

自聚焦光伏光折变晶体中奇偶间隙孤子序列研究

高立许^{1,2}, 卢克清^{1,2}, 赵 冲^{1,2}, 惠娟利^{1,2}, 陈卫军^{1,2}

¹天津工业大学光电检测技术与系统天津市重点实验室, 天津 300387;

²天津工业大学电子与信息工程学院, 天津 300387

摘要 研究了自聚焦光伏光折变晶体中奇偶间隙孤子序列的形成及其稳定性。这些间隙孤子只存在于半无限间隙内, 它们的存在区域随其阶数的增加而减少, 阶数高的间隙孤子占据更多的格子。这些间隙孤子的能流值随传播常数的增大而增大, 给定一传播常数, 阶数高的间隙孤子具有高的能流值。对高阶间隙孤子, 边瓣强度大, 中间各瓣强度相等, 改变传播常数能够控制边瓣和中间瓣的强度。用数值计算方法研究了这些间隙孤子的稳定性, 发现它们都是稳定的。

关键词 非线性光学; 间隙孤子; 波导阵列; 光折变晶体

中图分类号 O437

文献标识码 A

doi: 10.3788/CJL201744.0908001

Study on Sequence of Odd and Even Gap Solitons in Self-Focusing Photovoltaic-Photorefractive Crystals

Gao Lixu^{1,2}, Lu Keqing^{1,2}, Zhao Chong^{1,2}, Hui Juanli^{1,2}, Chen Weijun^{1,2}

¹Tianjin Key Laboratory of Optoelectronic Detection Technology and Systems, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300387, China;

²School of Electronics and Information Engineering, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300387, China

Abstract The formation and the stability of the sequence of odd and even gap solitons in self-focusing photovoltaic-photorefractive crystals are studied. These gap solitons only exist in semi-infinite gaps, and their existence domain decreases with the increase of their orders. The gap solitons with higher order occupy more lattices. The energy flow value of these gap solitons increases with the increase of propagation constant. Given a propagation constant, gap solitons with higher order have higher energy flow value. For high-order interphase solitons, the intensities of side lobes are larger and the intensities of the middle lobes are the same. The intensities of side and middle lobes can be controlled by changing the propagation constant. The stability of these gap solitons is investigated numerically and they are proved to be stable.

Key words nonlinear optics; gap soliton; waveguide array; photorefractive crystal

OCIS codes 190.6135; 190.5330; 190.4400

1 引 言

光折变晶体中的空间孤子是目前非线性光学领域的热点课题之一, 迄今为止已经发现的空间孤子主要包括屏蔽孤子^[1-3]、光伏孤子^[4-6]、屏蔽光伏孤子^[7-9]、光折变聚合物孤子^[10-11]、表面波^[12-13]以及中心对称光折变晶体中的孤子^[14-15]等, 它们都是在均匀光折变晶体内形成的。另一方面, 光折变晶体中光诱导的光子晶格、

收稿日期: 2017-04-21; 收到修改稿日期: 2017-05-14

基金项目: 天津市自然科学基金(13JCYBJC16400)

作者简介: 高立许(1991—), 男, 硕士研究生, 主要从事空间光孤子及非线性光学方面的研究。

E-mail: 2427956852@qq.com

导师简介: 卢克清(1960—), 男, 博士, 教授, 主要从事光孤子及非线性光学方面的研究。

E-mail: kqlutj@126.com(通信联系人)

光伏光折变晶体和中心对称光折变晶体中制作的波导阵列,由于光波在这些光周期结构里传播时能产生新颖的光学现象,受到人们的广泛关注和研究^[16]。线性光波在光周期结构里传播时能产生布洛赫波带和禁止的间隙结构,在间隙内线性光波是禁止传播的。对光周期结构内非线性光波的传播,当光波自身的非线性效应与离散衍射相平衡时能产生间隙孤子,其传播常数落在间隙内。在光折变晶体中光诱导的光子晶格内已经发现了间隙孤子的许多分支:基孤子^[17-19]、偶极孤子^[20-21]、涡旋孤子^[22-23]和缺陷孤子^[24-27]等,这些间隙孤子都位于不同的间隙内。对在光伏光折变晶体和中心对称光折变晶体中制作的波导阵列内的间隙孤子的报道较少。2014年,国内学者在中心对称光折变晶体中制作的波导阵列内预言了表面间隙孤子^[28]。2015年,Pierangeli等^[29]在中心对称光折变晶体钽铌酸钾锂(KLTN)中制作的波导阵列内预言并观察到了间隙连续孤子。2004年,Kartashov等^[30]在光伏光折变晶体中制作的波导阵列内提出了孤子串。2005年,Chen等^[31]在光伏光折变晶体LiNbO₃中制作出了波导阵列,从理论上提出了间隙孤子。2007年,Smirnov等^[32]在自散焦光伏光折变晶体中制作的波导阵列内观察到了高阶间隙孤子。

本文研究了自聚焦光伏光折变晶体中制作的波导阵列内奇偶间隙孤子序列的形成,分析了不同传播常数情况下间隙孤子的能流变化,给出了不同光格子深度情况下间隙孤子的存在区域,讨论了不同传播常数条件下奇偶间隙孤子外形的变化,用波传播法和线性稳定性分析证明了奇偶间隙孤子的稳定性。

2 理论模型

假设一光束在自聚焦和线性折射率周期调制的光伏光折变晶体中沿 z 轴传播,沿 x 轴方向衍射,考虑一维情况,在傍轴近似条件下,光波传播的无量纲非线性薛定谔方程为^[30,32]

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} - \frac{|q|^2 q}{1+S|q|^2} - pRq, \quad (1)$$

式中 $q(\eta, \xi)$ 为光场慢变化振幅包络, $\eta = x/x_0$ 为横向坐标, x_0 是任意横向空间宽度, $\xi = z/kx_0^2$ 为纵向坐标, $k = 2\pi n_e/\lambda$ 为光伏光折变晶体中的光波数, n_e 为未扰动晶体折射率, λ 为光束波长; $S = 2/(k^2 n_e^2 r_{33} |E_p| x_0^2)$ 为光伏光折变晶体中的饱和参数, r_{33} 为电光系数, E_p 为光伏常数; $p = k^2 \sigma x_0^2/2$ 为光格子深度, σ 为折射率的调制深度, $R(\eta) = \cos^2(\Omega\eta)$ 为晶体折射率的横向分布, Ω 为调制圆频率。本研究以光伏光折变晶体钛酸钡(BaTiO₃)为例,文献[7]已经揭示用旋转光的偏振方向可以实现钛酸钡晶体自聚焦与自散焦的相互转换,本研究取 $p = 16, S = 0.5, \Omega = 2.067$,这些参数与文献[32]相同,该文献已经观察到了自散焦光伏光折变晶体中的高阶间隙孤子。当一光束在晶体中沿 z 轴传播时,(1)式保存能流 $U = \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 d\eta$ 。

为了研究间隙孤子的存在条件,首先分析线性化(1)式的带隙结构。根据布洛赫理论,线性化(1)式的本征函数能以下面的方法得到:假设 $q(\eta, \xi) = u(\eta) \exp(ik_\eta \eta - ib\xi)$,其中 $u(\eta)$ 为与格子相同周期的周期函数, k_η 为布洛赫波数, b 为传播常数。在这种情况下,(1)式满足方程

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 u}{d\eta^2} + ik_\eta \frac{du}{d\eta} - \frac{1}{2} k_\eta^2 u + pRu + bu = 0, \quad (2)$$

用平面波展开法能从(2)式得到带隙图。图1(a)给出了这种周期系统的带隙结构,一个半无限间隙,无数有限间隙[注意:图1(a)仅画出两个有限间隙],布洛赫波不能存在于间隙内。

为了寻找(1)式的稳态孤子解,展开光束复振幅 $q(\eta, \xi)$ 为 $q(\eta, \xi) = u(\eta) \exp(-ib\xi)$,其中 $u(\eta)$ 为实函数, b 为实传播常数。将 $q(\eta, \xi)$ 的展开式代入(1)式得到

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 u}{d\eta^2} + \frac{u^2}{1+Su^2} u + pRu + bu = 0. \quad (3)$$

用数值计算方法能从(3)式得到奇偶间隙孤子序列。将 $u(\eta)$ 展开为离散傅里叶级数,然后将(3)式转换成求矩阵本征值的问题,其中 b 为本征值。(3)式已经证明自聚焦光伏光折变晶体中间隙孤子仅存在于半无限间隙内。

3 数值结果

对于(3)式的解——奇间隙孤子序列,图1(b)给出了一阶、三阶和五阶间隙孤子的能流与传播常数的关

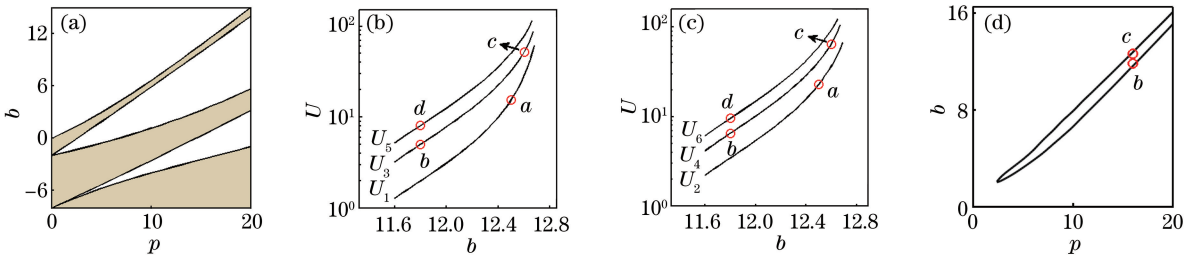


图 1 (a) 周期格子的带隙结构; (b) $p=16$ 、 $\Omega=2.067$ 和 $S=0.5$ 时一阶、三阶和五阶间隙孤子的能流与传播常数的关系曲线; (c) $p=16$ 、 $\Omega=2.067$ 和 $S=0.5$ 时二阶、四阶和六阶间隙孤子的能流与传播常数的关系曲线; (d) $\Omega=2.067$ 和 $S=0.5$ 时三阶间隙孤子的传播常数与光格子深度的关系曲线

Fig. 1 (a) Bandgap structure of periodic lattice; (b) energy flow versus propagation constant for first-order, triple-order and fifth-order gap solitons with $p=16$, $\Omega=2.067$ and $S=0.5$; (c) energy flow versus propagation constant for second-order, four-order and sixth-order gap solitons with $p=16$, $\Omega=2.067$ and $S=0.5$; (d) propagation constant versus optical lattice's depth for triple-order gap soliton with $\Omega=2.067$ and $S=0.5$

系曲线。从图 1(b) 可以看出, 奇间隙孤子的能流值随传播常数的增大而增大; 当传播常数给定时, 奇间隙孤子的能流值随其阶数的增大而增大。当 $11.60 < b < 12.75$ 、 $11.60 < b < 12.73$ 和 $11.60 < b < 12.70$ 时, 一阶、三阶和五阶间隙孤子存在。这样, 奇间隙孤子的存在区域随其阶数的增加而减少。当 $b=12.50$ 时 [图 1(b) 中的 a 点], 图 2(a) 表示一阶间隙孤子的外形, 有一个瓣, 其强度最大值位于格子的最小位置。三阶间隙孤子由两个边瓣和一个中心瓣组成, 两边瓣的强度相等, 一个边瓣的强度大于中心瓣的强度 [图 2(b) 和 (c)]。当 $b=11.80$ [图 1(b) 中的 b 点] 和 $b=12.60$ [图 1(b) 中的 c 点] 时, 三阶间隙孤子的外形分别如图 2(b) 和 (c) 所示。从图 2(b) 和 (c) 可以看出, 中心瓣的强度随 b 的增加而减少。图 1(d) 给出了三阶间隙孤子的传播常数与光格子深度的关系曲线, 三阶间隙孤子的存在区域随光格子深度的减小而减小, 当光格子深度值小于 2.4 时, 将不存在三阶间隙孤子。当 $b=11.80$ 时 [图 1(b) 中的 d 点], 图 2(d) 表示五阶间隙孤子的外形, 一个单瓣分别产生在三阶间隙孤子的两边, 两边的瓣强度大, 中间三个瓣强度相等。

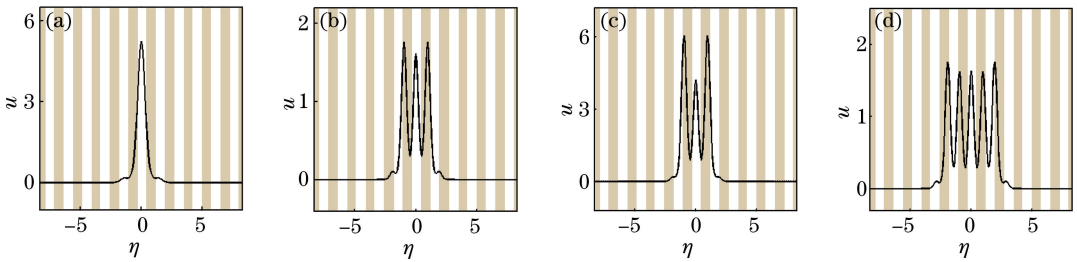


图 2 (a) $b=12.50$ 时一阶间隙孤子的外形; (b) $b=11.80$ 和 (c) $b=12.60$ 时三阶间隙孤子的外形; (d) $b=11.80$ 时五阶间隙孤子的外形

Fig. 2 (a) Profile of first-order gap solitons with $b=12.50$; profile of triple-order gap solitons with (b) $b=11.80$ and (c) $b=12.60$; (d) profile of fifth-order gap solitons with $b=11.80$

对于(3)式的解——偶间隙孤子序列, 能流值随传播常数的增大而增大, 当传播常数的值固定时, 偶间隙孤子的阶数越高能流值越大, 如图 1(c) 所示。另一方面, 图 1(c) 表明二阶、四阶和六阶间隙孤子存在区域分别为 $11.60 < b < 12.79$ 、 $11.60 < b < 12.74$ 和 $11.60 < b < 12.71$ 。显然, 偶间隙孤子的存在区域随其阶数的增加而减少。二阶间隙孤子有相等强度的两个瓣, 且这两个瓣落在相邻格子的区域, 如图 3(a) 所示。当 $p=16$ 、 $\Omega=2.067$ 和 $S=0.5$ 时, 二阶间隙孤子在自散焦光伏光折变晶体中已经被观察到^[32]。四阶间隙孤子的结构与三阶间隙孤子的结构类似, 一个瓣分别产生在三阶间隙孤子的两边, 这个瓣的强度大于中间二阶间隙孤子一个瓣的强度 [图 3(b) 和 (c)]。图 3(b) 和 (c) 分别表示 $b=11.80$ [图 1(c) 中的 b 点] 和 $b=12.60$ [图 1(c) 中的 c 点] 时四阶间隙孤子的外形。从图 3(b) 和 (c) 可以看出, 当传播常数增大时, 中间二阶间隙孤子的两瓣强度变小。当 $b=11.80$ [图 1(c) 中的 d 点] 时, 六阶间隙孤子的外形如图 3(d) 所示。一个瓣分别产生在四阶间隙孤子的两边, 其中四阶间隙孤子的 4 个瓣强度相等, 两边的瓣强度大于中间各瓣的强度。仔细观察

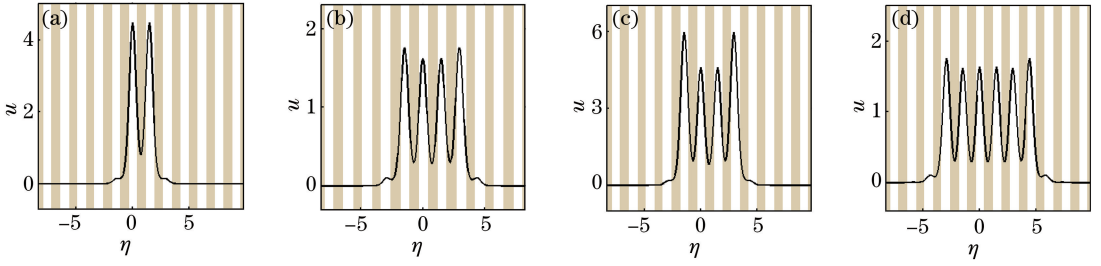


图 3 (a) $b=12.50$ 时二阶间隙孤子的外形; (b) $b=11.80$ 和 (c) $b=12.60$ 时四阶间隙孤子的外形; (d) $b=11.80$ 时六阶间隙孤子的外形

Fig. 3 (a) Profile of second-order gap solitons with $b=12.50$; profile of fourth-order gap solitons with (b) $b=11.80$ and (c) $b=12.60$; (d) profile of sixth-order gap solitons with $b=11.80$

图 2 和图 3, 可以得到结论: 阶数越高的间隙孤子占据格子越多。

为了研究奇偶间隙孤子的稳定性, 在(1)式演化时对入射光束加一高斯白噪声扰动, 入射光表达式为 $q(\eta, \xi=0) = u(\eta)[1 + g(\eta)]$, 其中 $g(\eta)$ 是具有高斯分布的随机函数, 方差为 σ_{noise}^2 。当高斯白噪声扰动 σ_{noise}^2 为 0.01 时, 图 4(a) 和 (b) 分别给出了对应于图 2(c) 的三阶间隙孤子和对应于图 3(d) 的六阶间隙孤子在自聚焦光伏光折变晶体中的稳定传输情况, 可以看出, 这些孤子在受到较强扰动时仍可保持原有的形状传输长的距离。另一方面, 引入扰动

$$q(\eta, \xi) = [u(\eta) + W(\eta, \xi) + iV(\eta, \xi)] \exp(-ib\xi), \quad (4)$$

式中 $W(\eta, \xi) = w(\eta, \delta) \exp(\delta\xi)$ 和 $V(\eta, \xi) = v(\eta, \delta) \exp(\delta\xi)$ 分别是扰动复函数的实部和虚部, 它们在间隙孤子传播中随复数增长率 δ 变化而变化, $w(\eta, \delta) \ll 1, v(\eta, \delta) \ll 1$ 。将 $q(\eta, \xi)$ 的表达式代入(1)式并线性化, 得到如下本征值方程:

$$\begin{cases} \delta w = -\frac{1}{2} \frac{d^2 v}{d\eta^2} - \frac{u^2 v}{1 + Su^2} - pRv - bv \\ \delta v = \frac{1}{2} \frac{d^2 w}{d\eta^2} + \frac{(Su^4 + 3u^2)w}{(1 + Su^2)^2} + pRw + bw \end{cases}, \quad (5)$$

用数值计算方法能得到(5)式的扰动增长率 $\text{Re}(\delta)$ 。当 $\text{Re}(\delta) > 0$, 间隙孤子是不稳定的, 否则是稳定的。图 4(c) 给出了对应于图 2(c) 的三阶间隙孤子扰动本征值谱, 而图 4(d) 给出了 $11.60 < b < 12.71$ 区域内六阶间隙孤子扰动增长率 $\text{Re}(\delta)$ 与传播常数的关系曲线, 从这些图可以看出 $\text{Re}(\delta) \leq 0$, 这样, 对应图 2(c) 和图 3(d) 的间隙孤子是稳定的, 这与上面波传播法研究的结论一致。对其余奇偶间隙孤子的研究也可以得到相似的结论。

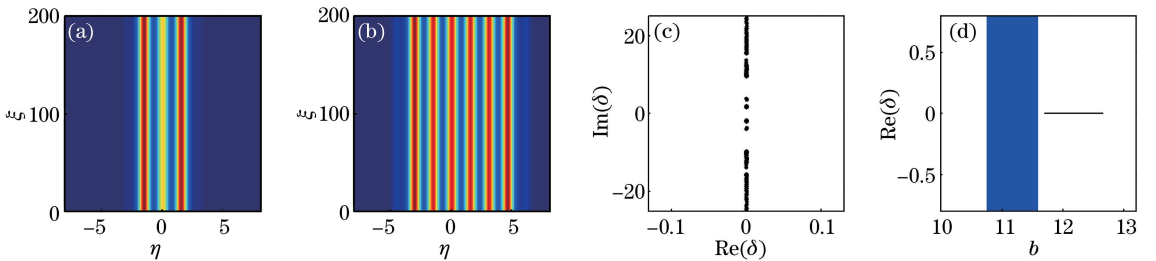


图 4 (a) 对应于图 2(c) 的三阶间隙孤子的传播; (b) 对应于图 3(d) 的六阶间隙孤子的传播; (c) 对应于图 2(c) 的三阶间隙孤子扰动本征值谱; (d) $11.60 < b < 12.71$ 区域内六阶间隙孤子扰动增长率 $\text{Re}(\delta)$ 与传播常数的关系曲线 (蓝色区域是布洛赫带)

Fig. 4 (a) Propagation of third-order gap solitons corresponding to Fig. 2(c); (b) propagation of sixth-order gap solitons corresponding to Fig. 3(d); (c) perturbation eigenvalue spectrum of third-order gap solitons corresponding to Fig. 2(c); (d) perturbation growth rate $\text{Re}(\delta)$ versus propagation constant for sixth-order gap solitons in region of $11.60 < b < 12.71$ (blue region is Bloch band)

4 结 论

研究了自聚焦光伏光折变晶体中奇偶间隙孤子序列的形成及其稳定性。奇偶间隙孤子序列只存在于半无限间隙内,奇偶间隙孤子的存在区域随光格子深度的减小而减少,当光格子深度值固定时,奇偶间隙孤子的存在区域随其阶数的增加而减少,阶数越高的间隙孤子占据格子就越多。这些间隙孤子的能流值随传播常数的增大而增大,当传播常数的值固定时,这些间隙孤子的阶数越高能流值越大。在奇偶间隙孤子序列中,只有二阶间隙孤子有两个相同的瓣,高阶间隙孤子的边瓣与中间各瓣大小不同,一个边瓣的强度大于一个中间瓣的强度,两边的瓣形状大小相同,并且中间各瓣的形状大小也相同。当传播常数增大时,中间瓣的强度变小,两边瓣的强度变大。用波传播法和线性稳定性分析已经证明这些奇偶间隙孤子都是稳定的。

参 考 文 献

- [1] Segev M, Valley G C, Crosignani B, *et al.* Steady-state spatial screening solitons in photorefractive materials with external applied field[J]. *Physical Review Letters*, 1994, 73(24): 3211-3214.
- [2] She W L, Chan C W, Lee W K. Dark and bright photovoltaic spatial solitons in photorefractive crystals with positive refractive-index perturbation[J]. *Optics Letters*, 2001, 26(14): 1093-1095.
- [3] Yan Man, Qin Yali, Liu Xian, *et al.* Self-deflection of low amplitude screening bright soliton in photorefractive crystal [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2015, 52(10): 101901.
 鄢 曼, 覃亚丽, 刘 鲜, 等. 低振幅屏蔽亮孤子在光折变晶体中的自偏转特性[J]. *激光与光电子学进展*, 2015, 52(10): 101901.
- [4] Segev M, Valley G C, Bashaw M C, *et al.* Photovoltaic spatial solitons[J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 1997, 14(7): 1772-1781.
- [5] Wang H, She W. Incoherently coupled grey photovoltaic spatial soliton families[J]. *Chinese Physics Letters*, 2005, 22(1): 128-131.
- [6] Zhang Yu, Hou Chunfeng, Sun Xiudong. Temperature effects on the photovoltaic spatial solitons in two-photon photorefractive media[J]. *Chinese J Lasers*, 2008, 35(5): 694-697.
 张 宇, 侯春风, 孙秀冬. 温度对双光子光折变介质中光伏孤子特性的影响[J]. *中国激光*, 2008, 35(5): 694-697.
- [7] Lu K, Tang T, Zhang Y. One-dimensional steady-state spatial solitons in photovoltaic photorefractive materials with an external applied field[J]. *Physical Review A*, 2000, 61(5): 053822.
- [8] Ji Xuanmang, Jiang Qichang, Liu Jinsong. Separate screening-photovoltaic soliton pairs in series two-photon photorefractive crystal circuit[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, 30(8): 2370-2376.
 吉选芒, 姜其畅, 刘劲松. 双光子光折变晶体串联回路中独立屏蔽光伏孤子对[J]. *光学学报*, 2010, 30(8): 2370-2376.
- [9] Li Wenhui, Hu Manli, Ma Zhibo, *et al.* Temporal evolution and controllable factors for self-deflection of screening photovoltaic solitons in LiNbO₃ crystal[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(2): 020201.
 李文慧, 忽满利, 马志博, 等. LiNbO₃ 晶体中屏蔽光伏孤子自偏转的时空演化与可控因素[J]. *物理学报*, 2012, 61(2): 020201.
- [10] Sheu F W, Shih M F. Photorefractive polymeric solitons supported by orientationally enhanced birefringent and electro-optic effects[J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2001, 18(6): 785-793.
- [11] Lu K, Li K, Zhang Y, *et al.* Gray photorefractive polymeric optical spatial solitons[J]. *Optics Communications*, 2010, 283(23): 4741-4748.
- [12] Zhang T H, Ren X K, Wang B H, *et al.* Surface waves with photorefractive nonlinearity[J]. *Physical Review A*, 2007, 76(1): 013827.
- [13] Tian Ning, Lu Keqing, Zhang Xianfeng, *et al.* Influence of guiding parameters and propagation constants on photorefractive surface waves[J]. *Chinese J Lasers*, 2012, 39(1): 0117002.
 田 宁, 卢克清, 张先锋, 等. 波导参数和传播常数对光折变表面波的影响[J]. *中国激光*, 2012, 39(1): 0117002.
- [14] Segev M, Agranat A J. Spatial solitons in centrosymmetric photorefractive media[J]. *Optics Letters*, 1997, 22(17): 1299-1301.
- [15] Zhang Baoju, Lu Keqing, Zhao Chong, *et al.* Research on defect solitons in kagome photonic lattices in centrosymmetric photorefractive crystals[J]. *Chinese J Lasers*, 2016, 43(12): 1208001.
 张宝菊, 卢克清, 赵 冲, 等. 中心对称光折变晶体中 Kagome 型光格子内缺陷孤子的研究[J]. *中国激光*, 2016, 43

- (12): 1208001.
- [16] Christodoulides D N, Lederer F, Silberberg Y. Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices [J]. *Nature*, 2003, 424(6950): 817-823.
- [17] Eisenberg H S, Silberberg Y, Morandotti R, *et al.* Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays [J]. *Physical Review Letters*, 1998, 81(16): 3383.
- [18] Yang J, Musslimani Z H. Fundamental and vortex solitons in a two-dimensional optical lattice [J]. *Optics Letters*, 2003, 28(21): 2094-2096.
- [19] Efremidis N K, Hudock J, Christodoulides D N, *et al.* Two-dimensional optical lattice solitons [J]. *Physical Review Letters*, 2003, 91(21): 213906.
- [20] Yang Bin, Qin Yali, Liu Xian, *et al.* Research on dipole solitons in optically-induced lattices [J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, 36(7): 0719001.
杨 斌, 覃亚丽, 刘 鲜, 等. 光诱导晶格中偶极孤子的研究 [J]. *光学学报*, 2016, 36(7): 0719001.
- [21] Yang J, Makasyuk I, Bezryadina A, *et al.* Dipole and quadrupolesolitons in optically induced two-dimensional photonic lattices: theory and experiment [J]. *Studies in Applied Mathematics*, 2004, 113(4): 389-412.
- [22] Song D, Lou C, Tang L, *et al.* Self-trapping of optical vortices in waveguide lattices with a self-defocusing nonlinearity [J]. *Optics Express*, 2008, 16(14): 10110-10116.
- [23] Wang J, Ji H, Liu P. Vortex solitons in the semi-infinite gap of optically induced periodic lattices [J]. *Chinese Physics B*, 2013, 22(4): 286-291.
- [24] Chen W, He Y, Wang H. Surface defect gap solitons [J]. *Optics Express*, 2006, 14(23): 11271-11276.
- [25] Yang J, Chen Z. Defect solitons in photonic lattices [J]. *Physical Review E*, 2006, 73(2): 026609.
- [26] Zhu X, Wang H, Zheng L X. Defect solitons in kagome optical lattices [J]. *Optics Express*, 2010, 18(20): 20786-20792.
- [27] Wang C, Lu K, Chen W, *et al.* Surface defect lattice solitons in photovoltaic-photorefractive crystals [J]. *Optics Communications*, 2015, 335: 140-145.
- [28] Zhan K, Hou C. Lattice surface solitons in diffusive nonlinear media driven by the quadratic electro-optic effect [J]. *Optics Express*, 2014, 22(10): 11646-11653.
- [29] Pierangeli D, Flammini M, Di M F, *et al.* Continuous solitons in a lattice nonlinearity [J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(20): 203901.
- [30] Kartashov Y V, Vysloukh V A, Torner L. Soliton trains in photonic lattices [J]. *Optics Express*, 2004, 12(13): 2831-2837.
- [31] Chen F, Stepic M, Rüter C E, *et al.* Discrete diffraction and spatial gap solitons in photovoltaic LiNbO₃ waveguide arrays [J]. *Optics Express*, 2005, 13(11): 4314-4324.
- [32] Smirnov E, Rüter C E, Kip D, *et al.* Observation of higher-order solitons in defocusing waveguide arrays [J]. *Optics Letters*, 2007, 32(13): 1950-1952.