

航天器轨道动力学模型及瞄准提前量误差分析

叶小威^{1,2,3}, 沈 锋^{1,2}

¹中国科学院自适应光学重点实验室, 四川 成都 610209;

²中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209;

³中国科学院大学, 北京 100049

摘要 为提高地面激光瞄准系统对运动目标的瞄准精度,研究了目标的运动特性,并对不同提前量算法的计算精度进行分析。从航天器和天体的运动规律出发,建立一种基于双行根数(TLE)星历表的地平坐标系下的航天器轨道动力学模型,研究了航天器在地平坐标系下斜距、角度、角速度、角加速度的变化规律;根据理论轨道数据,分析了激光瞄准系统的一、二阶瞄准提前量的变化规律;针对实际非时间连续系统,分别用后向差分法和中心差分法对提前量进行误差分析。研究表明,目标的角速度、角加速度及急动度等高阶项均对瞄准提前量有直接影响,中心差分提前量算法更具优势。

关键词 测量;激光瞄准;瞄准提前量误差;中心差分法;航天器

中图分类号 TN249

文献标识码 A

doi: 10.3788/CJL201744.0604003

Orbit-Dynamics Model of Spacecrafts and Error Analysis of Ahead-Point

Ye Xiaowei^{1,2,3}, Shen Feng^{1,2}

¹Key Laboratory on Adaptive Optics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China;

²Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China;

³University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract In order to improve the pointing precision of the laser-pointing system to moving objects, the motion characteristics of moving targets and the calculation precision of different ahead-point algorithms are studied. According to the movement rules of spacecrafts and celestial bodies, the orbit-dynamics model of the spacecraft is built in the horizontal coordinate system based on the two-line-element (TLE) ephemeris, and the change rules of slant-range, angle, angular speed and angular acceleration are studied. According to the theoretical orbital data, the change rules of the 1st-order and the 2nd-order ahead-points of the laser-pointing system are analyzed. As for the actual non-time-continuous system, the error analysis of ahead-point with backward-difference method and central-difference method is carried out, respectively. The result shows that the angular speed, the angular acceleration and the jerk and other high-order terms of objects have all direct effects on the ahead-point, and the central-difference method is more advantageous.

Key words measurement; laser pointing; error of ahead-point; central difference method; spacecraft

OCIS codes 120.4820; 120.1680

1 引 言

在航天器轨道定轨^[1-2]、激光通信^[3-5]等领域,目标的瞄准精度是衡量系统工作性能的重要参数之一。目前,科研工作者对光束的瞄准技术进行了大量的研究,其中最典型的是由美国喷气推进实验室(JPL)设计的深空光通信演示系统模型,该系统运用地球及航天器星历表,并结合航天器的姿态进行光束的瞄准^[6-7]。

收稿日期: 2017-12-27; 收到修改稿日期: 2017-02-24

基金项目: 国家 863 计划

作者简介: 叶小威(1989—),男,博士研究生,主要从事大气光传输方面的研究。E-mail: 13882208919@163.com

导师简介: 沈 锋(1969—),男,博士,研究员,主要从事自适应光学技术方面的研究。E-mail: shenfeng@ioe.ac.cn

由于光束链路上存在两个终端的相对运动,整个瞄准过程属于动态过程。光束双程传输时间具有延迟,因此需要提前瞄准并对两终端的相对运动进行补偿。此前,科研工作者在进行提前瞄准补偿时,将两终端在光束延迟时间内的相对运动近似为匀角速度运动^[8-10],忽略了目标运动的角加速度及角加加速度(急动度),因此在角速度变化较快时会产生不可忽略的瞄准误差。

本文基于双行星历表(TLE),从航天器的轨道运动^[11-12]及质点的运动理论^[13]出发,给出了航天器在站心地平坐标系中斜距、角度、角速度、角加速度的解析模型;不考虑系统信号处理时间的影响,对理想的时间连续系统的一、二阶提前量进行分析;针对实际非连续系统,在光束延迟时间内目标匀角速度近似下,对后向差分提前量算法的误差进行分析,认为目标角加速度为其主要误差源,对此提出中心差分提前量算法并进行误差分析。

2 航天器轨道建模及理论分析

2.1 航天器轨道建模

在讨论航天器轨道运动时,为准确方便地对其进行描述,需要选定相应的坐标系。多数航天器轨道模型采用地心赤道坐标系来计算其空间位置,但实际的航天器跟踪和观测都是在地表测站进行的,望远镜的指向及航天器相对测站的角速度和角加速度都需要在地表测站的地平坐标系中进行测量,因此需要在坐标系之间进行转换。航天器轨道如图1所示。

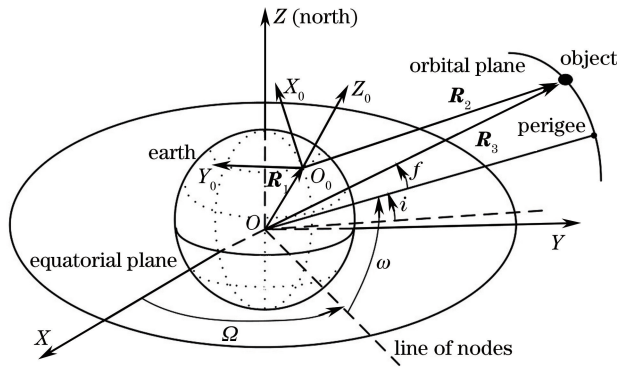


图1 航天器轨道示意图

Fig. 1 Schematic diagram of spacecraft orbit

地心赤道坐标系是典型的笛卡儿坐标系,也是多数航天器轨道模型计算和输出的坐标系,坐标原点 o 位于地心, Z 轴沿地球自转轴指向北极, X 轴指向春分点, Y 轴位于赤道平面内,与 X 轴垂直。由此定义的地心赤道坐标系是地固的,不随地球的转动而变化。

测站地平坐标系原点 O_0 位于地球表面测站, Z_0 轴指向当地天顶方向, X_0 轴和 Y_0 轴分别指向地球表面的正北和正西,显然,测站地平坐标系随地球的转动而转动。

TLE 星历表给定六个轨道要素及相应的时刻,用来描述航天器在空间中的运动特性,分别为轨道倾角 i 、升交点赤经 Ω 、近地点幅角 ω 、轨道偏心率 e 、日运行圈数 N 、平近点角 M 及时刻 t 。

根据星历表给出的轨道参数,通过坐标系的旋转即可得到地心赤道坐标系中航天器的位置 \mathbf{R}_3 ^[11-12]:

$$\mathbf{R}_3 = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos(\omega+f) - \sin \Omega \sin(\omega+f) \cos i \\ \sin \Omega \cos(\omega+f) + \cos \Omega \sin(\omega+f) \cos i \\ \sin(\omega+f) \sin i \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$a = \mu^{1/3} \left(\frac{43200}{N\pi} \right)^{2/3}, \quad (2)$$

式中 a 为椭圆轨道半长轴,地球引力常数 $\mu = 398600.44 \text{ km}^3/\text{s}^2$,真近点角 f 可利用平近点角 M 及时刻 t 通过迭代的方法求解开普勒方程得到^[14]。

航天器在地心赤道坐标系下的线速度 \mathbf{v}_3 和线加速度 \mathbf{a}_3 可以表示为^[11]

$$\mathbf{v}_3 = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} [-\sin f \times \mathbf{P} + (e + \cos f) \times \mathbf{Q}], \quad (3)$$

$$\mathbf{a}_3 = -\frac{\mu(1+e\cos f)^2}{[a(1-e^2)]^2} (\cos f \times \mathbf{P} + \sin f \times \mathbf{Q}), \quad (4)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i \\ \sin \omega \sin i \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i \\ -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i \\ \cos \omega \sin i \end{bmatrix}. \quad (6)$$

由于测站随地球的自转而绕地轴转动,因此在将航天器位置转移到测站地平坐标系之前,需先得到测站在地心赤道坐标系下的位置,然后再将航天器与测站在地心赤道坐标系下的相对位置通过坐标旋转移到地平坐标系下。测站的位置 \mathbf{R}_1 在地心赤道坐标系下是时间的函数,可表示为^[15]

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} (C+H)\cos\phi\cos\theta(t) \\ (C+H)\cos\phi\sin\theta(t) \\ [C(1-f_e)^2+H]\sin\phi \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$C = a_e [\cos^2\phi + (1-f_e)^2 \sin^2\phi]^{-1/2}, \quad (8)$$

式中 a_e 和 f_e 分别为地球椭球体的赤道半径和扁平率, $a_e = 6378.1366$ km, $f_e = 1/298.25642$; C 为地心到测站地表距离; H 为测站大地高; ϕ 为测站地理纬度; $\theta(t)$ 为测站地方恒星时, $\theta(t)$ 与测站经度 λ 及自转有关^[16]。

测站在地心赤道坐标系下绕地轴 (Z 轴) 以角速度 $\boldsymbol{\omega}_e = [0 \ 0 \ \omega_e]^T$ 作匀角速度运动 (ω_e 为地球自转角速度), 则其线速度 \mathbf{v}_1 及线加速度 \mathbf{a}_1 可表示为

$$\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega}_e \otimes \mathbf{R}_1, \quad (9)$$

$$\mathbf{a}_1 = \boldsymbol{\omega}_e \otimes (\boldsymbol{\omega}_e \otimes \mathbf{R}_1), \quad (10)$$

式中符号 \otimes 表示两矢量叉乘。通过(1)式和(7)式可得到任意时刻地心赤道坐标系下航天器与测站的相对位置矢量为

$$\mathbf{R}_{13} = \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1. \quad (11)$$

根据站心地平坐标系与地心赤道坐标系的定义,由图1不难看出, \mathbf{R}_{13} 经过两次坐标旋转即可得到航天器与测站在地平坐标系中的相对位置矢量 \mathbf{R}_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2 &= \mathbf{R}_Y(\phi - \pi/2)\mathbf{R}_Z[\theta(t) - \pi]\mathbf{R}_{13} = \\ & \begin{bmatrix} \cos(\phi - \pi/2) & 0 & -\sin(\phi - \pi/2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi - \pi/2) & 0 & \cos(\phi - \pi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos[\theta(t) - \pi] & \sin[\theta(t) - \pi] & 0 \\ -\sin[\theta(t) - \pi] & \cos[\theta(t) - \pi] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{13}, \quad (12) \\ & \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} \cos E \cos A \\ -\cos E \sin A \\ \sin E \end{bmatrix}, \quad (13) \end{aligned}$$

式中 A 和 E 分别为航天器方位角和俯仰角, \mathbf{R}_Y 和 \mathbf{R}_Z 为坐标旋转矩阵。

根据速度及加速度合成原理^[13,17], 地平坐标系下目标相对测站的线速度 \mathbf{v}_2 和线加速度 \mathbf{a}_2 分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{R}_Y(\phi - \pi/2)\mathbf{R}_Z[\theta(t) - \pi]\mathbf{v}_3 - \mathbf{R}_Y(\phi - \pi/2)\mathbf{R}_Z[\theta(t) - \pi]\mathbf{v}_1 - \\ & \{\mathbf{R}_Y(\phi - \pi/2)\mathbf{R}_Z[\theta(t) - \pi]\boldsymbol{\omega}_e\} \otimes \mathbf{R}_2, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 &= \mathbf{R}_Y(\phi - \pi/2)\mathbf{R}_Z[\theta(t) - \pi]\mathbf{a}_3 - \\ & 2\{\mathbf{R}_Y(\phi - \pi/2)\mathbf{R}_Z[\theta(t) - \pi]\boldsymbol{\omega}_e\} \otimes \mathbf{v}_2 - \mathbf{R}_Y(\phi - \pi/2)\mathbf{R}_Z[\theta(t) - \pi]\mathbf{a}_1 - \\ & \{\mathbf{R}_Y(\phi - \pi/2)\mathbf{R}_Z[\theta(t) - \pi]\boldsymbol{\omega}_e\} \otimes \{\{\mathbf{R}_Y(\phi - \pi/2)\mathbf{R}_Z[\theta(t) - \pi]\boldsymbol{\omega}_e\} \otimes \mathbf{R}_2\}. \quad (15) \end{aligned}$$

当物体的运动方程用球坐标表示时,速度和加速度可向球坐标系投影,设球坐标的单位矢量为 $\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_0$, 三个矢量互相垂直形成右手坐标系,其中 \mathbf{r}_0 沿矢量 \mathbf{R}_2 的方向, $\boldsymbol{\alpha}_0$ 和 $\boldsymbol{\beta}_0$ 分别指向 α 和 β 增大的方向,并

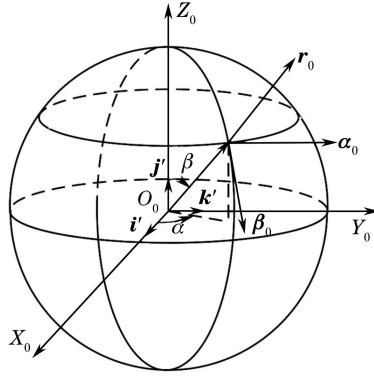


图 2 球坐标投影示意图

Fig. 2 Schematic diagram of spherical coordinate projection

且航天器的速度在球坐标系中的投影为 v_s , 如图 2 所示, 其中 i', j', k' 为测站地平坐标系的单位矢量。

显然有

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{i}' \sin \beta \cos \alpha + \mathbf{j}' \sin \beta \sin \alpha + \mathbf{k}' \cos \beta, \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = -\mathbf{i}' \sin \alpha + \mathbf{j}' \cos \alpha, \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\beta}_0 = \mathbf{i}' \cos \beta \cos \alpha + \mathbf{j}' \cos \beta \sin \alpha - \mathbf{k}' \sin \beta, \quad (18)$$

$$\mathbf{v}_s = [v_\beta \quad v_\alpha \quad v_t]^\text{T} = \mathbf{R}_Z(2\pi - A)\mathbf{R}_Y(\pi/2 - E)\mathbf{v}_2, \quad (19)$$

$$\mathbf{a}_s = [a_\beta \quad a_\alpha \quad a_t]^\text{T} = \mathbf{R}_Z(2\pi - A)\mathbf{R}_Y(\pi/2 - E)\mathbf{a}_2. \quad (20)$$

将 \mathbf{r}_0 对时间取一阶导数有

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \frac{d\beta}{dt}\boldsymbol{\beta}_0 + \sin \beta \frac{d\alpha}{dt}\boldsymbol{\alpha}_0, \quad (21)$$

$$\mathbf{v}_s = \frac{dR_2}{dt}\mathbf{r}_0 + R_2 \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \frac{dR_2}{dt}\mathbf{r}_0 + R_2 \frac{d\beta}{dt}\boldsymbol{\beta}_0 + R_2 \sin \beta \frac{d\alpha}{dt}\boldsymbol{\alpha}_0. \quad (22)$$

则方位角速度和俯仰角速度分别为

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{dA}{dt} = -\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{v_\alpha}{R_2 \sin \beta} = -\frac{v_\alpha}{R_2 \cos E} \\ \dot{E} = \frac{dE}{dt} = -\frac{d\beta}{dt} = -\frac{v_\beta}{R_2} \end{cases}. \quad (23)$$

同理可得方位角加速度和俯仰角加速度分别为

$$\begin{cases} \ddot{A} = -\frac{a_\alpha + 2v_t \dot{A} \cos E - 2R_2 \dot{A} \dot{E} \sin E}{R_2 \cos E} \\ \ddot{E} = -\frac{a_\beta + 2v_t \dot{E} + R_2 \dot{A}^2 \sin E \cos E}{R_2} \end{cases}. \quad (24)$$

2.2 航天器轨道理论分析

以 FORMOSAT-3 卫星为例, 分析航天器在地平坐标系下的运动规律。轨道倾角、升交点赤经、平近点角、近地点幅角、轨道偏心率、日绕行圈数分别为 71.9803° 、 334.3902° 、 136.6225° 、 223.0842° 、 0.0051925 、 14.285372715 , 与轨道根数对应的时刻为 2016 年 10 月 11 日 14 时 26 分 53.76 秒。站点经纬度及大地高分别为 120° 、 40° 、 1 km 。

如图 3 所示, FORMOSAT-3 在站心地平坐标系中作变角加速运动, 航捷点处俯仰角为 43.5° ; 方位角速度随俯仰角的增大而增大, 并在航捷点处达到最大值 $0.5 (\text{ }^\circ) \cdot \text{s}^{-1}$, 航捷点处俯仰角速度为零; 方位角加速度在航捷点处为零, 在航捷点前后达到最大值 $\pm 2.75 \times 10^{-3} (\text{ }^\circ) \cdot \text{s}^{-1}$ (“ \pm ”代表角加速度方向), 并关于航捷点对称, 但俯仰角加速度在航捷点处具有最大值 $-2.37 \times 10^{-3} (\text{ }^\circ) \cdot \text{s}^{-2}$; 斜距随俯仰角的增大而减小, 最终在航捷点处达到最小值。

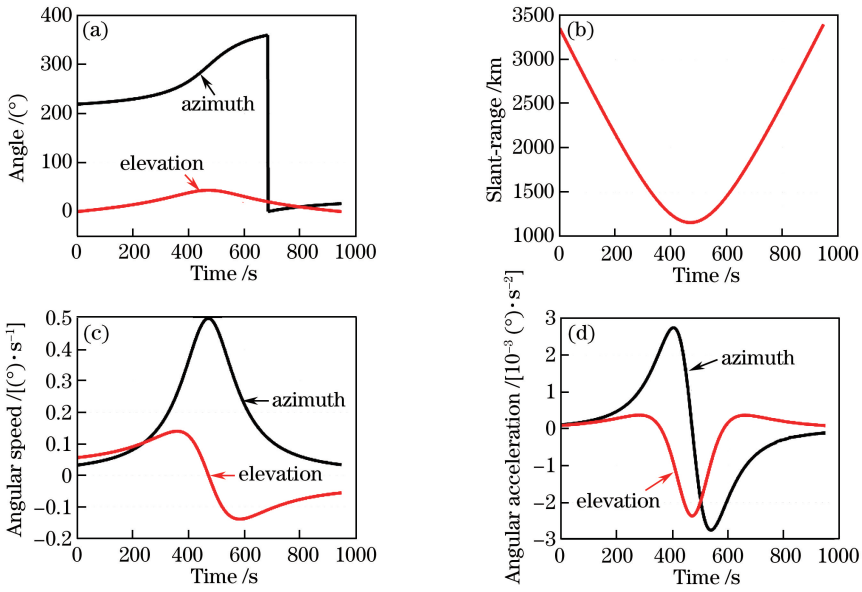


图 3 (a)方位角和俯仰角;(b)斜距;(c)方位角速度和俯仰角速度;(d)方位角加速度和俯仰角加速度

Fig. 3 (a) Azimuth angle and elevation angle; (b) slant-range; (c) azimuth angular speed and elevation angular speed; (d) azimuth angular acceleration and elevation angular acceleration

3 航天器提前瞄准理论分析

3.1 连续系统提前瞄准理论分析

由于目标与测站的相对运动,当地面瞄准系统对其进行精确瞄准时,必须对提前量进行补偿,提前量的大小取决于目标的运动特性及光束双程传输的时间延迟。传统方法对提前量进行计算时只考虑目标角速度的影响,而忽略角加速度、急动度等高阶运动特性,使得提前量的计算存在较大的误差。因此,目标运动过程中的高阶运动特性必须考虑在内,这使得提前量的计算变得很复杂:

$$\begin{cases} dA = dA_v + dA_a + dA_c + \dots = \dot{A} \frac{2L}{c} \cos E + \frac{1}{2} \ddot{A} \left(\frac{2L}{c}\right)^2 \cos E + \frac{1}{6} \dddot{A} \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \cos E + \dots \\ dE = dE_v + dE_a + dE_c + \dots = \dot{E} \frac{2L}{c} + \frac{1}{2} \ddot{E} \left(\frac{2L}{c}\right)^2 + \frac{1}{6} \dddot{E} \left(\frac{2L}{c}\right)^3 + \dots \end{cases}, \quad (25)$$

式中 dA_v, dE_v 为角速度项、 dA_a, dE_a 为角加速度项、 dA_c, dE_c 为急动度项,在此分别命名为一阶提前量、二阶提前量、三阶提前量; $c = 3.0 \times 10^5$ km/s 为光速; $L = R_{cs}^{bc}$ 为站心地平坐标系下的目标斜距; $2L/c$ 为光束双程传输的时间延迟。

目标的高阶运动特性在实际工作中较难获得,对于理想时间连续系统而言,若将目标在光束延迟时间内的运动近似为匀角加速度运动,即只考虑角速度和角加速度,一阶提前量和二阶提前量如图 4 所示。

对于一阶提前量,方位一阶提前量与方位角速度类似,均随着俯仰角的增大而增大,在航捷点达到最大值。航捷点处俯仰角速度为零,因此俯仰一阶提前量也为零。由于提前量受到斜距一次项的影响,因此一阶提前量的变化趋势虽然与角速度的类似,但并不完全一致。对于二阶提前量,方位二阶提前量与方位角加速度的变化趋势类似,均关于航捷点对称,在方位角速度较大时出现峰值。由于受到斜距二次项及俯仰角余弦项的影响,方位二阶提前量的峰值并未与方位角加速度的峰值关于时间重合。在航捷点处方位角加速度为零,因此此处方位二阶提前量也为零。俯仰二阶提前量与俯仰角加速度均在航捷点处达到峰值,且关于航捷点对称,由于受到延迟时间的二次项的影响,其变化趋势虽与俯仰角速度的类似,但并不完全一致。

3.2 非连续系统提前瞄准理论分析

目标的真实运动特性较为复杂,其提前量不仅与角速度、角加速度有关,而且还受到急动度等更高阶项的影响,很难获得真实准确的提前量,因此仅对实际非时间连续系统各阶提前量的误差特性进行分析。

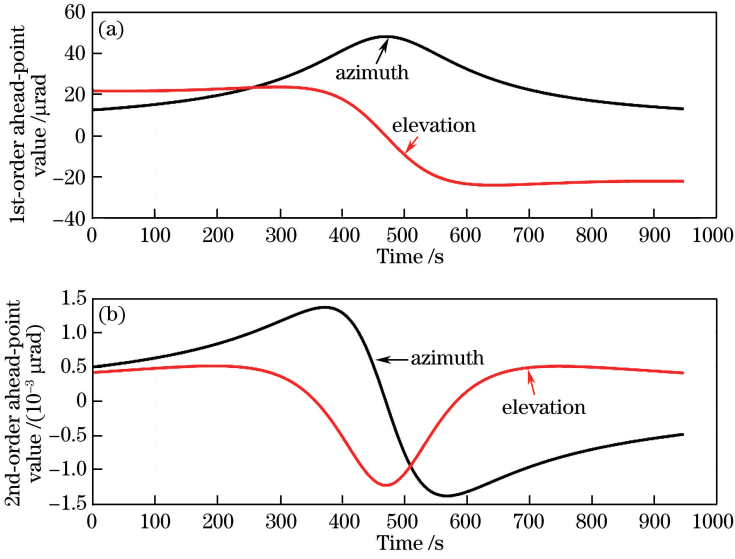


图 4 (a)一阶提前量;(b)二阶提前量

Fig. 4 (a) 1st-order ahead-point value; (b) 2nd-order ahead-point value

3.2.1 后向差分法提前量误差分析

实际系统为非时间连续系统,并且在工作中接收到的轨道数据为一系列关于时间离散的轨道采样数据 $(t_j, A_j, E_j, L_j), j = 1, 2, \dots, n$ 。传统的提前量获取方式是将目标在采样周期内的运动近似为匀角速度运动,从而将方位角及俯仰角 (A_j, E_j) 对时间进行一阶后向差分获取角速度 (\dot{A}_j, \dot{E}_j) ,

$$\begin{cases} \dot{A}_j = \frac{A_j - A_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \\ \dot{E}_j = \frac{E_j - E_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \end{cases}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (26)$$

式中 $t_j - t_{j-1} = T = 1/f_s$, f_s 为轨道数据的采样频率。在匀角速度近似下,提前量只保留一阶项:

$$\begin{cases} dA_j = dA_{v,j} = \dot{A}_j \frac{2L_j}{c} \cos E_j \\ dE_j = dE_{v,j} = \dot{E}_j \frac{2L_j}{c} \end{cases} \quad (27)$$

显然,由(26)式计算得到的角速度并不是 t_j 时刻的瞬时速度,而是 $t_{j-1} \sim t_j$ 区间内的平均角速度,若在此时间区间内目标作加速或减速运动,进行提前量补偿时,相应的瞄准点应落后或者超前于目标,产生的误差可表示为

$$\begin{cases} \Delta A_{v,j} = dA_v - dA_{v,j} \\ \Delta E_{v,j} = dE_v - dE_{v,j} \end{cases} \quad (28)$$

由图 3 和图 5 可知,在方位和俯仰两个方向上,当角加速度为零时,一阶提前量误差为零,表明对于匀角速度运动目标,用后向差分法计算一阶提前量符合实际情况;在加速和减速阶段,一阶提前量误差分别大于零和小于零,表示在加速阶段瞄准点将落后于目标,减速阶段瞄准点将超前于目标;在俯仰方向上,当俯仰角加速度最大时,俯仰一阶提前量误差最大;方位一阶提前量受到俯仰角的影响,因此方位上的提前量误差最大值并未出现在方位角加速度最大时刻,但关于航捷点对称。

3.2.2 中心差分法提前量误差分析

用后向差分法进行提前量补偿时,运动目标的匀角速度近似使得角速度偏离真实值,另外忽略角加速度对提前量的影响,最终使得提前量产生较大的误差。结构动力学中利用有限差分代替位移对时间的求导,能够较为精确地获得速度及加速度量^[18-19]。在此,为获得较精确的提前量,对运动目标进行匀角加速度近似,并用中心差分法获得角速度及角加速度:

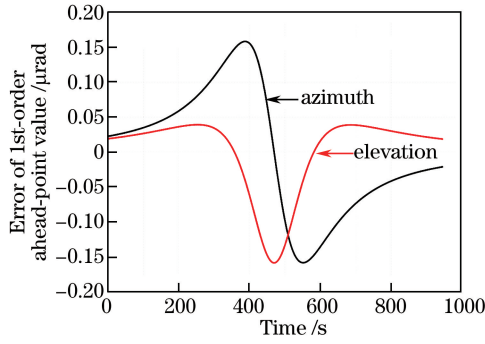


图 5 后向差分法一阶提前量误差

Fig. 5 Error of 1st-order ahead-point value under backward-difference method

$$\begin{cases} \dot{A}'_j = \frac{A_{j+1} - A_{j-1}}{2T} \\ \dot{E}'_j = \frac{E_{j+1} - E_{j-1}}{2T} \end{cases}, \quad (29)$$

$$\begin{cases} \ddot{A}'_j = \frac{A_{j+1} - 2A_j + A_{j-1}}{T^2} \\ \ddot{E}'_j = \frac{E_{j+1} - 2E_j + E_{j-1}}{T^2} \end{cases}, \quad (30)$$

$$\begin{cases} dA'_j = dA'_{v,j} + dA'_{a,j} = \dot{A}'_j \frac{2L_j}{c} \cos E_j + \frac{1}{2} \ddot{A}'_j \left(\frac{2L_j}{c} \right)^2 \cos E_j \\ dE'_j = dE'_{v,j} + dE'_{a,j} = \dot{E}'_j \frac{2L_j}{c} + \frac{1}{2} \ddot{E}'_j \left(\frac{2L_j}{c} \right)^2 \end{cases}, \quad (31)$$

$$\begin{cases} \Delta A'_{v,j} = dA_v - dA'_{v,j} \\ \Delta E'_{v,j} = dE_v - dE'_{v,j} \end{cases}, \quad (32)$$

$$\begin{cases} \Delta A'_{a,j} = dA_a - dA'_{a,j} \\ \Delta E'_{a,j} = dE_a - dE'_{a,j} \end{cases}, \quad (33)$$

式中 $\Delta A'_{v,j}, \Delta E'_{v,j}$ 为中心差分法一阶提前量误差; $\Delta A'_{a,j}, \Delta E'_{a,j}$ 为中心差分法二阶提前量误差。若目标真实运动为匀角加速度运动, 根据匀加速运动的规律, 通过(29)式计算得到的角速度正好为 t_j 时刻的瞬时角速度, 则在匀角加速度运动近似下, 提前量一阶项的误差将来源于目标真实的急动度 \ddot{A}, \ddot{E} 。由于急动度的理论求解相当复杂, 对理论上的角加速度进行中心差分得到近似急动度, 如图 7 所示。

结合图 3、6、7, 在角加速度变化最快的位置, 即急动度最大处, 一阶提前量误差达到峰值; 在角加速度增大区间, 即急动度为正的区间, 一阶提前量超前于真实情况的; 在角加速度减小区间, 即急动度为负的区间, 一阶提前量落后于真实情况的; 当急动度为零时, 一阶提前量一阶误差为零。

同理, 对于真实运动为匀角加速度运动的目标, 由(30)式计算得到的结果也正为 t_j 时刻的瞬时角加速度。则在匀角加速度运动近似下, 提前量二阶项的误差也将取决于更高阶项因素, 即急动度对时间的一阶导数 \dddot{A}, \dddot{E} 。结合图 4 和图 7 可知, 在急动度增大区间, 即当 $\ddot{A} > 0, \ddot{E} > 0$ 时, $\ddot{A}'_j > \ddot{A}, \ddot{E}'_j > \ddot{E}$, 从而使得 $dA'_{a,j} > dA_a, dE'_{a,j} > dE_a$, 即提前量二阶项超前于真实情况的; 反之, 提前量一阶项落后于真实情况的。当 $\ddot{A} = 0, \ddot{E} = 0$ 时, 提前量二阶项误差为零; 在急动度变化最快的位置, 提前量二阶项误差达到峰值。

3.2.3 后向差分法与中心差分法的提前量误差对比分析

后向差分法与中心差分法均对目标的运动进行了近似, 因此在计算提前量时依然会存在误差, 但由于考虑了目标运动的角加速度, 中心差分法具有更高的精度。选取 14 个典型的空目标, 它们在航捷点处具有不同的俯仰角和角加速度, 并且俯仰角分布在 $20^\circ \sim 90^\circ$ 之间; 以航捷点作为瞄准点, 对后向差分法和中心差分法的提前量误差进行对比分析。表 1 给出了各目标在航捷点处的俯仰角及角加速度。

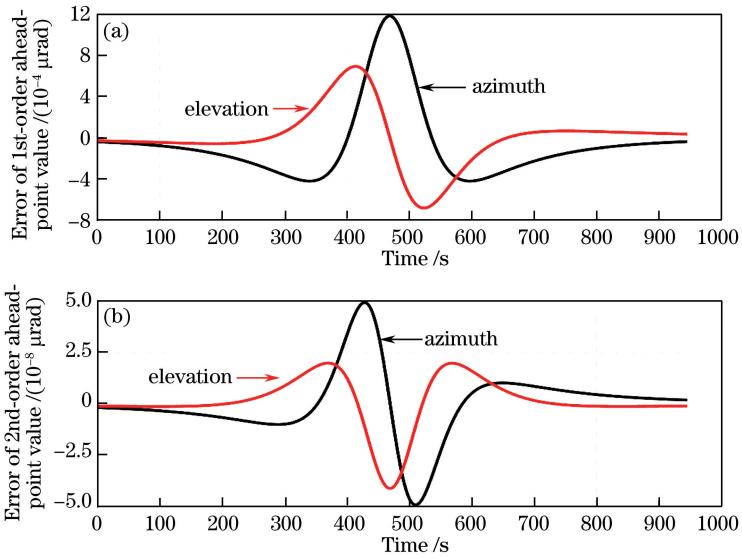


图 6 (a)中心差分一阶提前量误差;(b)中心差分二阶提前量误差

Fig. 6 (a) Error of 1st-order ahead-point value under central-difference method; (b) error of 2nd-order ahead-point value under central-difference method

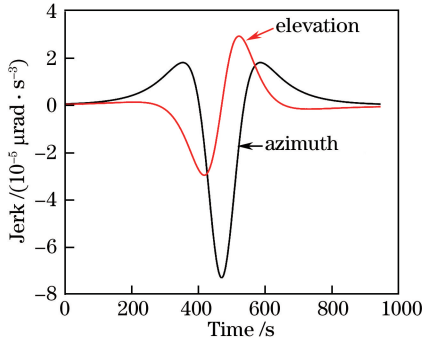


图 7 急动度

Fig. 7 Jerk

图 8 所示为由后向差分法与中心差分法计算得到的各目标在航捷点处方位和俯仰方向上的提前量误差。由于目标运动的复杂性,高阶运动特性较难获得,并且前两阶提前量的精度足以对提前量进行描述,因此提前量误差计算公式可表示为

$$\begin{cases} \Delta A_b = dA_v + dA_a - dA_{v,j} \\ \Delta E_b = dE_v + dE_a - dE_{v,j} \end{cases}, \quad (34)$$

$$\begin{cases} \Delta A_c = dA_v + dA_a - dA'_{v,j} - dA'_{a,j} \\ \Delta E_c = dE_v + dE_a - dE'_{v,j} - dE'_{a,j} \end{cases}, \quad (35)$$

式中 $\Delta A_b, \Delta E_b, \Delta A_c, \Delta E_c$ 分别为由后向差分法与中心差分法得到的方位和俯仰方向上的提前量误差, j 为航捷点时刻。结合表 1 和图 8 可知,卫星 WORLDVIEW-2 在航捷点处的俯仰角、俯仰角加速度及方位角角速度最小,分别为 $E = 24.02^\circ, \dot{E} = 0.00083 (\text{^\circ}) \cdot \text{s}^{-2}, \dot{A} = 0.3055 (\text{^\circ}) \cdot \text{s}^{-2}$,两种算法的提前量误差都很小,分别为 $\Delta A_b = 0.1 \mu\text{rad}, \Delta E_b = 0.0758 \mu\text{rad}, \Delta A_c = 0.0011 \mu\text{rad}, \Delta E_c = 0.0009 \mu\text{rad}$,中心差分法的提前量误差几乎可以忽略不计。而对于航捷点处高仰角目标,例如卫星 SPOT-6,其俯仰角、俯仰角加速度及方位角加速度分别为 $E = 85.96^\circ, \dot{E} = 0.09309 (\text{^\circ}) \cdot \text{s}^{-2}, \dot{A} = 8.703 (\text{^\circ}) \cdot \text{s}^{-2}$,两种算法的提前量误差相对较大,分别为 $\Delta A_b = 2.903 \mu\text{rad}, \Delta E_b = 3.835 \mu\text{rad}, \Delta A_c = 0.3821 \mu\text{rad}, \Delta E_c = 0.1784 \mu\text{rad}$,后向差分法产生的误差不可忽略。在航捷点处,俯仰角越高的目标的角加速度越大,并且后向差分法的误差及误差增大的速度均随航捷点的俯仰角的增大而增大;俯仰角在 $24.02^\circ \sim 85.96^\circ$ 范围内时,后向差分法在方位和俯仰方向上的提前量误

差分别分布在 $0.1 \sim 2.903 \mu\text{rad}$, $0.07584 \sim 3.835 \mu\text{rad}$ 之间, 可以认为角加速度较大时匀角速度近似会产生较大误差。

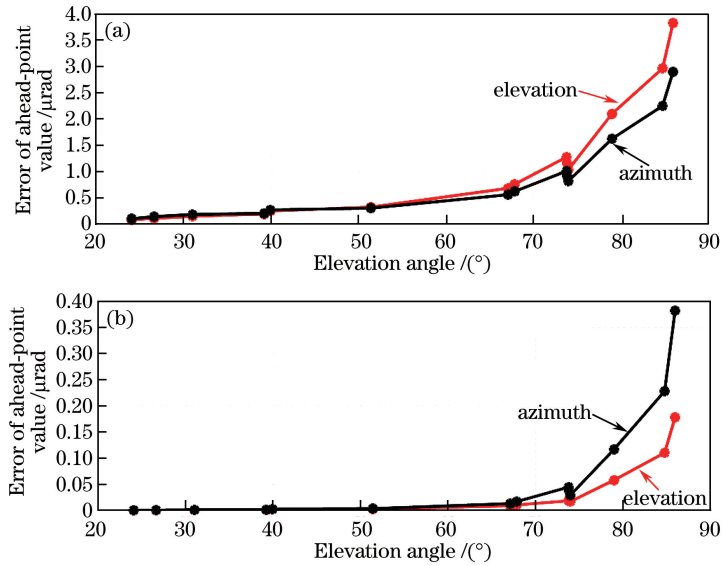


图 8 (a)后向差分法的提前量误差;(b)中心差分法的提前量误差

Fig. 8 (a) Error of ahead-point value under backward-difference method; (b) error of ahead-point value under central-difference method

通过两种算法误差的对比分析可得, 相对于后向差分法, 中心差分算法的计算误差减小 85%; 对于航捷点处仰角超过 70° 的目标, 后向差分法在方位和俯仰方向上的提前量误差都超过 $1 \mu\text{rad}$, 不可忽略; 而对于航捷点处仰角小于 50° 的目标, 两种算法在方位和俯仰方向上的提前量计算误差都在 $0.3 \mu\text{rad}$ 之内。因此, 应根据目标的运动特性设置提前量, 在精度要求不高、目标仰角较小时, 可以考虑用后向差分的方法减少计算量; 但对于精度要求较高或目标仰角较大的情况, 应考虑用中心差分方法。

表 1 典型空间目标在航捷点处的俯仰角及角加速度

Table 1 Elevation angle and angular acceleration of typical space targets at landing points

Satellite target	Elevation angle / ($^\circ$)	Azimuth angular acceleration / [$^\circ \cdot \text{s}^{-2}$]	Elevation angular acceleration / [$^\circ \cdot \text{s}^{-2}$]
WORLDVIEW-2	24.02	0.3055	0.00083
WORLDVIEW-3	26.58	0.4056	0.00149
KOMPSAT-3A	30.97	0.5326	0.00256
CARTOSAT-2A	39.17	0.5990	0.00340
WORLDVIEW-1	39.89	0.7719	0.00563
CARTOSAT-2B	51.38	0.8722	0.00690
CARTOSAT-2	67.08	1.6260	0.01685
RESURS-DK1	67.84	1.8620	0.02146
ASNARO	73.78	2.9530	0.04097
SKYSAT-1	73.83	2.6890	0.03390
SKYSAT-2	73.97	2.3980	0.02676
RESURS-P2	78.97	4.7890	0.07419
SPOT-7	84.76	6.7260	0.07179
SPOT-6	85.96	8.7030	0.09309

4 结 论

理论分析和仿真结果表明, 航天器在地平坐标系下作复杂的变加速运动, 方位角速度随俯仰角的增大而增大, 在航捷点处具有最大的方位角速度和俯仰角加速度, 但在此处俯仰角速度和方位角加速度均为零, 且

斜距最小,这为跟瞄系统的设计提供了参考。瞄准过程中需要对两终端的相对运动进行提前量补偿,为此首先对理想时间连续系统的一、二阶提前量进行分析,仿真结果表明,方位一阶提前量随俯仰角的增大而增大,在航捷点处达到最大值,但此处俯仰一阶提前量为零;航捷点处方位二阶提前量为零,俯仰二阶提前量最大。以理想时间连续系统为参考,对实际非连续系统的后向差分和中心差分提前量算法进行了误差分析,分析结果表明,两种算法产生的提前量误差均随着俯仰角的增大而增大。由于未考虑航天器角加速度,对于仰角超过 70° 的目标,后向差分法在方位和俯仰方向上的提前量误差都超过 $1\ \mu\text{rad}$,而中心差分法较后向差分法计算误差减小 85% ,因此,中心差分提前量算法更具优势。综合以上结果,在实际的跟瞄系统提前量补偿中,应结合目标的运动特性,尽可能地保留运动特性的高阶项,以选择合适的提前量算法。

参 考 文 献

- [1] Li J L, Guo L, Qian Z H, *et al.* The application of the instantaneous states reduction to the orbital monitoring of pivotal arcs of the Chang'E-1 satellite[J]. Science in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy, 2009, 52(12): 1833-1841.
- [2] Wang Weibing, Wang Tingfeng, Guo Jin. Research on orbit determination technology for space target based on method of tracking with double satellites and double cameras[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(1): 0112006.
王卫兵, 王挺峰, 郭 劲. 基于双星双目跟踪方式的空间目标定轨技术研究[J]. 光学学报, 2015, 35(1): 0112006.
- [3] Zheng Xiangming, Li Zhulian, Fu Honglin, *et al.* 1.2 m Telescope satellite co-optical path kHz laser ranging system [J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(5): 0512002.
郑向明, 李祝莲, 伏红林, 等. 云台 1.2 m 望远镜共光路千赫兹卫星激光测距系统[J]. 光学学报, 2011, 31(5): 0512002.
- [4] Wang Hongxing, Song Bo, Wu Xiaojun, *et al.* Influence of pointing error on bit error rate of free space optics system at sea[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(9): 0901001.
王红星, 宋 博, 吴晓军, 等. 指向误差对海上无线光通信误码率性能的影响分析[J]. 光学学报, 2016, 36(9): 0901001.
- [5] Jiang Huilin, Jiang Lun, Song Yansong, *et al.* Research of optical and APT technology in one-point to multi-point simultaneous space laser communication system[J]. Chinese J Lasers, 2015, 42(4): 0405008.
姜会林, 江 伦, 宋延嵩, 等. 一点对多点同时空间激光通信光学跟瞄技术研究[J]. 中国激光, 2015, 42(4): 0405008.
- [6] Alexander J W, Lee S, Chen C C. Pointing and tracking concepts for deep-space missions[C]. SPIE, 1999, 3615: 230-249.
- [7] Lee S, Alexander J W, Ortiz G G. Sub-microradian pointing system design for deep-space optical communications[C]. SPIE, 2001, 4272: 104-111.
- [8] Greenwald D, Mclaughlin C. A beacon tracker and point ahead system for optical communications[C]. SPIE, 1989, 1111: 268-276.
- [9] Lefebvre M J, Taylor G L, Cuellar E L, *et al.* Point-ahead-compensated illumination demonstration using BMDO/IST adaptive optics system[C]. SPIE, 1995, 2376: 231-236.
- [10] Xu Kehua, Ma Jing, Tan Liying. Research on beam pointing in deep space optical communication[J]. Optics and Precision Engineering, 2006, 14(1): 16-21.
徐科华, 马 晶, 谭立英. 深空光通信中光束瞄准技术研究[J]. 光学精密工程, 2006, 14(1): 16-21.
- [11] Montenbruck O, Gill E. Satellite orbits-models, methods and applications[M]. Berlin: Springer, 2000: 157-192.
- [12] Zhang Renwei. Satellite orbit attitude dynamics and control[M]. Beijing: Beihang University Press, 1998: 1-12.
章仁为. 卫星轨道姿态动力学与控制[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1998: 1-12.
- [13] Department of Theoretical Mechanics, Harbin Institute of Technology. Theoretical mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2002: 170-186.
哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 170-186.
- [14] Yue Jinhai, Huang Tianyi. Evaluation of the solvers for Kepler's equation [J]. Publications of Purple Mountain Observatory, 1997, 16(3): 164-174.
岳锦海, 黄天衣. Kepler 方程解法的评估[J]. 紫金天文台台刊, 1997, 16(3): 164-174.
- [15] Liu Lin. Orbit theory of spacecraft[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2000: 1-32.

- 刘 林. 航天器轨道理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000: 1-32.
- [16] Urban S E, Seidelmann P K. Explanatory supplement to the astronomical almanac[M]. California: University Science Books, 2012: 585-597.
- [17] Wang Yuesheng. Kinematics and dynamics[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2011: 20-40, 43-66.
汪越胜. 运动学与动力学[M]. 北京: 电子工业出版社, 2011: 20-40, 43-66.
- [18] Wang Linlin, Tang Chen, Wang Yajie. Impact on partial differential equations filtering models of difference scheme[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2015, 52(9): 091004.
王琳霖, 唐 晨, 王亚杰. 差分格式对偏微分方程滤波模型的影响[J]. 激光与光电子学进展, 2015, 52(9): 091004.
- [19] Ma Lewei, Xu Zhaodong. Dynamics of structures[M]. Beijing: Science Press, 2007: 108-116.
马乐为, 徐赵东. 结构动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 108-116.