

一种多波长梯度加速相位恢复迭代算法

赵 彦, 高志山, 窦健泰, 袁 群

南京理工大学电子工程与光电技术学院, 江苏 南京 210094

摘要 在传统多波长迭代算法的基础上, 引入角谱传输理论和梯度加速函数, 提出一种快速收敛的相位恢复迭代算法——多波长梯度加速迭代算法。该算法利用不同波长的光源经过相同光路在固定位置处所探测的光场强度信息, 通过迭代逼近, 并在迭代过程中引入梯度加速方法, 提高收敛速度, 从而恢复出输入面的相位信息。构建仿真模型, 随机选取初始迭代值, 对已知相位分布的输入场进行相位恢复, 并与传统多波长迭代算法进行了比较, 该算法表征相位面复原精度的相对均方根值均达到 10^{-3} 数量级, 收敛速率提高了两倍以上。在 635~785 nm 波段内选取多组不同波长数量的入射光利用该算法进行对比实验, 结果表明当波长数量为 7、8 时该算法具有良好快速的收敛特性及高精度的相位恢复能力。

关键词 全息; 迭代算法; 相位恢复; 多波长; 角谱传输; 梯度加速

中图分类号 O436.1

文献标识码 A

doi: 10.3788/CJL201744.0109001

A Multi-Wavelength Gradient Acceleration Phase Retrieval Iterative Algorithm

Zhao Yan, Gao Zhishan, Dou Jiantai, Yuan Qun

School of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Science and Technology,
Nanjing, Jiangsu 210094, China

Abstract Based on the traditional multi-wavelength iterative algorithm, we introduce the angular spectrum transmission theory and the gradient acceleration function, and present a fast convergent phase restoration iterative algorithm, namely, the multi-wavelength gradient acceleration phase retrieval iterative algorithm. The algorithm uses the light field intensity information detected at a fixed position when the light sources with different wavelengths go through the same light path. Through iterative approximation and by introducing the gradient acceleration function in the iterative process, the convergence speed is improved, and the input phase information is recovered. The simulation model is built, the initial iteration value is selected randomly, the input field for a known phase distribution is recovered, and the result is compared with that of the traditional multi-wavelength iteration algorithm. The relative root mean square value, which represents the phase plane reconstruction accuracy of the algorithm, achieves 10^{-3} orders of magnitude. Convergence rate is increased by more than two times. In the contrast experiments, multiple sets of light sources with different wavelength number within 635 nm to 785 nm are selected. The results show the method has good fast convergence and high precision phase retrieval ability when the wavelength number is 7 and 8.

Key words holography; iterative algorithm; phase retrieval; multi-wavelength; angular spectrum transmission; gradient acceleration

OCIS codes 200.3050; 050.1960; 120.5050

收稿日期: 2016-09-05; 收到修改稿日期: 2016-10-10

基金项目: 国家自然科学基金(61377015, 61505080)、江苏省自然科学基金(BK20150788)

作者简介: 赵彦(1991—), 男, 硕士研究生, 主要从事极紫外掩膜缺陷检测关键技术方面的研究。

E-mail: 404559319@qq.com

导师简介: 高志山(1966—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事光电系统集成技术、精密光学测试技术、光学设计方面的研究。E-mail: zhishgao@mail.njust.edu.cn(通信联系人)

1 引 言

相位信息包含了物体中高达 80% 的信息^[1], 而当今多数光学设备的光场信息采集, 只能获得强度信息而失去相位信息。光场相位信息的恢复在光学领域有着重要价值, 其在 X 射线成像、天文学、衍射成像、波前探测等方面都有重要的应用^[2-4]。非干涉法的相位恢复理论是指利用光的衍射理论, 对输入光场进行衍射计算, 得到输出面光场分布, 将其强度数据与实测输出面光场强度数据进行比较, 以能量转换效率最大、误差最小为准则, 通过迭代或者搜索找到最符合输入光场的相位分布^[5]。G-S(Gerchberg-Saxton)算法为最基本最普遍的相位恢复迭代算法^[6-7], 由 Gerchberg 等在 1972 年提出^[8]。该算法需测量两幅及以上具有不同光强度信息的相位图来恢复输入和输出平面上的光场相位分布。在 G-S 算法的基础上, 发展了许多改进算法, 如杨-顾算法(Y-G)、误差减少算法(RE)、输入输出算法(IO)、混合输入输出算法(HIO)^[9-10]、随机二元振幅调制恢复算法^[11]等。为了解决以上算法存在的迭代不确定性以及收敛速度慢等缺点, 相关文献提出了加速角谱迭代算法^[5, 12]。衍射角谱传输理论严格满足亥姆霍兹方程, 用它来处理迭代过程中输入、输出面光场间的衍射计算, 可以得到更精确、可靠的结果; 梯度函数的引入, 通过自适应函数加大迭代步长, 既确保了对复杂光场相位恢复的良好收敛性, 又使算法收敛速度得到很大提高^[11]。与此同时, 上述算法均需要在不同位置上采集衍射图, 近些年提出利用多波长光源采集衍射图进行相位复原的算法^[13-15], 只需要在固定位置采集衍射图, 实际实验中避免了移动光路^[13], 具有良好的复原效果。

本文在传统多波长迭代算法基础上, 结合角谱传输理论和梯度加速函数, 提出一种多波长梯度加速相位恢复迭代算法。即利用角谱传输理论, 构成输入和输出光场间的正、逆向衍射传输过程, 利用不同波长光源经过相同光路在固定位置处探测器所采集的光场强度信息, 通过不同波长输入场与输出场之间相互传输, 引入梯度加速方法, 提高了收敛速度, 快速准确地恢复出输入面的相位信息。该方法计算结果准确, 收敛结果唯一, 收敛速度快, 且能在二维情况下准确恢复各种输入面光场的相位分布。

2 基本原理

2.1 角谱传输理论

在直角坐标系中, 令输入面平面坐标为 x_i, y_i , 输入光场振幅为 $U(x_i, y_i)$ 、相位为 $\varphi(x_i, y_i)$; 经某一空间距离 d 衍射后, 在输出面的坐标为 x_o, y_o , 输出光场振幅为 $U(x_o, y_o)$ 、相位为 $\varphi(x_o, y_o)$, 输入、输出光场的复振幅为 E_i, E_o 。引用傅里叶变换及逆变换符号: $\mathcal{F}\{\}, \mathcal{F}^{-1}\{\}$, 则由输入光场获得输出光场的角谱衍射积分为^[16]

$$E_o(x_o, y_o) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{U(x_i, y_i) \exp[i\varphi(x_i, y_i)]\} \times H(f_x, f_y)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{E_i(x_i, y_i)\} \times H(f_x, f_y)\}。 \quad (1)$$

由(1)式得到角谱传输的逆运算为^[16]

$$E_i(x_i, y_i) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{E_o(x_o, y_o)\} \times H^*(f_x, f_y)\}, \quad (2)$$

其中 $H(f_x, f_y)$ 为光强传递函数, 表达式为

$$H(f_x, f_y) = \exp[i2\pi d \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2} / \lambda], \quad (3)$$

其中 f_x, f_y 为频域坐标, 即

$$f_x = \frac{m}{\Delta L_h}, \quad f_y = \frac{n}{\Delta L_h}, \quad \Delta L_h = N \cdot p, \quad (4)$$

$H^*(f_x, f_y)$ 是 $H(f_x, f_y)$ 的共轭, λ 为光波长, ΔL_h 为衍射光场的计算宽度, m, n 均为采样点数 ($m = -N/2, -N/2+1, \dots, N/2-1; n = -N/2, -N/2+1, \dots, N/2-1$), N 为采样总数, p 为采样像素间隔。

由(1)、(2)式进行离散数值计算时, 可借助快速傅里叶变换(FFT)完成。衍射光场的角谱理论严格满足亥姆霍兹方程, 用它来处理相位恢复迭代算法过程中输入输出面光场间的衍射计算, 可以得到更精确、可靠的结果, 这为算法的设计提供了理论支撑^[17]。

2.2 多波长梯度加速迭代算法

传统多波长迭代算法具有收敛速度较慢、对初始相位不敏感等缺点, 为了尽量消除这些不利因素, 在传

统多波长迭代算法基础上,引入角谱传输理论和梯度加速函数,提出能对复杂光场进行快速高精度相位恢复的多波长梯度加速迭代算法。该方法采集不同波长条件下在同一位置所探测的光场强度信息,从而恢复输入面的相位信息,其算法步骤如下:1) 选取 λ_1 条件下输出光场振幅已知量 A_1 ,并随机给定初始相位 φ_1 ,得到输出光场 U_1 ;2) 将 λ_1 条件下输出光场 U_1 利用角谱传输逆运算传输回输入面,得到 λ_1 条件下输入光场 U_{o1} ;3) 在输入面更新相位 φ_{o2} ,得到 λ_2 条件下的输入光场 U_{o2} ;4) 利用角谱传输运算传输到输出面,得到 λ_2 条件下输出光场 U_2 ,并替换其振幅量为已知量 A_2 ,保留相位量不变;5) 依次传输至 λ_n 条件下输出光场 U_n ;6) 将 λ_n 条件下输出光场 U_n 利用角谱传输逆运算传输回输入面,得到 λ_n 条件下输入光场 U_{on} ;7) 在输入面更新相位 $\varphi_{o(n-1)}$,得到 λ_{n-1} 条件下的输入光场 $U_{o(n-1)}$;8) 利用角谱传输运算传输到输出面,得到 λ_{n-1} 条件下输出光场 U_{n-1} ,并替换其振幅量为已知量 A_{n-1} ,保留相位量不变;9) 依次传输回 λ_1 ,得到一次循环结束后的输出光场 U'_1 ,得到其相位 φ_1 ,替换振幅为已知量 A_1 ;10) 将当次的相位迭代值 φ_1^k 与上次迭代值 φ_1^{k-1} 之差 h_k 作为梯度方向,将 α_k 作为迭代附加值,得到更新后 λ_1 条件下输出光场相位 φ_1^{k+1} ,加大算法梯度步长,从而加快收敛速度,其中 k 为迭代次数;11) 重复步骤 2) ~ 10),直到振幅的误差达到设计精度或者达到设置的最大迭代次数时结束迭代,将最后得到的输出光场 U_1^{k+1} 传输回输入面,得到其相位分布即迭代结束。算法流程如图 1 所示。

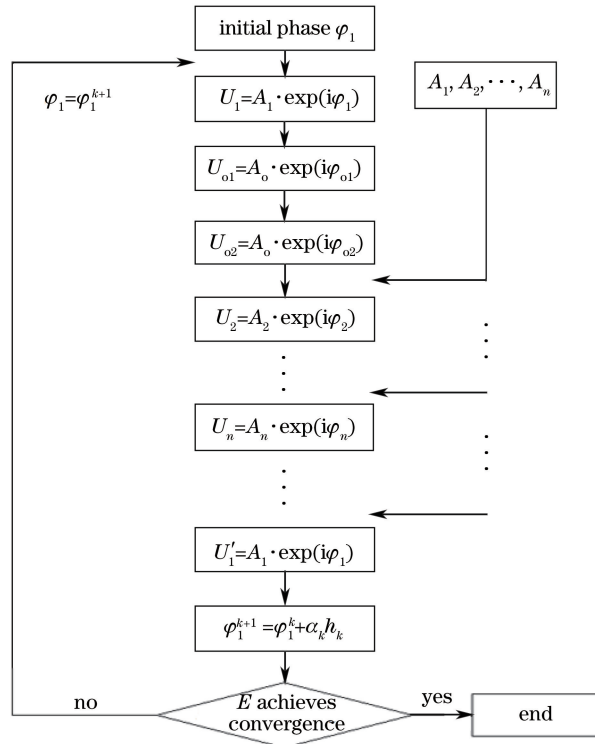


图 1 算法流程图

Fig. 1 Algorithm flow chart

流程图中加速方程系数 h_k, α_k ^[18] 与振幅的误差 E ^[14] 表达式分别为

$$h_k = \varphi_1^k - \varphi_1^{k-1}, \tag{5}$$

$$g_k = \varphi_1^k - \phi_1^k, \tag{6}$$

$$\alpha_k = \frac{\sum g_k g_{k-1}}{\sum g_{k-1} g_{k-1}}, \tag{7}$$

$$E = \frac{\sum (A_1^k - A_1)^2}{\sum A_1^2}, \tag{8}$$

式中 $0 < \alpha_k < 1, A_1$ 为 λ_1 条件下按照预先设定的初始光场通过角谱衍射理论计算到达输出面的光波振幅, A_1^k 为第 k 次迭代结束时输出面的振幅分布。

3 算法恢复结果及分析讨论

3.1 算法可行性

为验证算法的可行性,选取一个已知的相位面作为待恢复相位,采样点数设置为 512×512 ,采样宽度为 $2 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$,测量波长等间隔取 635,660,685,710,735,760,785 nm,上述测量波长所需光源可由可调谐激光器实现^[15]。设定一个圆形域输入面,该输入面为振幅分布 $A(x_o, y_o)$ 在 $[0, 1]$ 之间的图像,实验选取相位分布在 $[-\pi, 0]$ 的“Lena”图像作为待复原相位图像,输入面与输出面的距离为 35 mm,该图像具有丰富的细节信息,可检验算法恢复性能的优劣。针对上述同一测试条件,将提出的多波长梯度加速迭代算法与传统多波长相位迭代算法进行对比。

迭代结束后,相位恢复精度可用相对均方根(RMS)误差 E_{RMS} 来评估^[12],其表达式为

$$E_{\text{RMS}} = \frac{\sum |\varphi_{\text{ret}} - \varphi_{\text{true}}|^2}{\sum |\varphi_{\text{true}}|^2}, \quad (9)$$

式中 φ_{true} 为每个像元的实际相位值, φ_{ret} 为使用算法恢复的同一个像元的相位值。迭代的收敛效果则由收敛判据中的振幅误差 E 来评估。

初始相位由 Matlab 里的 rand 函数给出,其输入场理想振幅信息分布如图 2(a)所示;理想相位分布如图 2(b)所示。其迭代达到收敛后的振幅恢复情况如图 2(c)所示;相位恢复情况如图 2(d)所示,得到的 E_{RMS} 值为 0.92%。



图 2 (a) 输入场理想振幅信息图; (b) 输入面相位分布; (c) 迭代振幅恢复结果; (d) 迭代相位恢复结果
Fig. 2 (a) Input amplitude distribution; (b) input phase distribution; (c) iterative amplitude retrieval result; (d) iterative phase retrieval result

图 3 展示了 E 和迭代次数的关系,在梯度加速迭代算法与传统迭代算法上均达到收敛。在不同迭代次数情况下,其具体收敛相关参数如图 4 所示:当 E 达到 0.25% 时,所需迭代次数分别为 42、18,加速法相较于传统算法提高 57%;当 E 达到 0.10% 时,所需迭代次数分别为 75、30,加速法相较于传统算法提高 60%;当 E 达到收敛时,所需迭代次数分别为 200、87,加速法相较于传统算法在收敛速度上提高了 2 倍以上。此时加速算法 E_{RMS} 值为 0.92%,传统算法 E_{RMS} 值为 1.56%。可知该加速算法的收敛结果唯一,相比于传统多波长算法收敛速度显著提高并且具有更高的复原精度。

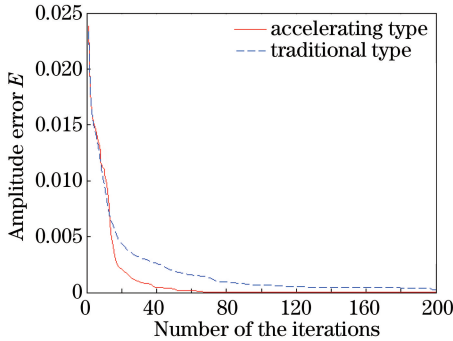


图 3 加速方法和传统方法中 E 与迭代次数的关系
Fig. 3 Relationship of E and the number of iterations between the accelerating type and traditional type

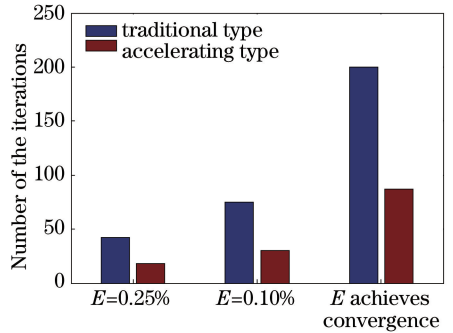


图 4 传统算法与加速算法比较
Fig. 4 Comparison between the traditional type and accelerating type

3.2 算法参数影响

讨论加速相位恢复迭代算法中一定波段内波长数目的影响,在 635~785 nm 波段内选取 9 组不同数量

的波长(均可由可调谐激光器实现),采用该算法进行对比实验,分别为双波长:635、785 nm;三波长:635、710、785 nm;四波长:635、685、735、785 nm;五波长:635、672、710、747、785 nm;六波长:635、665、695、725、755、785 nm;七波长:635、660、685、710、735、760、785 nm;八波长:635、656、677、700、721、742、764、785 nm;九波长:635、654、673、692、711、730、749、768、785 nm;十波长:635、650、666、681、697、712、728、743、760、785 nm。除此之外,选取的实验对象和实验条件与 3.1 中一致。

图 5 展示了经过 1000 次迭代 9 组算法振幅误差 E 和迭代次数的关系, N' 表示算法中波长数量。在波长数目较少时(如图 5 中波长数目为 2 和 3 时),振幅误差 E 下降缓慢,达到收敛的迭代次数超过 1000;随着波长数目的增加(如图 5 中波长数目为 4~6 时), E 下降明显加快,达到收敛的迭代次数显著减少,最终收敛的迭代次数稳定在 100 次以内(如图 5 中波长数目为 7~10 时),此时收敛时振幅误差 E 趋于恒定达到 10^{-4} 数量级,相位面复原精度 E_{RMS} 值均达到 10^{-3} 数量级。随着波长数目的增加,一次循环所需计算时间也会增加,为验证不同波长条件下该算法实际的收敛时间,定义收敛性能因子 Q ,其表达式为

$$Q = 2(N' - 1)K, \quad (10)$$

式中 K 为收敛时所需迭代次数。9 组算法 Q 值分布情况如图 6 所示:波长数目为 2,超出迭代范围, Q 值超过 15000;随着波长的增加,算法 K 值迅速减小最终稳定在 100 次以内, Q 值迅速下降至最小值后随着波长数目上升逐渐变大。由此可知当波长数目较少时,收敛所需迭代次数 K 为收敛速率的主要影响因子,而随着加速算法波长数目的增加, K 趋于稳定,此时波长数目 N' 逐渐成为收敛速率的主要影响因子。本文所提出的多波长梯度加速相位恢复迭代算法,在 635~785 nm 波段内,当测试波长数量在 7,8 时具有良好收敛性及高精度的相位恢复能力,故根据测试条件选择合适的波长范围以及波长数目,可以最大限度地提高多波长梯度加速相位恢复迭代算法的运算效率,改善其相关性能。

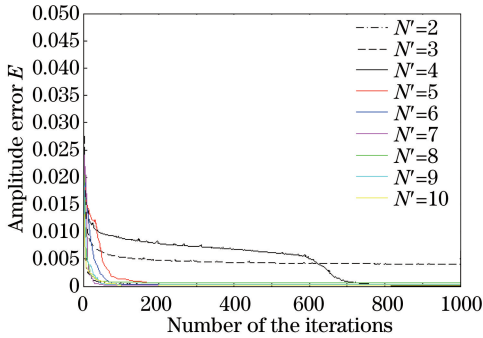


图 5 不同波长数目下 E 和迭代次数的关系
Fig. 5 Relationship between E and the number of iterations under different number of wavelength

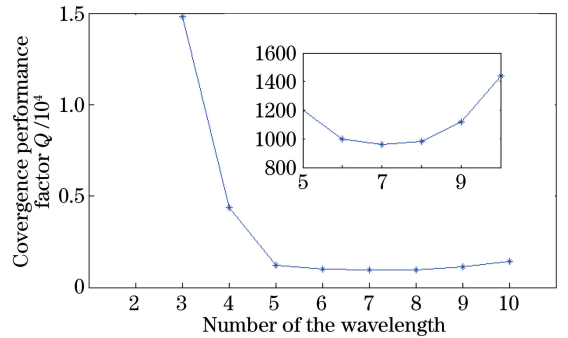


图 6 各组算法达到收敛时表征相位恢复情况的 Q 值
Fig. 6 Value of Q for the phase retrieval when each algorithm achieves convergence

4 结 论

在传统多波长迭代算法的基础上,提出一种多波长梯度加速相位恢复迭代算法。即利用角谱传输理论,构成输入和输出光场间的正、逆向衍射传输过程,将不同波长的光源经过相同光路在固定位置处的探测器所采集到的光场强度信息导入到迭代过程中,通过不同波长输入场与输出场之间相互传输,并引入梯度加速方法,提高了收敛速度,最后恢复出输入面的相位信息。采用该算法在一定条件下对相位分布在 $[-\pi, 0]$ 的输入场进行相位恢复,效果良好,表征复原精度的相对均方根值均达到 10^{-3} 数量级;并与传统多波长迭代算法进行了比较,该加速算法相较于传统算法在收敛速度上提高了 2 倍以上;最后在 635~785 nm 波段内选取多组不同波长数量的入射光,利用多波长梯度加速算法进行对比实验,结果表明该算法当波长数量为 7,8 时具有良好快速的收敛特性及高精度的相位恢复能力。综上所述,多波长梯度加速迭代算法相位恢复能力强,复原精度高,收敛速度快,收敛一致性好,解决了算法迭代不确定性强、容易陷入停滞的问题,且具有实际应用便捷有效的优点。它为复杂光场的相位恢复提供了一种新的方法,可应用于光学检测领域。

参 考 文 献

- [1] Wu Haiyan. Phase retrieval algorithm based on non-interferometry optical field[D]. Hefei: Anhui University, 2012.
吴海燕. 非干涉光场的相位恢复算法研究[D]. 合肥: 安徽大学, 2012.
- [2] Dean B H, Aronstein D L, Smith J S, *et al.* Phase retrieval algorithm for JWST flight and testbed telescope[C]. SPIE, 2006, 6265: 626511.
- [3] Liu Yongfeng, Zhang Minghui, Shen Xia, *et al.* Application of phase retrieval algorithm to quantum correlated diffraction imaging[J]. Acta Optica Sinica, 2007, 27(11): 2075-2081.
刘永峰, 张明辉, 沈 夏, 等. 相位恢复算法在量子关联衍射成像中的应用研究[J]. 光学学报, 2007, 27(11): 2075-2081.
- [4] Mao H, Wang X, Zhao D Z. Application of phase-diverse phase retrieval to wavefront sensing in non-connected complicated pupil optics[J]. Chinese Optics Letters, 2007, 5(7): 397-399.
- [5] Liu Hongzhan, Ji Yuefeng. An ameliorated fast phase retrieval iterative algorithm based on the angular spectrum theory [J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(11): 114203.
刘宏展, 纪越峰. 一种基于角谱理论的改进型相位恢复迭代算法[J]. 物理学报, 2013, 62(11): 114203.
- [6] Guo Junhu. Study of phase retrieval method from intensities of coherent light[D]. Wuhan: Huazhong University of Science & Technology, 2011: 34-40.
郭俊虎. 相干光光强恢复相位的方法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2011: 34-40.
- [7] Wang Xiao, Mao Heng, Zhao Dazun. Phase retrieval based on intensity transport equation[J]. Acta Optica Sinica, 2007, 27(12): 2117-2122.
王 潇, 毛 珩, 赵达尊. 基于光强传播方程的相位恢复[J]. 光学学报, 2007, 27(12): 2117-2122.
- [8] Gerchberg R W, Saxton W O. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures[J]. Optik, 1972, 35(2): 237-246.
- [9] Yang G Z, Gu B Y, Dong B Z. Theory of the amplitude-phase retrieval in an any linear transform system and its applications[J]. International Journal of Modern Physics B, 1993, 7(18): 3153.
- [10] Fienup J R. Phase retrieval algorithms: a comparison[J]. Applied Optics, 1982, 21(15): 2758-2769.
- [11] Xu Ninghan, Tan Qiaofeng, Jin Guofan. Reconstruction of complex wave-front by random binary phase modulation[J]. Chinese J Lasers, 2010, 37(7): 1800-1806.
徐宁汉, 谭峭峰, 金国藩. 利用随机二元纯相位调制重构复杂光场波前[J]. 中国激光, 2010, 37(7): 1800-1806.
- [12] Huang Lixin, Yao Xin, Cai Dongmei, *et al.* A high accuracy and fast iterative algorithm for phase retrieval[J]. Chinese J Lasers, 2010, 37(5): 1218-1221.
黄利新, 姚 新, 蔡冬梅, 等. 一种快速高精度的相位恢复迭代[J]. 中国激光, 2010, 37(5): 1218-1221.
- [13] Noom D W E, Eikema K S E, Witte S. Lensless phase contrast microscopy based on multiwavelength Fresnel diffraction[J]. Optics Letters, 2014, 39(2): 193-196.
- [14] Witte S, Tenner V T, Noom D W E, *et al.* Lensless diffractive imaging with ultra-broadband table-top sources: from infrared to extreme-ultraviolet wavelengths[J]. Light: Science & Applications, 2014, 3(3): e163.
- [15] Bao P, Zhang F C, Pedrini G, *et al.* Phase retrieval using multiple illumination wavelengths[J]. Optics Letters, 2008, 33(4): 309-311.
- [16] Li Junchang. FFT computation of angular spectrum diffraction formula and its application wavefront reconstruction of digital holography[J]. Acta Optica Sinica, 2009, 29(5): 1163-1167.
李俊昌. 角谱衍射公式的快速傅里叶变换计算及在数字全息波面重建中的应用[J]. 光学学报, 2009, 29(5): 1163-1167.
- [17] Goodman J W. Introduction to fourier optics: chap. 3[M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1996.
- [18] Biggs D S C, Andrews M. Acceleration of iterative image restoration algorithms[J]. Applied Optics, 1997, 36(8): 1766-1775.