $\epsilon_{wi}$  ( $i = y, z$ ) 为  $i$  陀螺仪噪声;  $\omega_{ie}$  为地球自转角速度;  $L$ 、 $g$  分别为当地纬度和重力加速度;  $\mathbf{C}_{32}$  为载体系到导航系的转换矩阵  $\mathbf{C}_b^n$  的第二三列元素构成的矩阵;  $\mathbf{0}_{m \times n}$  为  $m$  行  $n$  列的零矩阵。

## 4 实验验证

为了验证该模型的效果, 以课题组自行研制的两套激光惯导系统(系统 A、系统 B)的实测数据为例, 每套系统各取一组实验数据, 以全球定位系统(GPS)输出为基准, 以单位位置对准后的纯惯性导航

位置精度来衡量对准效果。两套激光惯导系统均由 3 个零漂为  $0.003(^{\circ})/h$  的激光陀螺和 3 个零偏为  $50 \mu\text{g}$  的石英加表组成, 数据更新频率为  $100 \text{ Hz}$ 。采用  $3 \text{ min}$  粗对准与  $10 \text{ min}$  滤波精对准的方式进行单位置对准。系统 A 对准后的纯惯性导航时间为  $1.5 \text{ h}$ , 其实际运行轨迹如图 1 所示。

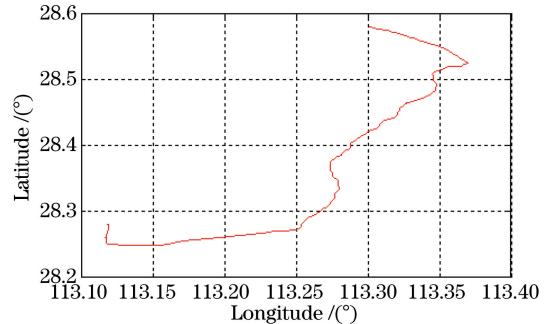


图 1 惯导系统 A 运行轨迹

Fig. 1 Trajectory of SINS A

10 状态卡尔曼滤波参数设为:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{diag}\{(0.1)^2 \quad (0.1)^2 \quad (0.5)^2 \quad (1 \text{ m/s})^2 \quad (1 \text{ m/s})^2 \quad [0.01(^{\circ})/h]^2 \\ &\quad [0.01(^{\circ})/h]^2 \quad [0.01(^{\circ})/h]^2 \quad (50 \mu\text{g})^2 \quad (50 \mu\text{g})^2\}, \\ \mathbf{q} &= \text{diag}\{[0.01(^{\circ})/h]^2 \quad [0.01(^{\circ})/h]^2 \quad [0.01(^{\circ})/h]^2 \quad (20 \mu\text{g})^2 \quad (20 \mu\text{g})^2\}, \\ \mathbf{r} &= \text{diag}[(0.1 \text{ m/s})^2 \quad (0.1 \text{ m/s})^2]. \end{aligned}$$

降阶后的 7 状态卡尔曼滤波参数设为:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{diag}\{(0.1)^2 \quad (0.1)^2 \quad (0.5)^2 \quad (1 \text{ m/s})^2 \quad (1 \text{ m/s})^2 \quad [0.01(^{\circ})/h]^2 \quad [0.01(^{\circ})/h]^2\}, \\ \mathbf{q} &= \text{diag}\{[0.01(^{\circ})/h]^2 \quad [0.01(^{\circ})/h]^2\}, \\ \mathbf{r} &= \text{diag}[(0.1 \text{ m/s})^2 \quad (0.1 \text{ m/s})^2]. \end{aligned}$$

可以看出, 同一参数设置值相同。本文主要分析卡尔曼滤波参数  $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$  矩阵的选取对对准精度的影响。

由于水平失准角的可观测度较大, 滤波估计精度较高, 所以单位位置对准主要针对方位失准角展开研究, 而对方位失准角影响最大的为  $\mathbf{P}$  矩阵第 3 对角元素(以  $P_3$  表示)。所以对于  $\mathbf{P}$  矩阵, 本文考察  $P_3$  对对准精度的影响, 设定其他参数不变, 分别选

取  $P_3$  为  $0.1p_3$ 、 $0.2p_3$ 、 $0.5p_3$ 、 $1.0p_3$ 、 $10.0p_3$ , 其中  $p_3$  为设定值, 即  $p_3 = (0.5)^2$ 。纯惯性导航位置误差分别如图 2 和图 3 所示, 其中图 2 为 10 状态对准纯惯性位置误差随  $P_3$  的变化, 图 3 为 7 状态对准纯惯性位置误差随  $P_3$  的变化。从图中可以看出  $P_3$  对降阶前原模型影响较大, 而对降阶后的模型影响不大, 其最大位置误差如表 4 所示。

表 4 两种模型下 A 系统纯惯性位置误差随  $P_3$  的变化

Table 4 Position errors of two models of SINS A with  $P_3$

$P_3$	$0.1p_3$	$0.2p_3$	$0.5p_3$	$p_3$	$10p_3$
Maximum position error of ten-order model / m	1291	770	491	417	468
Maximum position error of seven-order model / m	413	410	408	407	407

对于  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  矩阵, 设定其他参数不变, 分别选取  $\mathbf{Q}$  为  $0.1\mathbf{q}$ 、 $1.0\mathbf{q}$ 、 $10.0\mathbf{q}$ , 选取  $\mathbf{R}$  为  $1.0\mathbf{r}$ 、 $10.0\mathbf{r}$ 、 $100.0\mathbf{r}$ 。其纯惯性导航位置误差分别为图 4~7 所示, 其中图 4

和图 6 分别为 10 状态对准纯惯性位置误差随  $\mathbf{Q}$  及  $\mathbf{R}$  的变化, 图 5 和图 7 分别为 7 状态对准纯惯性位置误差随  $\mathbf{Q}$  及  $\mathbf{R}$  的变化, 其最大位置误差如表 5 所示。

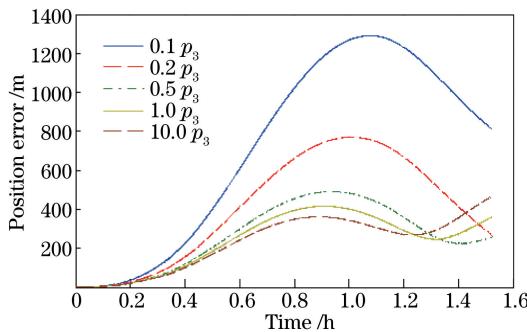


图 2 A 系统 10 阶模型纯惯性位置误差随  $P_3$  的变化  
Fig. 2 Position error of ten-order model of SINS A as a function of  $P_3$

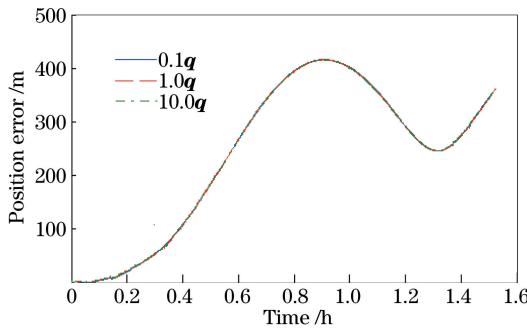


图 4 A 系统 10 阶模型纯惯性位置误差随  $Q$  的变化  
Fig. 4 Position error of ten-order model of SINS A as a function of  $Q$

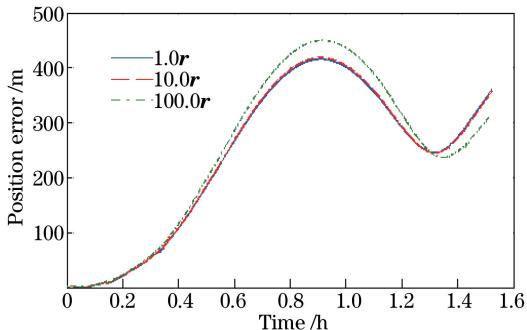


图 6 A 系统 10 阶模型纯惯性位置误差随  $R$  的变化  
Fig. 6 Position error of ten-order model of SINS A as a function of  $R$

从图 4~7 及表 5 可以看出  $Q$  对降阶前后的模型无影响,而  $R$  对降阶前的模型影响大于对降阶后模型的影响。由此可知,在文中所选范围之内,降阶后的模型对滤波参数的容忍性更大,且降阶后的精

表 5 两种模型下 A 系统纯惯性位置误差随  $Q$  及  $R$  的变化

Table 5 Position errors of two models of SINS A with  $Q$  and  $R$

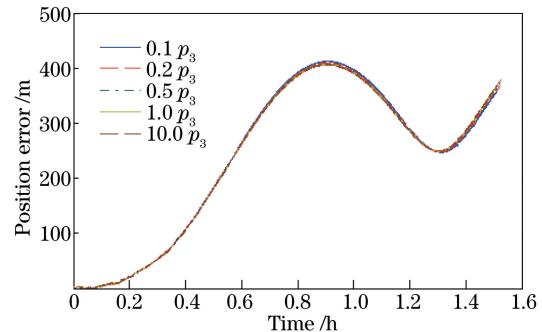


图 3 A 系统 7 阶模型纯惯性位置误差随  $P_3$  的变化  
Fig. 3 Position error of seven-order model of SINS A as a function of  $P_3$

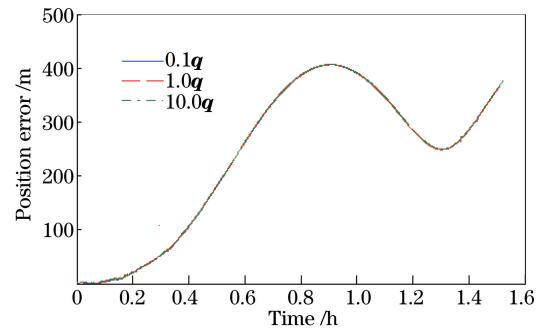


图 5 A 系统 7 阶模型纯惯性位置误差随  $Q$  的变化  
Fig. 5 Position error of seven-order model of SINS A as a function of  $Q$

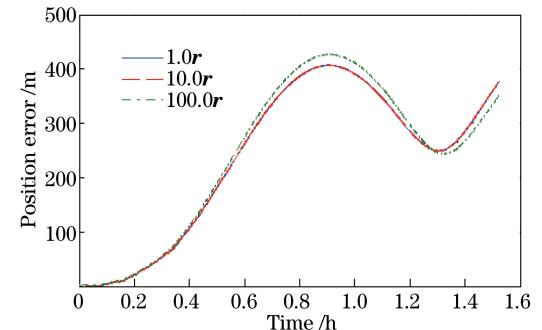


图 7 A 系统 7 阶模型纯惯性位置误差随  $R$  的变化  
Fig. 7 Position error of seven-order model of SINS A as a function of  $R$

度要高于降阶前的精度,这是因为降阶后的模型 7 个状态量均可观,对于单位位置对准,降阶前后其水平失准角的可观测度均较大,滤波估计精度较高,而方位失准角由不可观测变为可观测。

$Q$	$0.1q$	$1.0q$	$10.0q$
Maximum position error of ten-order model /m	417	417	417
Maximum position error of seven-order model /m	407	407	407
$R$	$1.0r$	$10.0r$	$100.0r$
Maximum position error of ten-order model /m	417	420	451
Maximum position error of seven-order model /m	407	407	427

为了进一步验证该结论,选取系统 B 的一组实验数据,结果显示  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  的选取对对准精度的影响与系统 A 基本相同,这里只给出了纯惯性导航位

表 6 两种模型下 B 系统纯惯性位置误差随  $P_{33}$  的变化

Table 6 Position errors of two models of SINS B with  $P_3$

$P_3$	$0.1 p_3$	$0.2 p_3$	$0.5 p_3$	$1.0 p_3$	$10.0 p_3$
Maximum position error of ten-order model /m	795	740	715	709	705
Maximum position error of seven-order model /m	704	704	704	704	704

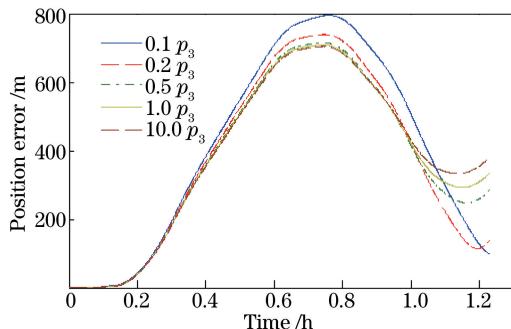


图 8 B 系统 10 阶模型纯惯性位置误差随  $P_3$  的变化  
 Fig. 8 Position error of ten-order model of SINS B  
 as a function of  $P_3$

5 结 论

针对激光惯导系统单位位置对准 10 状态滤波估计中一些状态量不可观,进而影响对准精度的问题,利用奇异值分解法分析了这些状态量的可观测度。根据可观测度分析结果及工程应用特性进行模型降阶,分析了不同组合状态的可观测维数及可观测度,选择最优降阶模型,得到了 7 阶对准模型。实验表明降阶后的 7 阶对准模型对滤波参数的容忍性更大,且降阶后模型的对准精度要高于降阶前的精度,突出显示了 7 阶对准模型的优越性。

## 参 考 文 献

- [1] Zhong B, Chen G X, Zha F. Observability analysis for initial alignment of single-axial rotating INS[J]. Journal of Naval University of Engineering, 2013, 24(6): 11-15.  
钟斌, 陈广学, 查峰. 基于 PWCS 理论的单轴旋转惯导系统初始对准的可观测性分析[J]. 海军工程大学学报, 2013, 24(6): 11-15.
  - [2] Zhao L, Li L, Sun M, et al. Analysis on observability of SINS multi-position alignment based on singular value decomposition [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(5): 523-528.  
赵琳, 李亮, 孙明, 等. 基于 SVD 的 SINS 多位置对准可观测性分析[J]. 中国惯性技术学报, 2008, 16

置误差随  $P_3$  的变化,其最大位置误差如图 8 和图 9 以及表 6 所示。以上两组实验表明降阶后的 7 阶模型优于原 10 阶模型。

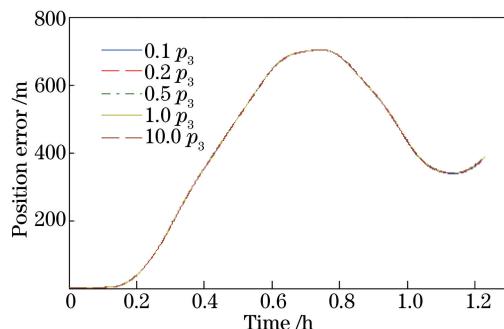


Fig. 9 Position error of seven-order model of SINS  
as a function of  $P_3$

(5): 523-528.

- [3] Zhou J N, Wu Z J, Fan Z, et al. Research on Kalman filter algorithm for vehicle laser doppler velocimeter[J]. Chinese Journal of Lasers, 2014, 41(11): 1102006.
  - [4] Cao G L, Yang Y F, Wang F, et al. Extended Kalman based polarization and carrier phase quickly tracking for PDM-16QAM[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(12): 1206005.
  - [5] Wang R Y, Xu J N, Bian H W. Initial alignment of azimuth rotating GINS based on observability analysis [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2009, 17(1): 15-19.
  - [6] Yu X D, Long X W, Wang Y, et al. Research on multi-position alignment in single-axial rotation inertial navigation system with ring laser gyroscope [J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators, 2011, 24(6): 824-828.
  - [7] Yu X D, Long X W, Wang Y, et al. Research on multi-position alignment in single-axial rotation inertial navigation system with ring laser gyroscope [J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators, 2011, 24(6): 824-828.

- 24(6): 824-828.
- [7] Tan C M, Zhu X H, Wang Y, *et al.* Multi-position alignment with arbitrary rotation axis for SINS[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2015, 23(3): 293-297  
谭彩铭, 朱欣华, 王宇, 等. 一种绕任意轴旋转的捷联惯导系统多位置初始对准方法[J]. 中国惯性技术学报, 2015, 23(3): 293-297.
- [8] Yue J, Gao l M, Yang Y K. Research on alignment of two-axis rotating inertial navigation system with laser gyroscope [J]. Optics & Optoelectronic Technology, 2011, 9(4): 66-68.  
乐晋, 高黎明, 杨玉孔. 一种适用于双轴旋转式激光陀螺惯导对准的方法研究[J]. 光学与光电技术, 2011, 9(4): 66-68.
- [9] Yang M X, Peng J W, Xu B H, *et al.* Multi-position alignment of uniaxial rotation inertial navigation system[J]. Navigation and Control, 2015, 14(2): 57-63.  
杨孟兴, 彭俊文, 徐兵华, 等. 单轴旋转惯导系统多位置对准技术研究[J]. 导航与控制, 2015, 14(2): 57-63.
- [10] Ma Y H, Hu J. Counterexamples for degree of observability analysis method based on SVD theory [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(4): 448-452.  
马艳红, 胡军. 基于 SVD 理论可观测度分析的几个反例[J]. 中国惯性技术学报, 2008, 16(4): 448-452.
- [11] Cao Y, Cai H, Zhang S F, *et al.* A new continuous self-calibration scheme for a gimbaled inertial measurement unit [J]. Measurement Science and Technology, 2012, 23(1): 015103.
- [12] Liu T, Zhou Y, Wang B, *et al.* Design of observability analysis based on-line self calibration method for rotational INS [J]. Navigation and Control, 2014, 12(1): 1-7.  
刘彤, 周元, 王博, 等. 基于可观测性分析的旋转式惯导系统在线自标定方法的设计[J]. 导航与控制, 2014, 12(1): 1-7.