

# 拉盖尔高斯光束矢量远场特性的角谱法分析

徐强<sup>1</sup>, 潘丰<sup>1</sup>, 黄莉<sup>2</sup>, 王杏涛<sup>2</sup>, 韩一平<sup>1</sup>, 吴振森<sup>1</sup>

<sup>1</sup>西安电子科技大学物理与光电工程学院, 陕西 西安 710071;

<sup>2</sup>中国空空导弹研究院, 河南 洛阳 471009

**摘要** 基于非傍轴矢量光束传输理论,研究了拉盖尔高斯光束的远场特性。运用角谱衍射公式以及稳相法,得到了初始为线偏振态的拉盖尔高斯光束传输一段距离后的矢量电场分布的解析表示式。数值计算了初始为 $x$ 方向偏振的拉盖尔高斯光束沿 $z$ 轴传播时各方向的电场分量及等相面空间分布。结果表明,传输一段距离后,出现了平行于传播方向的电场分量,其强度分布呈双峰结构,且其值远小于垂直电场方向的分量值;随着拓扑荷数的增加,该平行分量增加,光斑发散程度也相应增强。该光束等相面呈螺旋状分布。

**关键词** 光通信; 拉盖尔高斯光束; 非傍轴矢量光束传输; 角谱法; 光场分布

中图分类号 O436

文献标识码 A

doi: 10.3788/CJL201744.0805001

## Analysis of Vectorial Far-Field Characteristics of Laguerre-Gaussian Beams by Angular-Spectrum Method

Xu Qiang<sup>1</sup>, Pan Feng<sup>1</sup>, Huang Li<sup>2</sup>, Wang Xingtao<sup>2</sup>, Han Yiping<sup>1</sup>, Wu Zhensen<sup>1</sup>

<sup>1</sup>School of Physics and Optoelectronic Engineering, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China;

<sup>2</sup>China Airborne Missile Academy, Luoyang, Henan 471009, China

**Abstract** Based on the nonparaxial vectorial beam propagation theory, the far-field characteristics of Laguerre-Gaussian beams are studied. By using the angular-spectrum diffraction formula and the stationary-phase method, the analytic expression of the vectorial electrical field distribution for a Laguerre-Gaussian beam with an initial linear polarization state after some propagation distances is obtained. The electric field components along different directions and the spatial distribution of the equiphase surface are numerically calculated for a Laguerre-Gaussian beam which propagates along the  $z$  axis and is initially polarized in the  $x$  direction. The results show that, after some propagation distances, the electric field component which is parallel to the propagation direction appears and its intensity distribution shows a double-peak pattern. The value of this component is much lesser than that of the perpendicular component. With the increase of the topological charge, this parallel component increases and the light spot divergence degree enhances. This beam has a helical equiphase surface.

**Key words** optical communications; Laguerre-Gaussian beams; nonparaxial vectorial beam propagation; angular-spectrum method; optical field distribution

**OCIS codes** 060.4510; 140.3295; 260.1960; 050.1960

## 1 引言

涡旋光束具有独特的相位结构,携带轨道角动量信息,在光学微操控、生物医学、量子信息处理、量子计算及通信等方面有着广泛的应用。围绕着涡旋光束的产生、检测、传输以及应用等问题,产生了一系列的研究课题。运用螺旋相位板、空间光调制器、全息光栅等方法可以产生涡旋光束<sup>[1-8]</sup>。

拉盖尔高斯光束是典型的涡旋光束,学者们对其在傍轴范围内的传输特性开展了大量研究<sup>[9-13]</sup>。然而,高阶拉盖尔高斯光束的等相面呈螺旋形,其电场在平行和垂直于传播方向都有分量,其中平行于传播方向的

收稿日期: 2017-03-10; 收到修改稿日期: 2017-04-11

基金项目: 国家自然科学基金(61571355)、航空科学基金(20150181002)

作者简介: 徐强(1973—),男,博士,副教授,主要从事激光传输、散射方面的研究。E-mail: qxu@xidian.edu.cn

分量大小随着阶数的增加而增大,其严格远场分布的计算需要用到非傍轴传输理论。一些学者进行了这方面的研究,如周国泉等<sup>[14-15]</sup>运用矢量结构理论研究了拉盖尔高斯光束矢量结构相的横电(TE)项和横磁(TM)项以及远场发散角;丁攀峰等<sup>[16-17]</sup>在衍射理论的基础上对离轴涡旋光束的传输进行了研究。高阶拉盖尔高斯光束的光斑展宽比低阶的大,展宽比例与拓扑荷数模的平方成正比<sup>[13]</sup>,光斑展宽和光束发散角的增大使得传播方向上的电场分量大小也相应增加。涡旋光束的束腰变小,其光斑展宽和远场发散角也会增大,这些情况下都需要考虑传播方向上的电场分量,需用更严格的衍射理论分析涡旋光场的传输。本文基于光束非傍轴矢量光束传输理论,运用角谱法研究了其矢量远场的传输特性,得到了拉盖尔高斯光束平行及垂直于传播方向的电场分布及相位结构的解析表示式,可精准描述涡旋光场的传输。

## 2 角谱法分析矢量拉盖尔高斯光束的传输特性

运用角谱法分析矢量拉盖尔高斯光束的传输特性,自由空间中的波动方程可表示为

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

式中  $k$  为波数,  $\mathbf{E}$  为电场强度。电场强度各分量在半空间的矢量化解用角谱<sup>[18]</sup>表示为

$$E_x(r) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A_x(p, q) \exp[ik(px + qy + mz)] dp dq, \quad (2)$$

$$E_y(r) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A_y(p, q) \exp[ik(px + qy + mz)] dp dq, \quad (3)$$

$$E_z(r) = - \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{p}{m} A_x(p, q) + \frac{q}{m} A_y(p, q) \right] \exp[ik(px + qy + mz)] dp dq, \quad (4)$$

式中  $r$  为光源到传输点的距离,  $x, y, z$  为直角坐标系坐标, 电场强度  $\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  分别为  $x, y, z$  方向的单位矢量,  $E_x, E_y, E_z$  分别为  $(x, y, z)$  点处  $x, y, z$  方向的电场分量, 且

$$m = \begin{cases} (1 - p^2 - q^2)^{1/2}, & p^2 + q^2 \leq 1 \\ i(p^2 + q^2 - 1)^{1/2}, & p^2 + q^2 > 1 \end{cases}, \quad (5)$$

$$A_x(p, q) = \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} E_x(x, y, 0) \exp[-ik(px + qy)] dx dy, \quad (6)$$

$$A_y(p, q) = \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} E_y(x, y, 0) \exp[-ik(px + qy)] dx dy, \quad (7)$$

式中  $p, q, r$  分别为三个角谱分量,  $E_x(x, y, 0), E_y(x, y, 0)$  分别为源平面上  $x, y$  方向的电场分量。考虑线偏振, 拉盖尔高斯光束光场在源平面  $z=0$  上的电场<sup>[19]</sup>可以表示为

$$E_x(x, y, 0) = \cos \theta \cdot E_0 \cdot \left( \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^l \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\omega_0} \right)^l \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2}\right), \quad (8)$$

$$E_y(x, y, 0) = \sin \theta \cdot E_0 \cdot \left( \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^l \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\omega_0} \right)^l \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2}\right), \quad (9)$$

式中  $E_0$  为原点处电场振幅,  $l$  为拓扑荷数,  $\omega_0$  为光束束腰半径,  $\cos \theta$  为拉盖尔高斯光束  $y$  方向电场分量与总电场量的比例,  $\sin \theta$  为拉盖尔高斯光束  $x$  方向电场分量与总电场的比例。

将(8)、(9)式代入(6)、(7)式, 可得

$$A_x(p, q) = \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \cos \theta \cdot E_0 \left( \frac{x + iy}{\omega_0} \right)^l \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2}\right) \exp[-ik(px + qy)] dx dy, \quad (10)$$

$$A_y(p, q) = \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \sin \theta \cdot E_0 \left( \frac{x + iy}{\omega_0} \right)^l \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2}\right) \exp[-ik(px + qy)] dx dy. \quad (11)$$

对(11)式进行围道积分, 并利用数学公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\eta^2 t^2 - i\sigma t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\eta} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4\eta^2}\right), \quad \text{Re}(\eta) > 0, \quad (12)$$

计算可得

$$A_x(p, q) = \cos \theta \cdot E_0 \cdot \frac{k^2 \omega_0^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} k \omega_0 (q - ip) \right]^l \exp \left[ -\frac{k^2 \omega_0^2 (p^2 + q^2)}{4} \right], \quad (13)$$

$$A_y(p, q) = \sin \theta \cdot E_0 \cdot \frac{k^2 \omega_0^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} k \omega_0 (q - ip) \right]^l \exp \left[ -\frac{k^2 \omega_0^2 (p^2 + q^2)}{4} \right]. \quad (14)$$

将(13)、(14)式代入(2)~(4)式,可得

$$E_x(r) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \cos \theta \cdot E_0 \cdot \frac{k^2 \omega_0^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} k \omega_0 (q - ip) \right]^l \exp \left[ -\frac{k^2 \omega_0^2 (p^2 + q^2)}{4} \right] \cdot \exp[ik(px + qy + mz)] dp dq, \quad (15)$$

$$E_y(r) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \sin \theta \cdot E_0 \cdot \frac{k^2 \omega_0^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} k \omega_0 (q - ip) \right]^l \exp \left[ -\frac{k^2 \omega_0^2 (p^2 + q^2)}{4} \right] \cdot \exp[ik(px + qy + mz)] dp dq, \quad (16)$$

$$E_z(r) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{p}{m} \cos \theta + \frac{q}{m} \sin \theta \right) \cdot E_0 \cdot \frac{k^2 \omega_0^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} k \omega_0 (q - ip) \right]^l \cdot \exp \left[ -\frac{k^2 \omega_0^2 (p^2 + q^2)}{4} \right] \cdot \exp[ik(px + qy + mz)] dp dq. \quad (17)$$

由于  $k$  很大( $10^7 \text{ m}^{-1}$ 量级),对(15)~(17)式直接积分十分困难,因此用稳相法积分,得到

$$E_x(r) = \cos \theta \cdot E_0 \cdot z \cdot \frac{ik\omega_0^2}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \left( k\omega_0 \cdot \frac{y - ix}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)^l \cdot \exp \left( -\frac{\omega_0^2 k^2}{4} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \cdot \exp(ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \quad (18)$$

$$E_y(r) = \sin \theta \cdot E_0 \cdot z \cdot \frac{ik\omega_0^2}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \left( k\omega_0 \cdot \frac{y - ix}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)^l \cdot \exp \left( -\frac{\omega_0^2 k^2}{4} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \cdot \exp(ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \quad (19)$$

$$E_z(r) = (x \cos \theta + y \sin \theta) \cdot E_0 \cdot \frac{ik\omega_0^2}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \left( k\omega_0 \cdot \frac{y - ix}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)^l \cdot \exp \left( -\frac{\omega_0^2 k^2}{4} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \cdot \exp(ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \quad (20)$$

即拉盖尔高斯光束传输后的电场解析表达式,包含平行、垂直于传播方向的电场以及振幅和相位信息,利用其可以对传输后拉盖尔高斯涡旋光束的光斑以及横截面上的相位结构进行计算分析。

### 3 拉盖尔高斯光束的光场数值计算

基于(18)~(20)式,拉盖尔高斯光束的波长选取为 632.8 nm,拓扑荷数取 3,  $\omega_0$  为 0.5 mm,传输距离为 2.000 m,取  $\alpha=0$ 。

图 1 所示为拉盖尔高斯光束光强的计算结果,可以看到,拉盖尔高斯光束的总光强分布为环形中空对称分布,随着传输距离的增加,光斑尺寸增大。在传输距离为 2.000 m 处,  $|E_z|^2$  远小于  $|E_x|^2$ ,  $|E_z|^2$  呈现对称双峰形分布。分析原因,由于这里取  $\alpha=0$ ,光束在源平面上为  $x$  方向的线偏振光,由(20)式得到

$$|E_z(r)|^2 = x^2 \cdot E_0^2 \cdot \left( \frac{k\omega_0^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2 \cdot \left[ k^2 \omega_0^2 \cdot \frac{x^2 + y^2}{4(x^2 + y^2 + z^2)} \right]^l \cdot \left[ \exp \left( -\frac{\omega_0^2 k^2}{4} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \right]^2, \quad (21)$$

可以看出,  $|E_z|^2$  关于  $x$  对称,  $x=0$  时,  $|E_z|^2=0$ ,随着  $x$  的增大,  $|E_z|^2$  从 0 逐渐增大;由于(21)式中最后一项随着  $x$  的增大而迅速减小,从而  $|E_z|^2$  达到峰值之后也迅速减小,因此  $|E_z|^2$  呈双峰结构。

图 2 所示为不同拓扑荷数( $l=1,3,5$ )下的拉盖尔高斯光束光场  $z$  分量  $|E_z|^2$  随不同参数的变化,可以看出,随着拓扑荷数的增加,平行于传输方向的分量  $|E_z|^2$  增大,且光斑发散程度也增强。

由(18)~(20)式可以得到传输一段距离后,给定时刻拉盖尔高斯光束的相位为

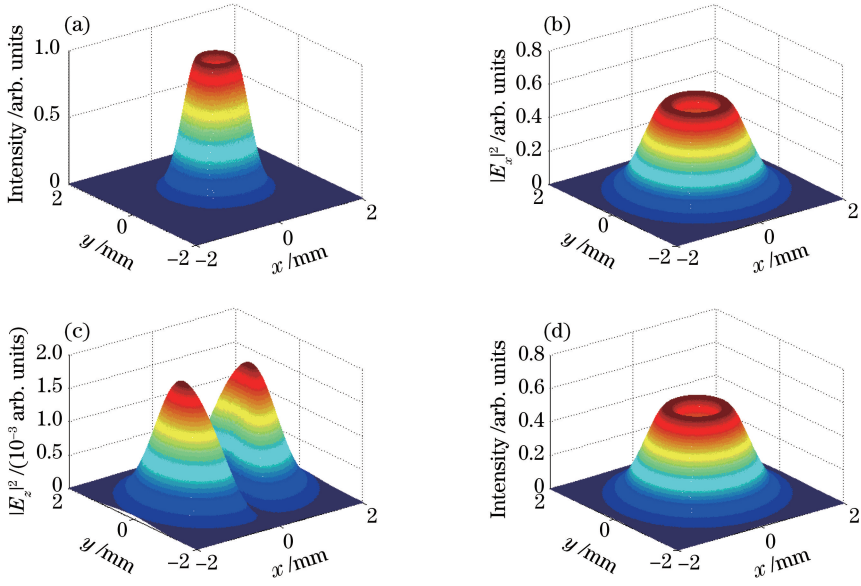


图 1 (a) 传输距离为 0 时的拉盖尔高斯光强分布; (b) 传输距离为 2.000 m 时的  $|E_x|^2$ ; (c) 传输距离为 2.000 m 时的  $|E_z|^2$ ; (d) 传输距离为 2.000 m 时的总光强  $I = |E_x|^2 + |E_z|^2$

Fig. 1 (a) Intensity distribution of Laguerre-Gaussian beam when propagation distance is 0; (b)  $|E_x|^2$  when propagation distance is 2.000 m; (c)  $|E_z|^2$  when propagation distance is 2.000 m; (d) total intensity  $I = |E_x|^2 + |E_z|^2$  when propagation distance is 2.000 m

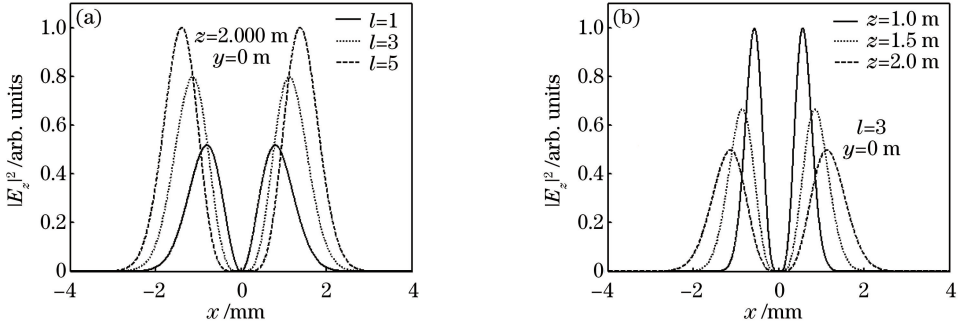


图 2  $|E_z|^2$  随不同参数的变化。(a) 拓扑荷数; (b) 传输距离

Fig. 2 Change of  $|E_z|^2$  with different parameters. (a) Topological charge; (b) propagation distance

$$\varphi = l \cdot \arctan(y/x) + k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \pi/2 + \theta_i, \quad (22)$$

式中  $\theta_i$  为初始相位, 且  $\theta_i = 0, 2\pi/l, 2 \cdot 2\pi/l, \dots, (l-1) \cdot 2\pi/l$ , 各波面初始相差为  $2\pi/l$ 。

从(22)式可以看出, 相位与传播距离、空间坐标、拓扑荷数等参量有关, 分布较为复杂。第二项  $k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  与球面波的相位表达式一致, 光斑大小决定  $x, y$  的取值范围, 而在较远传输距离 ( $x, y \ll z$ ) 情况下, 传输距离主要决定其大小。第一项  $l \cdot \arctan(y/x)$  与光波的传播距离无关, 在  $x, y$  取较小值时可以变化较大。两项相加得到呈螺旋面分布的传输等相面, 取拉盖尔高斯光束的拓扑荷数  $l=3$ , 拉盖尔高斯光束相位分布计算结果如图 3 所示, 其中  $\lambda$  为波长。由图 3 可以发现, 相位波前呈交替螺旋面分布。

## 4 结 论

基于光束非傍轴矢量光束传输理论, 运用角谱法研究了线偏振拉盖尔高斯光束经一段自由空间传输后的光束矢量远场分布, 经过积分运算, 得到了拉盖尔高斯光束平行及垂直于传播方向的电场分布的解析表示式, 数值计算了不同阶数拉盖尔高斯光束在垂直及平行于传播方向的电场分量、总光场及空间相位的分布, 并进行了分析比较。研究表明,  $|E_z|^2$  远小于  $|E_x|^2$ , 随着拓扑荷数的增加,  $|E_z|^2$  增大, 光斑的发散程度也

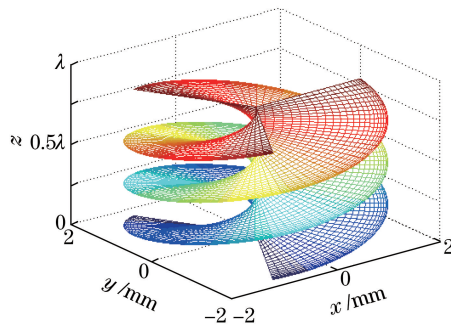


图 3 拉盖尔高斯光束的相位分布( $l=3$ )

Fig. 3 Phase distribution of Laguerre-Gaussian beam ( $l=3$ )

增强, 光束相位波前呈交替螺旋面形分布, 这些结论为拉盖尔高斯光束传输的研究提供了一定的参考。

### 参 考 文 献

- [1] Kovalev A A, Kotlyar V V, Porfirev A P. Optical trapping and moving of microparticles by using asymmetrical Laguerre-Gaussian beams[J]. Optics Letters, 2016, 41(11): 2426-2429.
- [2] Xie G, Ren Y, Yan Y, *et al.* Experimental demonstration of a 200-Gbit/s free-space optical link by multiplexing Laguerre-Gaussian beams with different radial indices[J]. Optics Letters, 2016, 41(15): 3447-3450.
- [3] Zhang M, Chen Y, Liu L, *et al.* Focal shift of a focused partially coherent Laguerre-Gaussian beam of all orders[J]. Journal of Modern Optics, 2016, 63: 1-9.
- [4] Herne C M, Capuzzi K M, Sobel E, *et al.* Rotation of large asymmetrical absorbing objects by Laguerre-Gauss beams [J]. Optics Letters, 2015, 40(17): 4026-4029.
- [5] Qu T, Wu Z S, Shang Q C, *et al.* Analysis of the radiation force of a Laguerre Gaussian vortex beam exerted on an uniaxial anisotropic sphere[J]. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 2015, 162: 103-113.
- [6] Wang Juan, Ren Hongliang. Trapping forces of core-shell particles using Laguerre-Gaussian beams[J]. Chinese J Lasers, 2015, 42(6): 0608001.  
王 娟, 任洪亮. 拉盖尔-高斯光束捕获双层球的捕获力计算[J]. 中国激光, 2015, 42(6): 0608001.
- [7] Zhao Jizhi, Jiang Yuesong, Ou Jun, *et al.* Scattering of the focused Laguerre-Gaussian beams by a spherical particle [J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(6): 064202.  
赵继芝, 江月松, 欧 军, 等. 球形粒子在聚焦拉盖尔-高斯光束中的散射特性研究[J]. 物理学报, 2012, 61(6): 064202.
- [8] Yang Chunyong, Ding Liming, Hou Jin, *et al.* Simulation on measurement of topological charge for Laguerre-Gauss beams by multiplexing[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2016, 53(9): 092603.  
杨春勇, 丁丽明, 侯 金, 等. 拉盖尔-高斯光束拓扑荷复用测量的仿真[J]. 激光与光电子学进展, 2016, 53(9): 092603.
- [9] Xu Y, Li Y, Zhao X. Intensity and effective beam width of partially coherent Laguerre-Gaussian beams through a turbulent atmosphere[J]. Journal of the Optical Society of America, 2015, 32(9): 1623-1630.
- [10] Plick W N, Krenn M. Physical meaning of the radial index of Laguerre-Gauss beams[J]. Physical Review A, 2015, 92(6): 063841.
- [11] Chen Juan, Ke Xizheng, Yang Yiming. Laguerre-Gaussian beam diffraction and dispersion of the orbital angular momentum[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(4): 0427001.  
谌 娟, 柯熙政, 杨一明. 拉盖尔高斯光的衍射和轨道角动量的弥散[J]. 光学学报, 2014, 34(4): 0427001.
- [12] Ge Xiaolu, Wang Benyi, Guo Chengshan. Beam broadening of vortex beams propagating in turbulent atmosphere[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(3): 0301002.  
葛筱璐, 王本义, 国承山. 涡旋光束在湍流大气中的光束扩展[J]. 光学学报, 2016, 36(3): 0301002.
- [13] Ding Panfeng, Pu Jixiong. Propagation of Laguerre-Gaussian vortex beam[J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(9): 094204.  
丁攀峰, 蒲继雄. 拉盖尔高斯涡旋光束的传输[J]. 物理学报, 2011, 60(9): 094204.
- [14] Zhou Guoquan. Far-field divergent properties of linearly polarized Laguerre-Gauss beams[J]. Acta Physica Sinica,

- 2012, 61(2): 024208.
- 周国泉. 线偏振拉盖尔-高斯光束的远场发散特性[J]. 物理学报, 2012, 61(2): 024208.
- [15] Zhou G. Analytical vectorial structure of Laguerre-Gaussian beam in the far field[J]. Optics Letters, 2006, 31(17): 2616-2618.
- [16] Ding Panfeng, Pu Jixiong. Change of the off-center Laguerre-Gaussian vortex beam while propagation[J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(6): 064103.
- 丁攀峰, 蒲继雄. 离轴拉盖尔-高斯涡旋光束传输中的光斑演变[J]. 物理学报, 2012, 61(6): 064103.
- [17] Wang Hui, Ding Panfeng, Pu Jixiong. Tight focusing properties of off-center Gaussian vortex beams[J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(21): 214202.
- 王 慧, 丁攀峰, 蒲继雄. 离轴高斯涡旋光束的深聚焦特性[J]. 物理学报, 2014, 63(21): 214204.
- [18] Goodman J W. Introduction to Fourier optics[M]. 2nd edition. New York: McGraw-Hill Education, 1996.
- [19] Ding Panfeng, Pu Jixiong. Relation of momentum and orbital angular momentum of Gaussian vortex beam with topological charge and their propagation in free space[J]. Scientia Sinica: Physica, Mechanica & Astronomica, 2013, 43(6): 725-731.
- 丁攀峰, 蒲继雄. 高斯涡旋光束的动量及轨道角动量与拓扑电荷数的关系及其在自由空间中的传输[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43(6): 725-731.