

Pearcey 光束的光学形态形成及其数学机理研究

任志君^{1,2} 应朝福^{1,2} 陈波² 杨照清²

¹浙江师范大学信息光学研究所, 浙江 金华 321004

²浙江师范大学浙江省光信息检测与显示技术研究重点实验室, 浙江 金华 321004

摘要 基于塞曼突变机构理论,通过求解 Pearcey 光束势函数的临界点方程,发现 Pearcey 光束的光学形态由方程根的数目决定。该临界点方程最多有三个实根,分别对应着三个稳态点和三条衍射光线。选取合适的 Pearcey 光束控制变量,如果三个实根中的两个相等,那么这两个实根对应的两条衍射光线会重叠,进而导致 Pearcey 光束的焦散线形成;如果三个实根全部相等,则会导致 Pearcey 光束光学尖点的形成。该研究不仅揭示了 Pearcey 光束的焦散线及光学尖点形成的数学机理,而且得到了焦散线方程和光学尖点位置。

关键词 物理光学;菲涅耳衍射;Pearcey 光束;突变理论

中图分类号 O436 **文献标识码** A

doi: 10.3788/CJL201643.0905001

Optical Morphogenesis of Pearcey Beams and Its Mathematical Mechanism

Ren Zhijun^{1,2} Ying Chaofu^{1,2} Chen Bo² Yang Zhaoqing²

¹*Institute of Information Optics, Zhejiang Normal University, Jinhua, Zhejiang 321004, China*

²*Zhejiang Provincial Key Laboratory of Optical Information Detecting and Display Technology, Zhejiang Normal University, Jinhua, Zhejiang 321004, China*

Abstract Based on the Zeeman catastrophe machine theory, the critical equation of potential function of Pearcey beams is solved. It is found that the number of roots of the critical equation determines the optical morphogenesis of Pearcey beams. This critical equation has at most three real roots, which correspond to three stable points and three diffraction lines, respectively. By choosing suitable control variables of Pearcey beams, if two of the three real roots are equal, the two corresponding diffraction lines overlap and the caustic line of Pearcey beams is formed. If three real roots are all equal, the optical cusp of Pearcey beams is formed. The study not only clarifies the mathematical mechanism of the generation of caustics and optical cusps of Pearcey beams, but also shows the caustic line equation and the position of the optical cusp.

Key words physical optics; Fresnel diffraction; Pearcey beam; catastrophe theory

OCIS codes 260.1960; 260.6042

1 引言

传统的激光调控主要是通过对激光器谐振腔进行操作,比如选模、稳频、调 Q 及锁模等。而在谐振腔之外控制激光,主要是利用激光光束的变换、调制、偏转等技术手段,其中激光光束的空间传输变换是激光光学的重要研究任务之一^[1]。

在激光束的调控和变换方面,无衍射 Bessel 光束的构造尤为重要^[2]。无衍射光束也称作传输不变光束^[3]。自 1987 年 Bessel 光束发现以来,Bessel 光束(包括高阶 Bessel 光束)在很多研究领域发挥了重要作用,甚至改变了某些研究领域的工作方式^[4-7]。2007 年,实验产生的另一种无衍射光束—Airy 光束(光束分布用 Airy 函数描述),具有横向加速的传输特性^[8]。

收稿日期: 2016-04-28; **收到修改稿日期:** 2016-05-16

基金项目: 国家自然科学基金(11274278,11674288)、浙江省自然科学基金(Y14D050005)

作者简介: 任志君(1974—),男,博士,副教授,主要从事非线性光学和光束的传输与变换方面的研究。

E-mail: renzhijun@zjnu.cn

除了无衍射光束外,另外一类称作形式不变的激光束也值得关注,如 Pearcey 光束^[3]。形式不变是指光束在自由空间传输过程中,虽然其分布受衍射影响发生改变,但整个光束始终能用同一个函数描述。从激光器出射的 Gaussian 光束就是形式不变光束。基于腔外调制产生的 Pearcey 光束,与 Gaussian 光束传输特性非常接近,也是形式不变光束,即在传输过程中,虽然光束分布会改变,但整个光束始终能用 Pearcey 函数描述。产生 Pearcey 光束的方法,最早采用的是相位调制技术^[3],随后是振幅调制技术^[9],2014 年基于虚源法的理论方案被提出^[10]。

对于 Gaussian 光束^[11-12]、Bessel 光束^[13]及 Airy 光束^[14-16],学者们在光束形成的数学机理上给予了详尽阐述。参照文献[14-15]中利用突变理论研究 Airy 光束光学结构的方法,本文研究了 Pearcey 光束独有的光学结构和光学形态,研究结果为深入揭示 Pearcey 光束的光学拓扑结构提供了一定的参考。

2 理 论

经典的波动光学理论是研究激光光学的主要理论基础,数学上体现为求解波动方程或衍射积分方程。直接求解衍射积分方程,实际上就是已知空间某一物面上的场分布 $O(x, y)$,通过一定的数学手段,求到该物面距离为 r 的任意一点的场分布 $u(\xi, \eta, z)$,其中 z 为传输距离。数学表达式为

$$u(\xi, \eta, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O(x, y) \frac{ik}{r} \exp(ikr) dx dy, \quad (1)$$

式中 k 为波数; r 为物点到空间任意一点的距离;当光波为抛物线时, $O(x, y) = \delta(x - y^2/2p)$,其中 $\delta(\cdot)$ 为狄拉克函数, p 为抛物线参数。

在非涅耳衍射区,空间任一点的场分布 $u(\xi, \eta, z)$ 可写为 Pearcey 函数的形式^[9]

$$u(\xi, \eta, z) = \frac{C \exp(ikz) \exp\{i[4p^2(\xi^2 + \eta^2)]\}}{z} \sqrt{2p} \left(\frac{\lambda z}{\pi}\right)^{1/4} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\left[\bar{y}^4 + \sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(2p - 2\xi)\bar{y}^2 + (-2\sqrt{2p})\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right)^{3/4}\eta\bar{y}\right]\right\} d\bar{y}, \quad (2)$$

式中 $\bar{y}^4 = \frac{\pi}{4p^2\lambda z}y^4$ 为归一化处理, λ 为波长, C 为常数。

设

$$\begin{cases} \Phi = \bar{y}^4 + a\bar{y}^2 + b\bar{y} \\ a = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(2p - 2\xi) \\ b = -2\sqrt{2p}\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right)^{3/4}\eta \end{cases}, \quad (3)$$

参照突变理论的定义^[17-18],把 Φ 定义为 Pearcey 光束的势函数。

(2)式中含有传输距离 z ,因此,在传输过程中,光束分布 $u(\xi, \eta, z)$ 会随传输距离 z 的改变而改变。但在非涅耳衍射区不论传输距离 z 如何变化,抛物线光环衍射后形成的光束始终能用(2)式所描述的 Pearcey 函数描述,显然是一种形式不变光束。在激光原理中,有类似传输特性的光束称作自相似传输光束^[19]。例如,激光器基横模输出的 Gaussian 光束,既称作横向场分布的自再现模^[19],也称作形式不变光束^[3]。形式不变光束和激光的自再现模,二者在实质上是等价的,其区别在于前者是外调制产生的激光传输模式,后者是谐振腔内调制产生的激光传输模式。

3 Pearcey 光束结构的突变理论

突变理论是 20 世纪 70 年代创立的研究奇点结构的数学理论,奇点对应物理现象或形态的突变性或不连续性^[17-18]。(3)式中 Pearcey 光束表达式的势函数 Φ 与突变理论中的塞曼突变机构势函数的表达式相同。

突变理论中塞曼突变机构的势函数 $V(x) = x^4 + ux^3 + vx$,由位置变量 x 和控制变量 u, v 确定^[17-18]。

根据临界点理论,对于确定的 (u, v) ,势函数的临界点满足 $V'(x)=0$,临界点根的数目决定了势函数稳态点的数目,由控制变量 $u、v$ 确定。

采用突变理论研究 Airy 光束折迭结构,可很好地揭示其光学形态的数学本性^[14-16]。事实上,具有奇异光学特性的 Airy 光束和 Pearcey 光束,其数学表达式中与虚部 i 相乘的项分别为三次方程和四次方程,分别对应突变理论中势函数的折迭和尖点结构^[16-18]。下面把突变理论中用于研究塞曼突变机构的方法用于 Pearcey 光束的研究。同样的办法也曾被用于研究 Gaussian 光束的光束结构^[11-12]。

Pearcey 光束势函数的临界点方程为

$$4\bar{y}^3 + 2a \cdot \bar{y} + b = 0. \tag{4}$$

文献[17-18]指出,势函数的临界点方程的每个实根对应一个稳态点及相应的一条衍射线^[20]。对于 Pearcey 光束的势函数,临界点方程(4)式最多有三个实根,三个实根分别对应三个稳态点及三条衍射线,实根的数目取决于(4)式的判别式。文献[14-18]指出,如果临界点方程的三个实根中有两个实根相等,则实根相等的两条衍射线重叠成一条焦散线;如果三个实根全部相等,则这三条衍射线中,两两衍射线间可形成两条焦散线,而两条相切的焦散线会形成一个光学尖点。(4)式也称作 Cardan 方程,Cardan 方程的三个根分别为^[21]

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = \left\{ \left[\left(\frac{b}{8} \right)^2 + \left(\frac{a}{6} \right)^3 \right]^{1/2} - \frac{b}{8} \right\}^{1/3} + \left\{ - \left[\left(\frac{b}{8} \right)^2 + \left(\frac{a}{6} \right)^3 \right]^{1/2} - \frac{b}{8} \right\}^{1/3} \\ \bar{y}_2 = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left\{ \left[\left(\frac{b}{8} \right)^2 + \left(\frac{a}{6} \right)^3 \right]^{1/2} - \frac{b}{8} \right\}^{1/3} + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \left\{ - \left[\left(\frac{b}{8} \right)^2 + \left(\frac{a}{6} \right)^3 \right]^{1/2} - \frac{b}{8} \right\}^{1/3} \\ \bar{y}_3 = \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \left\{ \left[\left(\frac{b}{8} \right)^2 + \left(\frac{a}{6} \right)^3 \right]^{1/2} - \frac{b}{8} \right\}^{1/3} + \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left\{ - \left[\left(\frac{b}{8} \right)^2 + \left(\frac{a}{6} \right)^3 \right]^{1/2} - \frac{b}{8} \right\}^{1/3} \end{cases} \tag{5}$$

对于 Pearcey 光束的势函数,临界点方程(4)式的实根的数目由其判别式 $\Delta = \left(\frac{b}{8} \right)^2 + \left(\frac{a}{6} \right)^3$ 确定^[21]。

把(3)式代入判别式,有

$$\Delta = (\pi/\lambda z)^{3/2} [p\eta^2/8 + (p - \xi)^3/27], \tag{6}$$

当判别式 $\Delta=0$ 时,得到

$$\eta = \sqrt{8/27p} (\xi - p)^{3/2}. \tag{7}$$

(7)式为半立方抛物线的表达式。根据判决式进行分区,不同区域的势函数及对应临界点方程根数目如图 1 所示,其中粗线表示判决式。

在 $\Delta>0$ 的区域,即在 Pearcey 光束半立方抛物线外面的所有区域,此时(4)式有两个共轭复根和一个实根,意味着 Pearcey 光束①区域只有一条光线,因而该区域的光强较弱,如图 2 所示。

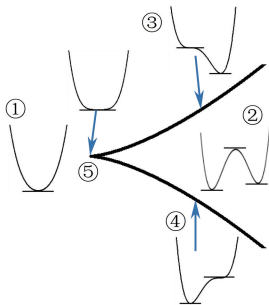


图 1 Pearcey 光束的势函数示意图

Fig. 1 Schematic diagram of potential function of Pearcey beams

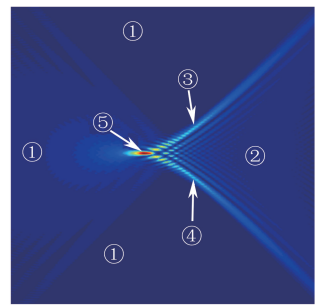


图 2 Pearcey 光束

Fig. 2 Pearcey beams

在 $\Delta<0$ 的区域,即在半立方抛物线内的区域,此时(4)式有三个不等的实根,意味着这一区域有三条光线。Pearcey 光束半立方抛物线内②区域的光强要明显强于半立方抛物线外①区域的光强。

在 $\Delta=0$ 的半立方抛物线上,临界点方程的三个实根中有两个实根相等,实根相等对应的两条衍射线重

叠,因而半立方抛物线③、④处的光强很强,即为 Pearcey 光束的焦散线。突变理论中常提到的英文单词 caustic,类似于英文单词 burning 的含义^[22],意指燃烧的,特指光线最集中的区域。因此文献[9]中利用微分几何理论推导的焦散线方程,实际上是势函数的临界点方程的判别式方程(即 $\Delta=0$)。焦散线上的光强极强是因为两个稳定点对应的两条衍射线相互重叠。在文献[3]中,Pearcey 光束的焦散线被形象地称作 Pearcey 光束的双臂。事实上,Pearcey 光束的双臂正是(7)式所示的半立方抛物线。焦散线与传输距离 z 无关,即在 Pearcey 光束传输过程中,焦散线位置始终不变。

当 $\Delta=0$ 时,还有一种特殊情况,即 $a=b=0$ (对应 $\xi=p, \eta=0$)。此时,临界点方程三个实根全部相等,均为 0。这三条衍射线中,两两衍射线间可形成两条焦散线(半立方抛物线),而两条相切的焦散线在 $(p, 0)$ 处会重叠形成一个突变的尖拐点,即光学尖点。Pearcey 光束的光学尖点,是整个光束光强最大的地方,这是因为 Pearcey 光束的两条焦散线在尖拐点处重合。在图 1 中,①区域和⑤区域临界点方程均只有一个根,含义却是完全不同的:①区域是临界点方程只有一个实根(另外两个是虚根),而⑤区域是一个三重实根,即三个实根重叠为一个根。

利用塞曼突变机构理论得到的(7)式,与文献[3,9]中利用微分几何理论得到的焦散线的结果一致。这说明利用突变理论研究 Pearcey 光束的光学结构是可行的,在文献[3,9]中,利用微分几何理论可以得到 Pearcey 光束的焦散线表达式,但不能解释 Pearcey 光束焦散线处光强明显强于其他区域、半立方抛物线的尖点处光强最强的现象。利用突变理论,并结合几何光学中光线的观点^[20],能很好地揭示 Pearcey 光束独有光学结构的产生机理。

4 结 论

作为一种新型传输不变光束,Pearcey 光束具有奇异的光学特性。基于突变理论揭示了 Pearcey 光束独有光学结构的数学本性。通过求解 Pearcey 光束势函数的临界点方程,发现临界点方程根的数目决定了 Pearcey 光束的光学结构,对应着相应数目的稳态点及衍射线。临界点方程根的数目由判别式决定,当判别式大于 0 时,临界点方程只有一个实根,对应 Pearcey 光束光强最弱的区域;当判别式小于 0 时,临界点方程有三个不等的实根,对应着 Pearcey 光束光强较强的区域;当判别式等于 0 时,临界点方程的三个实根中,若两个实根相等,则实根相等的两条衍射线重叠形成 Pearcey 光束的焦散线;若临界点方程的三个实根全部相等,则会形成 Pearcey 光束的光学尖点,相应可得到 Pearcey 光束的光学尖点位置。研究结果为深入认识 Pearcey 光束独有的光学形态提供了一定的参考。

参 考 文 献

- 1 Lü Baida. Laser optics[M]. Chengdu: Sichuan University Press, 1992.
吕百达. 激光光学[M]. 成都: 四川大学出版社, 1992.
- 2 Durnin J, Miceli J J, Jr, Eberly J H. Diffraction-free beams[J]. Phys Rev Lett, 1987, 58(15): 1499-1501.
- 3 Ring J D, Lindberg J, Mourka A, *et al.* Auto-focusing and self-healing of Pearcey beams[J]. Opt Express, 2012, 20(17): 18955-18966.
- 4 Lorensen D, Singe C C, Curatolo A, *et al.* Energy-efficient low-Fresnel-number Bessel beams and their application in optical coherence tomography[J]. Opt Lett, 2014, 39(3): 548-551.
- 5 Yan Z, Jureller J E, Sweet J, *et al.* Three-dimensional optical trapping and manipulation of single silver nanowires[J]. Nano Lett, 2012, 12(10): 5155-5161.
- 6 Wu Pinghui, Huang Wenhua. Theoretical analysis of quasi-Bessel beams for laser micromachining[J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(s1): s102002.
吴平辉, 黄文华. 准贝塞尔光束在激光微加工中的理论分析[J]. 中国激光, 2014, 41(s1): s102002.
- 7 Zhou Zhaoxian, Hu Minglie, Zhou Yuzhu, *et al.* Broadband spectrum Bessel beams directly output from a photonic crystal fiber[J]. Chinese J Lasers, 2015, 42(3): 0302001.
周钊贤, 胡明列, 周雨竹, 等. 光子晶体光纤直接产生超连续贝塞尔光束[J]. 中国激光, 2015, 42(3): 0302001.
- 8 Siviloglou G A, Broky J, Dogariu A, *et al.* Observation of accelerating Airy beams[J]. Phys Rev Lett, 2007, 99(21): 213901.

- 9 Ren Z J, Ying C F, Jin H Z, *et al.* Generation of a family of Pearcey beams based on Fresnel diffraction catastrophes[J]. *Journal of Optics*, 2015, 17(10): 105608.
- 10 Deng D M, Chen C D, Zhao X, *et al.* Virtual source of a Pearcey beam[J]. *Opt Lett*, 2014, 39(9): 2703-2706.
- 11 Keller J B, Streifer W. Complex rays with an application to Gaussian beams[J]. *J Opt Soc Am*, 1971, 61(1): 40-43.
- 12 Deschamps G A. Gaussian beam as a bundle of complex rays[J]. *Electron Lett*, 1971, 7(23): 684-685.
- 13 Hernández-Figueroa H E, Zamboni-Rached M, Recami E. *Localized waves*[M]. New York: John Wiley & Sons Press, 2007.
- 14 Kaganovsky Y, Heyman E. Wave analysis of Airy beams[J]. *Opt Express*, 2010, 18(8): 8440-8452.
- 15 Kaganovsky Y, Heyman E. Nonparaxial wave analysis of three-dimensional Airy Beams[J]. *J Opt Soc Am A*, 2012, 29(5): 671-688.
- 16 Vallée O, Soares M. *Airy functions and applications to physics*[M]. London: Imperial College Press, 2004.
- 17 Saunders P T. *An introduction to catastrophe theory*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
- 18 Poston T, Stewart I. *Catastrophe theory and its applications*[M]. New York: Dover Publications, 1978.
- 19 Chen Jiabi, Peng Runling. *Principle and application of laser* [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2004.
陈家碧, 彭润玲, *激光原理及应用*[M]. 北京: 电子工业出版社, 2004.
- 20 Born M, Wolf E. *Principles of optics* [M]. Yang Jiasun, Transl. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2009.
波恩, 沃耳夫. *光学原理*[M]. 杨葭荪, 译. 北京: 电子工业出版社, 2009.
- 21 Wang Zhuxi, Guo Dunren. *Introduction to special functions*[M]. Beijing: Beijing University Press, 2000.
王竹溪, 郭敦仁. *特殊函数概论*[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.
- 22 Nye J F. *Natural focusing and fine structure of light: Caustics and wave dislocations*[M]. Boston: CRC Press, 1999.