

Bessel 光束通过含光阑的球差分数傅里叶变换系统的传输

杨玉婷, 张廷蓉, 龚霞, 杨强

四川师范大学物理与电子工程学院, 四川 成都 610101

摘要 基于广义惠更斯-菲涅耳衍射积分公式,以 Lohmann I 型光学系统为例,推导出 Bessel 光束通过含光阑的球差分数傅里叶变换系统后的场分布表达式,通过数值模拟计算了 Bessel 光束在理想分数傅里叶变换系统中的传输特性以及光阑和球差对光束传输的影响规律。研究表明:Bessel 光束通过分数傅里叶变换系统后不再保持其传输不变性;系统只含光阑时,可在常规傅里叶变换面上获得空心光束;系统同时存在光阑和球差时,正球差下输出面可获得聚焦性更好、中心光强更强的光束;光阑较小时,轴上光强分布主要受光阑影响,光阑达到一定数值后,轴上光强分布主要受球差影响。

关键词 傅里叶光学; 分数傅里叶变换; 广义惠更斯-菲涅耳衍射积分公式; Bessel 光束; 球差; 光阑

中图分类号 O438.2

文献标识码 A

doi: 10.3788/CJL201744.1205002

Propagation of Bessel Beams Through a Spherical Aberration Fractional Fourier Transform System with Aperture

Yang Yuting, Zhang Tingrong, Gong Xia, Yang Qiang

College of Physics and Electronic Engineering, Sichuan Normal University, Chengdu, Sichuan 610101, China

Abstract Based on the generalized Huygens-Fresnel diffraction integral formula, field distribution expressions of Bessel beams passing through a spherical aberration fractional Fourier transform system with an aperture are derived when we take Lohmann I type optical system as an example. Propagation characteristics of Bessel beams in ideal fractional Fourier transform system and the influence rule of aperture and spherical aberration on beam propagation are calculated by numerical simulation. The results show that Bessel beams do not maintain propagation invariability after passing through a fractional Fourier transform system. When the system only contains an aperture, a hollow beam can be obtained at the conventional Fourier transform plane. When the system contains aperture and spherical aberration, beams with good focusing property and high central light intensity can be obtained with positive spherical aberration. Light intensity distribution on the axis is mainly affected by the aperture when the aperture size is small, and it is influenced by spherical aberration when the aperture size exceeds a critical value.

Key words Fourier optics; fractional Fourier transform; generalized Huygens-Fresnel diffraction integral formula; Bessel beams; spherical aberration; aperture

OCIS codes 070.2575; 070.7345; 080.1010; 140.3300

1 引言

1980 年 Namias^[1]完整地提出分数傅里叶变换(FRFT)的定义,之后 Mendlovic 等^[2-4]将其推广到光学领域。与传统的傅里叶变换相比,FRFT 更灵活方便,在光的传输变换、光学成像和光信息处理等方面具有更广阔的应用前景^[5-7]。到目前为止,学者已经针对光学 FRFT 的性质、应用以及光束在 FRFT 系统中的传

收稿日期: 2017-07-19; **收到修改稿日期:** 2017-08-10

基金项目: 四川省教育厅重点项目(12ZA144)

作者简介: 杨玉婷(1992—),女,硕士研究生,主要从事激光传输与变换方面的研究。E-mail: 975056598@qq.com

导师简介: 张廷蓉(1962—),女,硕士,教授,硕士生导师,主要从事激光传输与变换方面的研究。

E-mail: trz_sc@163.com(通信联系人)

输进行了大量研究^[8-13]。球差作为一种普遍存在的像差,对光束通过光学系统后的光强分布和聚焦特性均有较大影响^[14-19],近年来已有学者研究了光束在含球差 FRFT 系统中的传输^[20-24]。然而,在实际应用中,光学系统不可避免地受到透镜尺寸的限制,所以同时考虑球差及光阑效应对光束传输的影响是非常必要的。

1987 年 Durnin 等^[25]提出无衍射 Bessel 光束,此类光束在自由空间中传播时横向光场分布不随传播距离发生变化,具有光斑尺寸小、强度大、方向性好、传输距离远等特点,在激光加工、激光准直、光学微操纵等领域具有很大的应用价值^[26-28]。本文以此类光束为研究对象,基于广义惠更斯-菲涅耳衍射积分公式,在考虑透镜同时存在光阑效应和球差两种非理想因素时,研究 Bessel 光束在 FRFT 系统中的传输特性,使用的方法可应用于一般光束在含光阑的球差 FRFT 系统中传输特性的研究,所得结果对光束整形、控制以及原子俘获等方面有重要价值。

2 理论分析

2.1 实现装置

Lohmann^[4]提出了两种实现光学 FRFT 的透镜系统,这里采用单透镜的 Lohmann I 型系统实现 Bessel 光束的 p 阶 FRFT。如图 1 所示,光束从平面 P_1 入射,经过 Lohmann I 型系统(Z 面),在平面 P_2 处获得 p 阶 FRFT。图中 $\varphi = p\pi/2$, p 为 FRFT 阶数, f_1 为标准焦距,透镜焦距 f 以及输入(出)平面与透镜的距离 d 由 f_1 和 p 决定, a 为光阑半径。

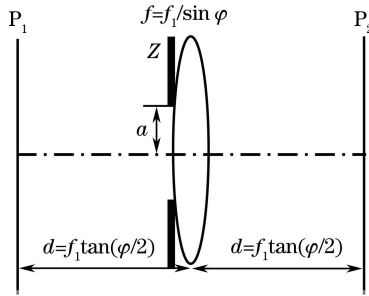


图 1 Lohmann I 型 FRFT 系统

Fig. 1 FRFT system of Lohmann I type

2.2 Bessel 光束的 FRFT

Bessel 高斯光束在 $z=0$ 平面处的场分布表达式为^[25,29]

$$E_1(r_1, z=0) = A_0 J_0(\alpha r_1), \quad (1)$$

式中 A_0 为常数, $J_0(\cdot)$ 为零阶 Bessel 函数, α 为调制参数, r_1 为 $Z=0$ 平面处柱坐标下径向距离。

由于透镜存在光阑和球差,光束传输过程将分为两部分:

1) 光束从平面 P_1 到平面 Z 的自由传输。将(1)式代入广义惠更斯-菲涅耳衍射积分公式^[30]并利用特殊积分公式进行积分,可得

$$\int_0^\infty r \exp(-Hr^2) J_0(Vr) J_0(Gr) dr = \frac{1}{2H} \exp\left(-\frac{G^2 + V^2}{4H}\right) I_0\left(\frac{GV}{2H}\right), \quad (2)$$

式中 H, V, G 为非零常数项, r 为积分变量, $I_0(\cdot)$ 为零阶修正 Bessel 函数。基于(2)式可得平面 Z 的场分布表达式为

$$E_2(r_2, z) = A_0 \exp(ikz) J_0(\alpha r_2), \quad (3)$$

式中 $k=2\pi/\lambda$ 为波数, λ 为波长; r_2 为平面 Z 处柱坐标下的径向距离。忽略(3)式中对光强分布无影响的相位因子,可以发现此时场分布与 $z=0$ 处的初始场分布一致,这是由于自由空间中 Bessel 光束为无衍射传输,场分布未发生变化。

2) 光束通过含光阑的球差透镜到平面 P_2 的传输。球差透镜对光束的作用为 $\exp[-ikr_2^2/(2f) - ickr_2^4]$, 其中 c 为球差系数^[14], 再次利用广义惠更斯-菲涅耳衍射积分公式,得到输出面场分布表达式为

$$E_3(r_3, z) = -\frac{ikA_0}{d} \exp(2ikz) \int_0^a r_2 \exp\left[-ickr_2^4 + \frac{ik}{2}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{f}\right)r_2^2 + \frac{ik}{2d}r_3^2\right] J_0(\alpha r_2) J_0\left(\frac{kr_2 r_3}{d}\right) dr_2, \quad (4)$$

式中 r_3 为平面 P_2 处柱坐标下的径向距离。(4)式即为 Bessel 光束通过含光阑的球差 FRFT 系统后输出面的场分布表达式。当 $a \rightarrow \infty$ 时,(4)式将退化为 Bessel 光束通过只含球差的 FRFT 系统后的场分布表达式。球差相位因子 $\exp(-ikcr_2^4)$ 导致无法得到(4)式的解析结果,下面将利用数值模拟计算来进行具体分析。当 $c=0$ 时,即透镜为无球差透镜,此时系统只含光阑,引入圆形光阑的窗口函数

$$A_p(r_2) = \begin{cases} 1, & r_2 \leq a \\ 0, & r_2 > a \end{cases}, \quad (5)$$

并将其展开为有限项复高斯函数之和^[31],即

$$A_p(r_2) = \sum_{m=1}^M A_m \exp\left(-\frac{B_m r_2^2}{a^2}\right), \quad (6)$$

式中 A_m, B_m 为展开系数, M 为展开级次,这里取 $M=10$ 。将(6)式代入(4)式并应用(2)式给出的积分公式,可得到 Bessel 光束在只含光阑的 FRFT 系统输出面的场分布解析表达式为

$$E_3(r_3, z) = -\frac{ikA_0}{d} \exp\left(2ikz + \frac{ikr_3^2}{2d}\right) \sum_{m=1}^M A_m \frac{1}{2[B_m a^{-2} - ik(f-d)/(2df)]} \times \exp\left\{-\frac{\alpha^2 + (kr_3/d)^2}{4[B_m a^{-2} - ik(f-d)/(2df)]}\right\} I_0\left\{\frac{\alpha kr_3}{2d[B_m a^{-2} - ik(f-d)/(2df)]}\right\}. \quad (7)$$

当 $c=0, a \rightarrow \infty$ 时,(4)式转换为光束在理想 FRFT 系统中的传输,利用(2)式积分可得

$$E_3(r_3, z) = \frac{A_0 f}{f-d} \exp\left[2ikz + \frac{ikr_3^2}{2(d-f)}\right] J_0\left(\frac{\alpha fr_3}{d-f}\right). \quad (8)$$

由(7)式可得输出光束仍然为 Bessel 光束,FRFT 系统的作用表现为对常数项和调制参数的改变,最终场分布由初始光场参数以及变换阶数决定。根据(4)、(7)、(8)式,可得光强表达式为

$$I_3(r_3, z) = E_3(r_3, z) E_3^*(r_3, z), \quad (9)$$

式中 * 表示共轭。由(9)式可得到 Bessel 光束通过含光阑的球差 FRFT 系统、只含光阑的 FRFT 系统以及理想的 FRFT 系统后的光强分布。

3 数值计算与分析

取如下计算参数: $A_0=1, \lambda=632.8 \text{ nm}, f_1=2.0 \text{ m}$ 。为了研究 Bessel 光束在理想 FRFT 系统中的传输,利用(8)、(9)式进行数值计算,计算得到 $0 < p < 1$ 和 $1 < p < 2$ 区间内的光强呈镜像对称分布,所以此处只讨论 $0 < p < 1$ 区间的输出面横向光强分布以及 Bessel 光束经 FRFT 系统后不同变换阶数下的光强截面。从图 2 中

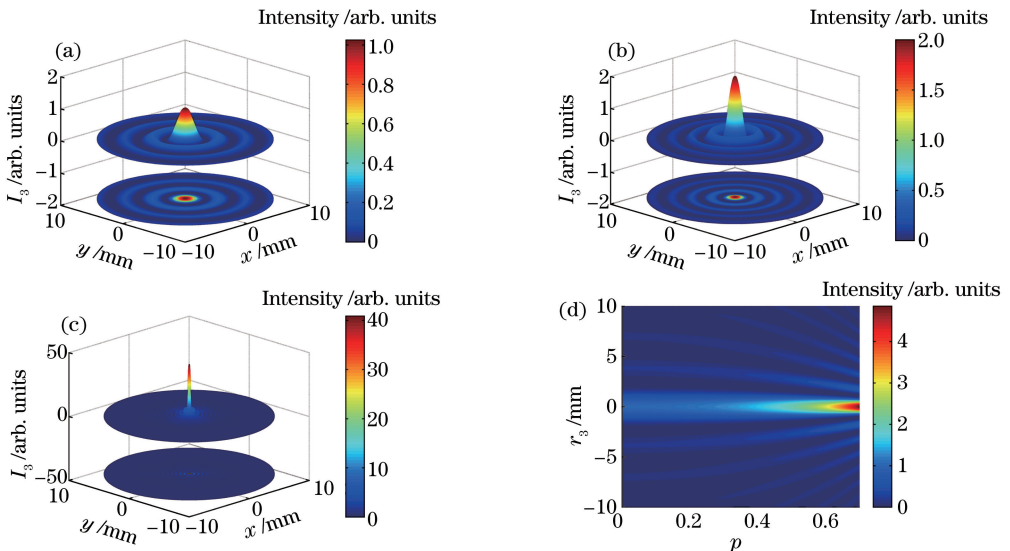


图 2 Bessel 光束通过理想 FRFT 系统后光强分布。(a) $p=0.1$; (b) $p=0.5$; (c) $p=0.9$; (d) $0 \leq p \leq 0.7$

Fig. 2 Light intensity distributions after Bessel beams passing through the ideal FRFT system.

(a) $p=0.1$; (b) $p=0.5$; (c) $p=0.9$; (d) $0 \leq p \leq 0.7$

可以看出,输出光束仍为 Bessel 光束,且随着 p 的增大,中心峰值光强明显增大,中央极大值宽度减小,次级旁瓣增多,在(8)式中表现为常数项和调制参数的增大。值得注意的是,当 $p=1$ 时,即采用常规傅里叶变换时,中央极大值趋于无穷大,这是由于理想状态下忽略了透镜光阑对光束传输的影响。当考虑透镜存在光阑时,利用(7)、(9)式,绘出 $p=1$ 时不同光阑下的输出面光强分布,如图 3 所示。可以看出,输出光束将不再是 Bessel 光束,且光阑尺寸的不同将影响最终光强的分布情况,如 $a=3$ mm 时为类高斯光束[图 3(a)], $a=4$ mm 时为空心光束[图 3(b)]。大量数值计算结果表明:当光阑取某些特定值时,如 $a=10$ mm,所获空心光束的亮环强度将极大地增加,中心暗域将逐渐变大[图 3(d)],实际应用中可通过调节透镜光阑尺寸来获得光束质量更好的空心光束。

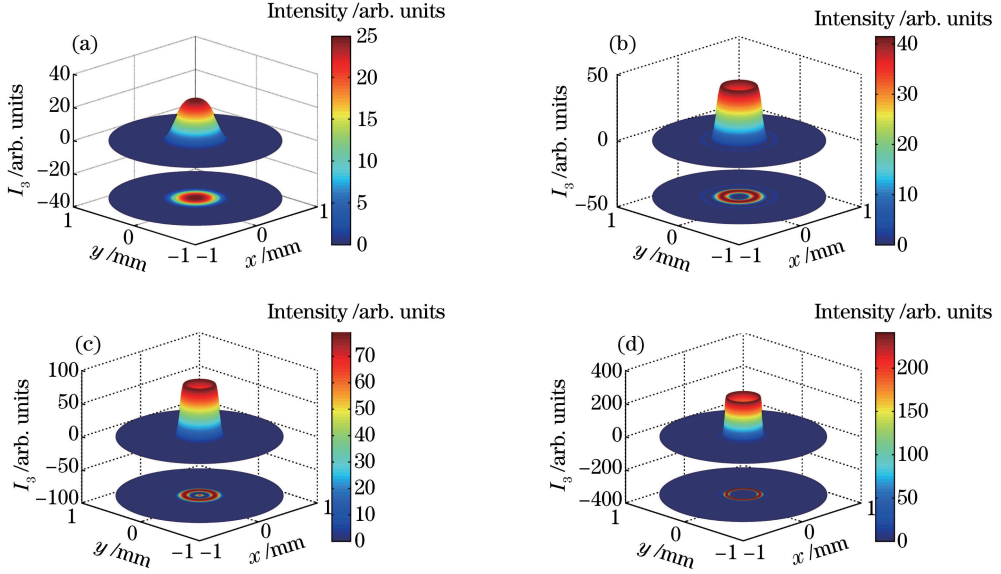


图 3 傅里叶变换面光强分布随光阑半径的变化。(a) $a=3$ mm;(b) $a=4$ mm;(c) $a=5$ mm;(d) $a=6$ mm

Fig. 3 Variation in light intensity distribution in Fourier transform plane with aperture radius.

(a) $a=3$ mm; (b) $a=4$ mm; (c) $a=5$ mm; (d) $a=6$ mm

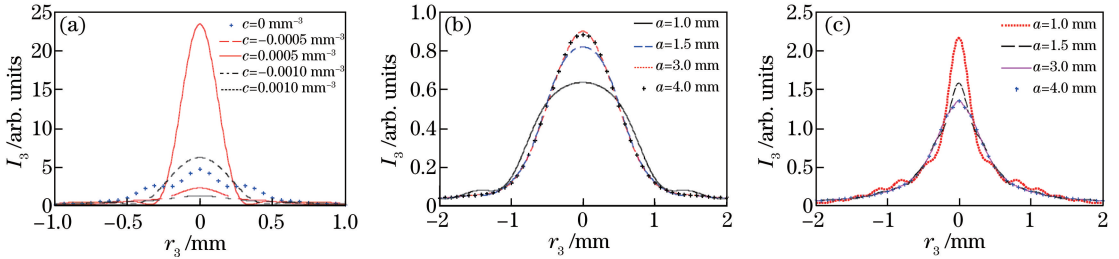


图 4 不同球差系数和光阑半径下输出面上二维光强的截面图。(a) $p=0.5, a=1$ mm;

(b) $p=1.0, c=\pm 0.0005$ mm⁻³; (c) $p=0.5, c=-0.0005$ mm⁻³

Fig. 4 Two-dimensional light intensity sectional profile on output plane under different spherical aberration coefficients and aperture radii. (a) $p=0.5, a=1$ mm; (b) $p=1.0, c=\pm 0.0005$ mm⁻³; (c) $p=0.5, c=-0.0005$ mm⁻³

为了研究 Bessel 光束经含有光阑和球差的 FRFT 系统的传输特性,利用(4)、(9)式进行数值模拟,得到不同球差和光阑条件下输出面上二维光强的截面图,如图 4 所示。对比图 4 和图 2,可以发现球差和光阑的作用使得输出光束不再为 Bessel 光束,光强分布同时受到光阑和球差的影响。从图 4(b)可以看出,当 $p=1$ 时,绝对值相同的正、负球差下的光强分布相同。这是由于 $p=1$ 时,(4)式所描述的正、负球差下的场分布表达式一致;而当 $p \neq 1$ 时,正、负球差下的场分布不再一致。以图 4(a)为例,当 $p=0.5$ 时,对比无球差和有球差时输出面的光强分布可以看出,球差的影响效果显著,且正、负球差影响效果不再相同。与无球差和负球差时相比,正球差使光束的中心光强变强、可聚焦性变好,能量更集中,因此在实际应用中可选取正球差透镜来提高光束质量。观察图 4(b)、(c)可以发现,透镜光阑的大小会改变光束分布,但当光阑达到一定值时,

改变光阑大小, 光强分布不再发生明显的变化, 此时透镜光阑效应可忽略。根据轴上光强随光阑变化的关系曲线(图 5), 可以得出光阑和球差对光束分布的影响规律, 当光阑较小, 如 $p=0.5$ 时, 光阑尺寸在 $0 \text{ mm} < a < 0.5 \text{ mm}$ 区间时, 不同球差系数下的轴上光强大小相同, 说明此时光强分布主要受光阑的影响。而当光阑较大, 如 $a > 5 \text{ mm}$ 时, 相同球差系数下, 随着光阑的改变, 轴上光强不再发生明显变化, 此时光阑效应可忽略, 轴上光强分布主要受球差系数的影响。

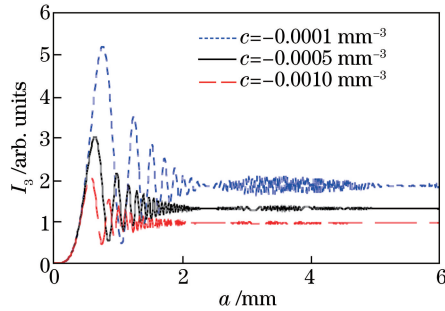


图 5 $p=0.5$ 时不同球差系数下轴上光强随光阑半径的变化

Fig. 5 Variation in light intensity distribution on axis with aperture radius under different spherical aberration coefficients when $p=0.5$

4 结 论

详细研究了 Bessel 光束在含光阑和球差的 FRFT 系统中的传输特性。结果表明: Bessel 光束通过理想或非理想 FRFT 系统后不再保持其传输不变性, 理想系统中输出面仍然为 Bessel 光束, 变换阶数导致光束调制参数的改变。系统只含光阑时, 常规傅里叶变换系统输出面可获得空心光束, 此光束可用于偶极势诱导、原子俘获等领域, 在实际应用中应设法消除系统球差以获得空心光束。系统同时含光阑和球差时, 输出面光束分布受光阑和球差的共同影响, 除常规傅里叶变换系统输出面外, 正球差和负球差对光束的影响效果不再一致, 正球差下光束聚焦性更好、中心光强更强。光阑较小时, 光束主要受光阑效应的影响, 而当光阑达到一定大小时, 光阑效应可忽略, 光束主要受球差影响。实际应用中通过选取合适的光阑尺寸和透镜球差可以实现对输出光束的调控, 以获得光束质量较好的光束。

参 考 文 献

- [1] Namias V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics [J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 1980, 25(3): 241-265.
- [2] Mendlovic D, Ozaktas H M. Fractional Fourier transforms and their optical implementation [J]. Journal of the Optical Society of America A, 1993, 10(9): 1875-1881.
- [3] Ozaktas H M, Mendlovic D. Fourier transforms of fractional order and their optical interpretation [J]. Journal of the Optics Society of America A, 1993, 10(3): 163-169.
- [4] Lohmann A W. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform [J]. Journal of the Optics Society of America A, 1993, 10(10): 2181-2186.
- [5] Wen Liang. Fractional Fourier transform and its application [D]. Chongqing: Chongqing University, 2008: 18-33.
文亮. 分数傅里叶变换及其应用 [D]. 重庆: 重庆大学, 2008: 18-33.
- [6] Wu Di, Jin Weimin. Colour image encryption based on fractional Fourier transform and digital holography [J]. Laser Journal, 2016, 37(4): 45-49.
吴迪, 金伟民. 基于分数傅里叶变换与数字全息彩色图像加密 [J]. 激光杂志, 2016, 37(4): 45-49.
- [7] Su Xianyu, Li Jitao, Cao Yiping, et al. Information optics [M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2012: 271-278.
苏显渝, 李继陶, 曹益平, 等. 信息光学 [M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2012: 271-278.
- [8] Kong Dezhaoh, Shen Xueju, Lin Chao, et al. Multi-image encryption bases on wavelet transform and fractional Fourier transform [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2013, 50(9): 091002.
孔德照, 沈学举, 林超, 等. 基于小波变换的分数阶傅里叶变换多图加密技术研究 [J]. 激光与光电子学进展, 2013,

- 50(9): 091002.
- [9] Zheng Jiming, Cao Yuru, Liu Qing. Application of fractional Fourier transform to image encryption[J]. Research and Exploration in Laboratory, 2010, 29(11): 44-47.
郑戟明, 曹玉茹, 柳青. 分数傅里叶变换在图像加密中的应用[J]. 实验室研究与探索, 2010, 29(11): 44-47.
- [10] Chen Senhui, Zhang Tingrong. Fractional Fourier transform for incoherent one-dimensional off-axis Gaussian beams [J]. High Power Laser and Particle Beams, 2009, 21(2): 190-194.
陈森会, 张廷蓉. 1 维线阵离轴高斯光束的分数傅里叶变换[J]. 强激光与粒子束, 2009, 21(2): 190-194.
- [11] Chen Senhui, Zhang Tingrong, Feng Xiaofang. Transformation properties of Hermite-Laguerre-Gaussian beam in fractional Fourier transform plane[J]. Chinese J Lasers, 2009, 36(2): 374-378.
陈森会, 张廷蓉, 冯小芳. 分数傅里叶变换面上厄米-拉盖尔-高斯光束的变换特性[J]. 中国激光, 2009, 36(2): 374-378.
- [12] Chen Tianlu, Wu Ping, Li Haijin, *et al.* Two-dimensional axial symmetric fractional Fourier transforms for elliptical Gaussian beams employing Wigner distribution function[J]. Chinese J Lasers, 2010, 37(2): 444-448.
陈天禄, 吴平, 厉海金, 等. 椭圆高斯光束的二维轴对称分数傅里叶变换特性[J]. 中国激光, 2010, 37(2): 444-448.
- [13] Chen Senhui, Zhang Tingrong, Huang Yongchao, *et al.* Spectrum properties of Gaussian-Shell mode beam in the chromatics aberrated fractional Fourier transforms system[J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(1): 0107001.
陈森会, 张廷蓉, 黄永超, 等. 高斯-谢尔模型光束在有色差的分数傅里叶变换系统中的光谱特性[J]. 光学学报, 2011, 31(1): 0107001.
- [14] Siegman A E. Analysis of laser beam quality degradation caused by quartic phase aberrations [J]. Applied Optics, 1993, 32(30): 5893-5901.
- [15] Ji Xiaoling, Lü Baida. Effect of the spherically aberrated lens on beam quality[J]. Chinese J Laser, 2001, 28(4): 347-350.
季小玲, 吕百达. 球差透镜对高斯光束质量的影响[J]. 中国激光, 2001, 28(4): 347-350.
- [16] Wang Wei, Tang Xiahui, Qin Yingxiong, *et al.* Influence of resonator mirror surfaces on output mode of radio frequency slab CO₂ lasers[J]. Chinese J Lasers, 2016, 43(4): 0402004.
王炜, 唐霞辉, 秦应雄, 等. 腔镜面对射频板条 CO₂ 激光器输出模式的影响[J]. 中国激光, 2016, 43(4): 0402004.
- [17] Wang Qingfeng, Wang Xiqing, Huang Qing. Effect of the spherically aberrated lens on the property of cosine-Gaussian [J]. Laser Journal, 2006, 27(4): 41-42.
王庆峰, 王喜庆, 黄庆. 球差透镜对余弦高斯光束聚焦特性的影响[J]. 激光杂志, 2006, 27(4): 41-42.
- [18] Pan Sunqiang, Zhao Zhigang, Liu Chong, *et al.* Mechanism investigation of beam quality evolution within laser oscillator[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2015, 52(11): 111406.
潘孙强, 赵智刚, 刘崇, 等. 激光振荡器内光束质量演变的机理研究[J]. 激光与光电子学进展, 2015, 52(11): 111406.
- [19] Chen J N, Yan J L. Study on spherical aberration of imaging system constructed by fractional Fourier transform[C]. SPIE, 2006, 6034: 60341U.
- [20] Mao H D, Zhao D M, Feng J, *et al.* Propagation characteristics of the kurtosis parameters of flat-topped beams passing through fractional Fourier transformation systems with a spherically aberrated lens[J]. Journal of Optics A, 2004, 6(2): 640-650.
- [21] Mao Haidan, Ye Teng. Studies on the fractional Fourier transform with spherically aberrated lenses [J]. Journal of Hangzhou Dianzi University, 2008, 28(4): 88-91.
毛海丹, 叶腾. 带球差的分数傅立叶变换系统的传输特性研究[J]. 杭州电子科技大学学报, 2008, 28(4): 88-91.
- [22] Zhao Daomu, Mao Haidan. Fractional Fourier transform with spherically aberrated lens[J]. Journal of Optoelectronics • Laser, 2004, 15(6): 724-730.
赵道木, 毛海丹. 带透镜球差的分数傅立叶变换[J]. 光电子 • 激光, 2004, 15(6): 724-730.
- [23] Zhao D M, Mao H D, Mei Z R, *et al.* The kurtosis parametric characteristics of light beams passing through aberrated fractional Fourier transforming systems[C]. SPIE, 2005, 5638: 19-26.
- [24] Yang Yuting, Zhang Tingrong, Gong Xia. Propagation of cosine-Gaussian beams in spherically aberrated fractional Fourier transform system[J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(2): 0207001
杨玉婷, 张廷蓉, 龚霞. 余弦高斯光束通过含球差分数傅里叶变换系统的传输[J]. 光学学报, 2017, 37(2): 0207001.
- [25] Durnin J, Jr Miceli J, Eberly J H. Diffraction-free beams[J]. Physical Review Letters, 1987, 58(15): 1499-1501.
- [26] Hu Run, Wu Fengtie. Influence of axicon vertex off axis machining error on Bessel beams[J]. Chinese J Lasers, 2016,

43(12): 1205002.

胡润, 吴逢铁. 轴棱锥顶点离轴加工误差对贝塞尔光束的影响[J]. 中国激光, 2016, 43(12): 1205002.

- [27] Xie Xiaoxia, Wang Shuochen, Wu Fengtie. Diffraction optical field of the Bessel beam through elliptical annular aperture[J]. Acta Physica Sinica, 2015, 64(12): 124201.
谢晓霞, 王硕琛, 吴逢铁. Bessel 光束经椭圆环形孔径后的衍射光场[J]. 物理学报, 2015, 64(12): 124201.
- [28] McGloin D, Dholakia K. Bessel beams: Diffraction in a new light[J]. Contemporary Physics, 2005, 46(1): 15-28.
- [29] Durnin J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1987, 4(4): 651-654.
- [30] Lü Baida. Laser optics: Beam characterization, propagation and transformation, resonator technology and physics[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2003: 11-12.
吕百达. 激光光学: 光束描述、传输变换与光腔技术物理[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2003: 11-12.
- [31] Wen J J, Breazeale M A. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1988, 83(5): 1752-1756.