

# 非均匀湍流路径下光束分层传输缩比实验研究

邵文毅<sup>1,2,3</sup> 鲜浩<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>中国科学院自适应光学重点实验室, 四川 成都 610209

<sup>2</sup>中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209

<sup>3</sup>中国科学院大学, 北京 100049

**摘要** 在非均匀湍流路径光束传输的研究中, 设置合理的相位屏位置分布和数目尤为关键。在多层相位屏模型的基础上, 建立了非均匀湍流路径下大气分层优化模型, 结合两层相位屏的光束传输算例, 在 Hufnagel-Valley 5/7 大气湍流廓线模型下, 分别计算了相应的大气离散分层边界与相位屏的最优分布位置, 并引入相应的最大 Rytov 判据。根据等菲涅耳数、等湍流效应和几何尺度缩比原则, 计算了具体光束传输缩比实验参数, 对比分析了光强起伏概率密度分布和相位结构函数的理论与实验值。研究表明: 不同天顶角下光强起伏概率密度分布实验拟合与理论曲线整体分布趋势一致, 且呈现出对数正态分布的趋势; 光强起伏的经验累积分布实验与理论曲线趋势保持一致, 说明概率密度分布曲线拟合程度较好; 而在所关注的低频区域, 相位结构函数的实验曲线与理论曲线虽然存在一定的偏差, 但其整体趋势仍然保持一致, 且近似服从 5/3 幂律规律。

**关键词** 大气光学; 非均匀湍流; 光传输; 等菲涅耳数; 缩比原则

中图分类号 TN929.12

文献标识码 A

doi: 10.3788/CJL201643.0805001

## Reduced-Scale Experiment of Beam Propagation Under Multilayer Atmosphere Model Along Inhomogeneous Turbulent Path

Shao Wenyi<sup>1,2,3</sup> Xian Hao<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Key Laboratory on Adaptive Optics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China

<sup>2</sup>Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China

<sup>3</sup>University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

**Abstract** To set the reasonable position distribution and the number of phase screens are crucial in the research on beam propagation along inhomogeneous turbulent path. A multilayer atmospheric optimization model is constructed based on the multilayer phase-screen model. Combined with an example of light propagation in two-layer phase-screen model, both the boundary of atmospheric layers and the optimal position of phase screen are calculated under the condition of Hufnagel-Valley 5/7 atmospheric turbulence profile model. And the maximization of Rytov criterion in the two-layer phase screen model is introduced as well. The specific experimental parameters of the above-mentioned model are calculated according to the principles of equal Fresnel number, equal turbulence effect and reduced-scale principle. The experimental and the theoretical data on the probability density distribution of intensity fluctuation and the phase structure function are compared and analyzed. The results show that the trend of intensity fluctuation under different zenith angles is consistent with the lognormal distribution, and the empirical cumulative distribution function of intensity fluctuation in the experiment agrees basically with theoretical results, which indicates that the curve of its probability density distribution has a good fit degree. Although some errors exist in the phase structure functions between test results and theoretical calculation results in the low frequency region, it can be seen that the structure function still approximates a 5/3 power law.

收稿日期: 2016-03-08; 收到修改稿日期: 2016-04-25

基金项目: 国家自然科学基金(61308082)

作者简介: 邵文毅(1991—), 男, 硕士研究生, 主要从事自适应光学方面的研究。E-mail: shaoweni13@hotmail.com

导师简介: 鲜浩(1969—), 男, 博士, 研究员, 博士生导师, 主要从事自适应光学及大口径望远镜方面的研究。

E-mail: xianhao@ioe.ac.cn(通信联系人)

**Key words** atmospheric optics; inhomogeneous turbulence; light propagation; equal Fresnel number; reduced-scale principle

**OCIS codes** 010.1330; 010.1300; 010.1290

# 1 引 言

光波在大气湍流中传播时,湍流效应会引起光波的振幅和相位随机变化,从而产生光强闪烁、波面畸变和到达角起伏等现象,这给望远镜成像、大气光传输等应用带来了很大的影响<sup>[1-5]</sup>。在研究大气湍流光传输规律时,常采用多层相位屏模型,即将连续大气随机介质分成一系列间隔分布的薄相位屏。当光波传播到一个相位屏时,相应湍流相位扰动将会叠加到光波波前,然后经过真空传播到下一个相位屏,此过程重复直至结束<sup>[6-7]</sup>。针对大气湍流强度均匀的光传输路径,相位屏的间隔分布一般为等间隔,而对于地-空大气光传输,其传输路径上湍流强度不均匀,相位屏等间隔分布的设置将会使弱起伏区过度采样而强起伏区欠采样<sup>[8]</sup>。此外,在大气光传输数值模拟研究中,相位屏的数目设置过多会使相应数值计算复杂耗时,而对于实验研究而言,相位屏的数目设置过多则会增加实验系统的复杂性和预算。因此,对于非均匀湍流路径上的光传输研究,相位屏位置分布和数目的设置至关重要。与大气光传输数值模拟研究不同,由于实际器件尺寸和特性的限制,相应的室内实验研究不能随意设置传输距离和望远镜口径等参数,需要对实际的光传输原型进行缩比。为了保证缩比实验的正确性,合理选择原则或判据尤为关键。

本文在多层相位屏模型的基础上,建立了针对不同天顶角的多层相位屏的位置分布模型,给出了非均匀湍流路径上大气分层优化条件。以两层相位屏模型为例,在 Hufnagel-Valley 5/7(简称 H-V5/7)大气湍流廓线模型下,计算了大气离散分层边界与相位屏的最优分布位置,给出了光束传输缩比原则和最大 Rytov 判据,并据此计算出两层相位屏模型的实验参数。从光强起伏概率密度分布(PDF)和相位结构函数两个统计特性出发,分析实验值与理论值,验证了相应光强和相位变化的统计特性的正确性,证明了上述光束传输缩比实验的可行性和有效性。

# 2 理论分析

## 2.1 非均匀湍流路径上大气分层优化

为了便于描述,将整层连续大气分为  $i$  层,每层大气用湍流相位屏来表征,如图 1 所示。以第 3 层大气为例,图中绿线  $AB$  表示光线的实际传播路径,红线  $A_1B_1$  表示光线近似传播路径, $\theta$  为天顶角, $h_1$ 、 $h_2$  及  $h_3$  分别表示相应相位屏的位置, $H_0$ 、 $H_1$ 、 $H_2$ 、 $H_3$  和  $H_i$  分别表示各层大气离散层的边界位置。

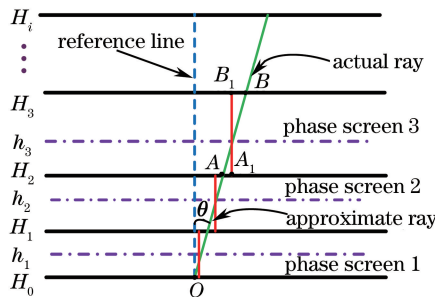


图 1 多层大气相位屏模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the multilayer atmospheric phase-screen model

此模型下,天顶角在较小的范围内,且近似地假定折射率结构常数是水平均匀的,则近似光束和实际光束之间的相位差可表示为<sup>[9-10]</sup>

$$\Delta\phi = \tilde{\phi} - \phi = k \sum_{i=1}^N \int_{H_{i-1}}^{H_i} [\tilde{n}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}h, h) - n(\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}h, h)] dh, \quad (1)$$

式中  $k = 2\pi/\lambda$  为波数;  $n(\mathbf{x}, h)$  代表实际光线在位置为  $\mathbf{x}$ 、高度为  $h$  处大气的折射率;  $\tilde{n}(\mathbf{x}, h)$  为近似光线所在对应位置的折射率;  $H_{i-1}$  为第  $i$  层湍流层的下边界位置,  $H_i$  为上边界位置;  $\phi$  和  $\tilde{\phi}$  分别为实际光束和近

似光束经过大气后在孔径平面上的累积相位起伏。

由于每层大气用相应的相位屏来表征,因此每层折射率起伏效应都集中在相位屏上,则

$$\bar{n}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}h, h) = \delta(h - h_i) \int_{H_{i-1}}^{H_i} n(\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}h, h) dh, \quad (2)$$

式中  $h_i$  为相应的相位屏位置;  $\delta(h)$  为狄拉克函数,具有以下性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(h) \delta(h - h_i) dh = f(h_i), \quad (3)$$

因此,(2)式可进一步变换为

$$\bar{n}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}h, h) = n(\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}h_i, h), \quad (4)$$

对(4)式两边进行积分,积分上、下限分别为  $H_i$  和  $H_{i-1}$ ,可得

$$\int_{H_{i-1}}^{H_i} \bar{n}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}h, h) dh = \int_{H_{i-1}}^{H_i} n(\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}h_i, h) dh, \quad (5)$$

联立(1)和(5)式,可得

$$\Delta\phi = k \cdot \sum_{i=1}^N \int_{H_{i-1}}^{H_i} [n(\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}h_i, h) - n(\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}h, h)] dh, \quad (6)$$

则它们之间相位起伏的方差为

$$\sigma_\phi^2 = \langle (\bar{\phi} - \phi)^2 \rangle = k^2 \sum_{i=1}^N \langle \left\{ \int_{H_{i-1}}^{H_i} [n(\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}h_i, h) - n(\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}h, h)] dh \right\}^2 \rangle. \quad (7)$$

对于 Kolmogorov 湍流,相位结构函数满足<sup>[11]</sup>

$$D_\phi(\Delta\mathbf{x}) = k^2 \langle \left\{ \int_h^{h+\Delta h} [n(\mathbf{x}, h) - n(\mathbf{x} - \Delta\mathbf{x}, h)] dh \right\}^2 \rangle, \quad (8)$$

其中  $|\Delta\mathbf{x}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ , 表示两点之间的距离。对于平面波,相位结构函数为<sup>[11]</sup>

$$D_\phi(\Delta\mathbf{x}) = 6.88 \left( \frac{|\Delta\mathbf{x}|}{r_0} \right)^{5/3}, \quad (9)$$

式中  $r_0$  为针对平面波形式的大气相干长度。将(8)、(9)与(7)式联立,结合大气相干长度(平面波)定义式,可得

$$\sigma_\phi^2 = 2.91k^2 |\boldsymbol{\theta}|^{5/3} \sum_{i=1}^N \int_{H_{i-1}}^{H_i} C_n^2(h) |h - h_i|^{5/3} dh, \quad (10)$$

式中  $C_n^2(h)$  为结构折射率函数。

要使离散后的大气与实际的大气湍流效应接近,实际光束与近似光束之间累积相位起伏的方差越小越好,因此需要对(10)式分别对  $h_i$  和  $H_i$  求导并置零,即可推导出离散层湍流边界和相位屏位置所遵循的优化条件,即

$$\int_{H_{i-1}}^{h_i} C_n^2(h) (h_i - h)^{2/3} dh = \int_{h_i}^{H_i} C_n^2(h) (h - h_i)^{2/3} dh, \quad (11)$$

$$H_i = (h_i + h_{i+1}) / 2. \quad (12)$$

然而对于天顶角  $\boldsymbol{\theta}$  较大的情况(如光束斜程传输),如图 2 所示,需要对上述迭代出的相位屏位置进行修正,图中  $h_1, h_2$  和  $h_i$  分别是按上述方法求得的相位屏位置,  $h'_1, h'_2$  和  $h'_i$  (指在斜程方向上的相位屏位置)分别为重新修正后的相位屏位置,即

$$h'_i = h_i / \cos |\boldsymbol{\theta}|. \quad (13)$$

在一定大气湍流廓线模型  $C_n^2(h)$  条件下,选用 H-V5/7 大气湍流廓线模型,通过给定边界值  $H_0 = 0, H_N = L_0$  ( $L_0$  为传输距离,  $N$  为分层数),结合(11)、(12)和(13)式即可迭代求出每层大气边界和最优相位屏的位置。图 3 给出了实际光束和近似光束之间相位起伏方差与大气分层数的关系 ( $\Lambda = 2.91k^2 |\boldsymbol{\theta}|^{5/3}$ ),随着分层数  $N$  的增加,相位起伏方差逐渐减小;当分层数  $N=2$ ,相位起伏方差下降的速率最明显。因此,在保证一定的离散大气分层模型精度的条件下,将大气分为 2,3,4 层是比较合理的。

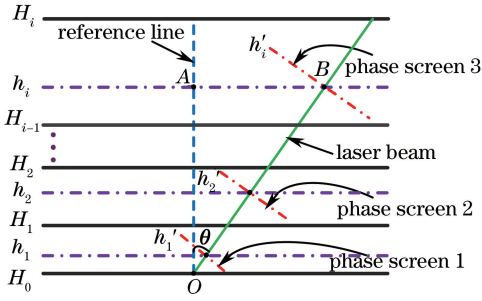


图 2 天顶角较大时相位屏分布位置修正  
Fig. 2 Modification of the positions of phase screens under large zenith angles

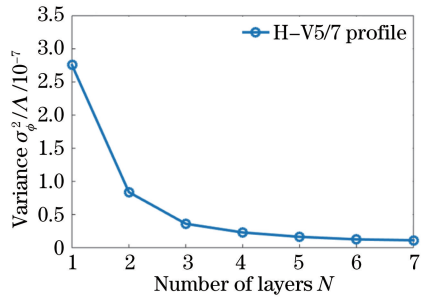


图 3 波前相位起伏方差与分层数的关系  
Fig. 3 Relationship between wavefront phase fluctuation variance and number of layers

由此,将整层连续大气分为 2 个等效离散层,采用 H-V5/7 大气湍流廓线模型,通过上述迭代计算,得到了不同天顶角下相应相位屏的实际位置,如图 4 中红色三角形所示,而图中绿色实线为每层的上边界位置。

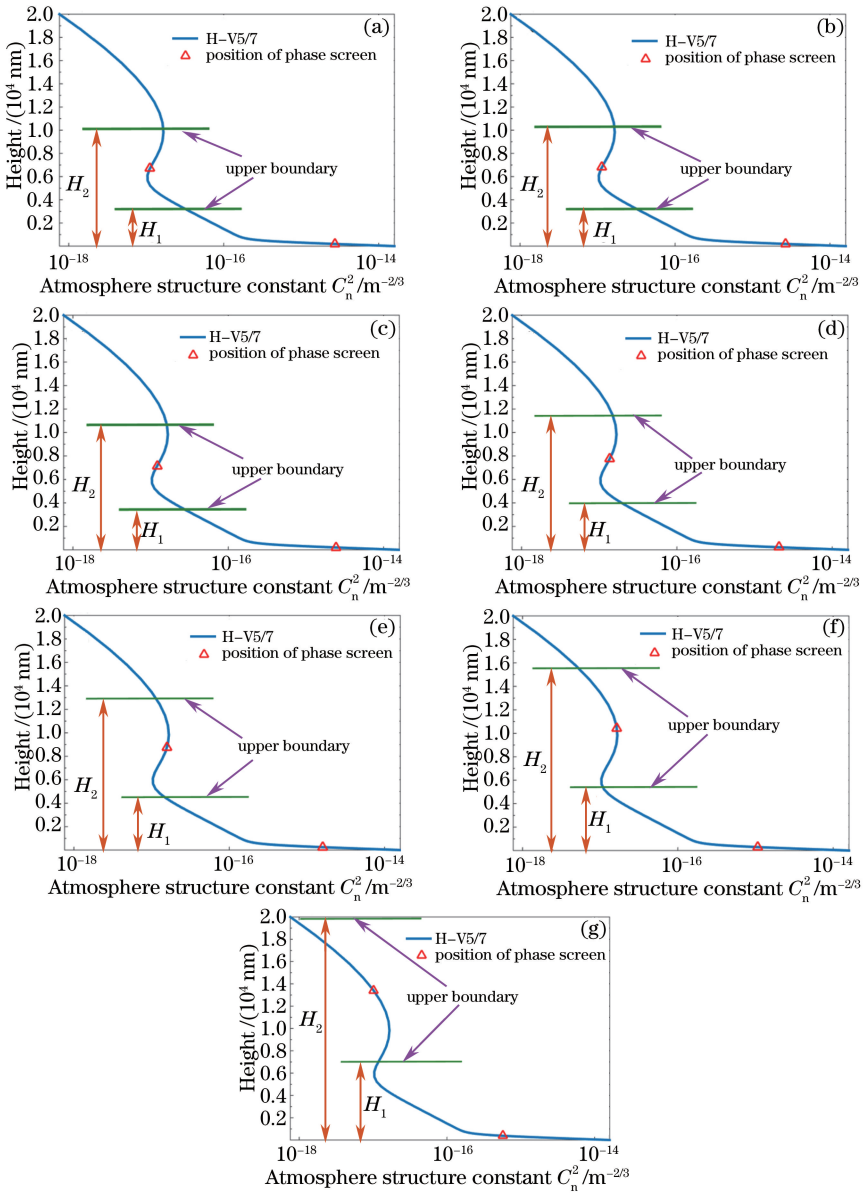


图 4 不同天顶角下两层大气相位屏模型的相位屏位置分布。  
Fig. 4 Position distributions of phase screen in two-layer atmospheric phase-screen model under different zenith angles.

(a) 0°; (b) 10°; (c) 20°; (d) 30°; (e) 40°; (f) 50°; (g) 60°

表 1 列出了在不同天顶角下两层大气相位屏模型的相位屏位置  $h_i$ 、每层大气的等效厚度  $\Delta h_i$  及相应大气相干长度  $r_i$  的计算值。对于两层离散相位屏表征的总等效大气长度可表示为

$$r_{0c} = (r_1^{-5/3} + r_2^{-5/3})^{-3/5}. \quad (14)$$

表 1 不同天顶角下两层大气相位屏模型的相位屏位置和离散层大气边界

Table 1 Positions of phase screens and boundary of discrete layer in two-layer atmospheric phase-screen model under different zenith angles

Zenith angle $ \theta /(\circ)$	Phase screen 1 /m			Distance $L_0$ /m	Phase screen 2 /m			$r_0$ /cm
	$h_1$	$\Delta h_1$	$r_1$		$h_2$	$\Delta h_2$	$r_2$	
0	192	3445	0.0520	10000	6698	6555	0.3311	5.07
10	195	3498	0.0515	10154	6801	6656	0.3281	5.02
20	204	3666	0.0501	10642	7128	6976	0.3190	4.88
30	222	3978	0.0477	11547	7734	7569	0.3037	4.65
40	251	4497	0.0443	13054	8744	8557	0.2822	4.32
50	299	5359	0.0399	15557	10420	10198	0.2540	3.89
60	384	6890	0.0343	20000	13396	13110	0.2184	3.34

## 2.2 两层大气相位屏模型的最大 Rytov 判据

对于每层湍流相位屏大气相干长度的计算离散和形式为<sup>[12]</sup>

$$r_i = (0.423k^2 C_{ni}^2 \Delta h_i)^{-3/5}, \quad (15)$$

式中  $C_{ni}^2$  为离散后的大气折射率结构常数值,  $k$  为波数。

对于平面波, 其对数幅度起伏方差 (Rytov 参量) 的计算离散和形式为<sup>[12]</sup>

$$\sigma_\chi^2 = 0.563k^{7/6} L_0^{5/6} \sum_{i=1}^N C_{ni}^2 \left(1 - \frac{h_i}{L_0}\right)^{5/6} \Delta h_i. \quad (16)$$

将(15)式变换后代入(16)式, 可得

$$\sigma_\chi^2 = 1.33k^{-5/6} L_0^{5/6} \sum_{i=1}^N r_{0i}^{-5/3} \left(1 - \frac{h_i}{L_0}\right)^{5/6}. \quad (17)$$

当利用两个相位屏来表征大气湍流时, 其等效大气相干长度可由(14)式计算。对于特定的应用场合, 波数  $k$ 、传播距离  $L_0$  及两个相位屏的位置  $h_1$  和  $h_2$  都可以视作确定值, 因此当  $r_1$  和  $r_2$  同时取最小值时,  $\sigma_\chi^2$  可以取最大值, 即最大 Rytov 参量为

$$\sigma_{\chi_{\max}}^2 = 1.33k^{-5/6} r_{i\min}^{-5/3} L_0^{5/6} \left[ \left(1 - \frac{h_1}{L_0}\right)^{5/6} + \left(1 - \frac{h_2}{L_0}\right)^{5/6} \right]. \quad (18)$$

对(18)式进行变形, 可得

$$\sigma_{\chi_{\max}}^2 \left[ \frac{r_{i\min}^{5/3}}{(L_0 \cdot \lambda)^{5/6}} \right] = 1.33 (2\pi)^{-5/6} \left[ \left(1 - \frac{h_1}{L_0}\right)^{5/6} + \left(1 - \frac{h_2}{L_0}\right)^{5/6} \right]. \quad (19)$$

从(19)式可以看出, 最大的 Rytov 参量与  $r_{i\min}$ 、传播距离  $L_0$ 、波长  $\lambda$  及两个相位屏的位置  $h_1$  和  $h_2$  有关。由于 Rytov 参量  $\sigma_\chi^2$  与归一化光强起伏  $\sigma_I^2$  存在一定关系<sup>[13]</sup>

$$\sigma_I^2 = \exp(4\sigma_\chi^2) - 1 \cong 4\sigma_\chi^2, \quad (20)$$

因此(19)式也提供了初步估算归一化光强起伏值的数学依据。从图 5 可以看出, 当两个湍流相位屏都越靠

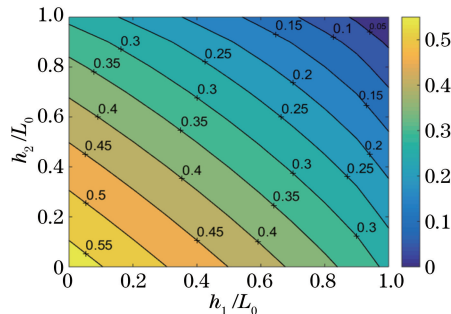


图 5 两层大气相位屏模型的最大 Rytov 参量分布

Fig. 5 Maximization of Rytov parameter in two-layer atmospheric phase-screen model

近传播路径的始端时,其 Rytov 参量取值越大,相对应的归一化光强起伏也越大。

### 2.3 光束传输缩比实验原则

由于实际光束传输距离比较远,实验中往往需要对系统口径、距离等参数进行必要的缩放。在缩比实验中,光束从光源出发,经过一系列的透镜,最后达到接收平面,此时,光传播的过程可以看成是一个远场衍射过程。描述衍射的一个重要参量是非涅耳数,为了保证缩比实验与实际系统原型的非涅耳数相等,需要遵循等非涅耳数原则。光束传输过程中的非涅耳数满足

$$N_F = D_s^2 / 4\lambda L_0, \quad (21)$$

式中  $D_s$  为系统口径。

由于涉及光束在湍流路径上的传播过程,为了保证湍流效应的一致性,需要保证前后  $D_s/r_0$  相等。当涉及多层湍流相位屏时,还需要保证相位屏位置几何缩放尺度满足

$$\beta_i = h_i / L_0, \quad (22)$$

式中  $h_i$  为实际大气离散后的各层湍流相位屏的位置。

## 3 实验参数和方案选择

这里以光源波长  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ 、系统口径  $D_s = 1.25 \text{ m}$ 、大气湍流廓线模型 H-V5/7 为原型,搭建相应的光束缩比实验。如图 6 所示,实验装置由 He-Ne 激光光源、光阑、旋转式湍流相位屏、CMOS 相机、缩束装置和 Hartmann-Shack(H-S)波前传感器等部分组成。He-Ne 激光束口径  $\Phi_1 = 50 \text{ mm}$ ; CMOS 相机型号为 Baumer TXG03,像素尺寸为  $7.4 \mu\text{m} \times 7.4 \mu\text{m}$ ,分辨率为  $656 \times 494$ ;旋转式湍流相位屏采用 Lexitek 伪随机数相位屏,旋转式相位屏 1 和 2 相应的大气相干长度分别为  $r_1 = 0.5 \text{ mm}$  和  $r_2 = 0.8 \text{ mm}$ ;H-S 波前传感器子孔径数为  $12 \times 12$ ,有效通光口径  $\Phi_2 = 5 \text{ mm}$ 。

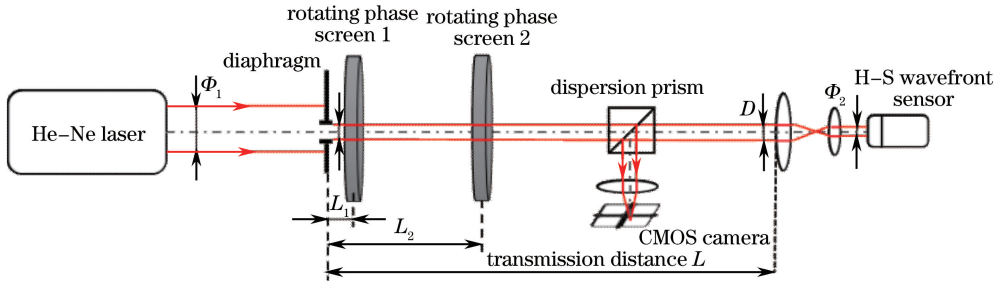


图 6 两层大气相位屏模型实验示意图

Fig. 6 Schematic diagram of two-layer atmospheric phase-screen model in experiment

图 6 中  $L_1$ 、 $L_2$  为缩放后相位屏的实验位置, $L$  为缩放后的传输距离, $D$  为缩束后的光束口径。实验系统采用两个旋转式湍流相位屏来模拟两层大气相位屏模型,同时,实验系统中的两个相位屏组合的等效相干长度  $r'$ 。按(14)式计算,值为  $0.4 \text{ mm}$ 。考虑到实验系统中 H-S 波前传感器入瞳直径  $\Phi_2 = 5 \text{ mm}$ ,为便于实验系统的搭建,其缩放后的实验系统口径应为  $\Phi_{H-S}$  的整数倍。这里选择  $D = 2\Phi_2 = 10 \text{ mm}$ ,按 2.3 节光束传输缩比原则,计算出相应的实验参数如表 2 所示。

表 2 不同天顶角下两层大气相位屏模型原型参数与缩比后实验参数

Table 2 Prototype and experimental parameters of two-layer atmospheric phase-screen model under different zenith angles

Zenith angle $ \theta  / (^\circ)$	Prototype parameter / m			$N_F$	Experimental parameter / cm		
	$h_1$	$h_2$	$L_0$		$L_1$	$L_2$	$L$
0	191	6698	10000	61.7	1	42.9	64.0
10	195	6801	10154	60.8	1.25	44.0	64.9
20	204	7128	10642	58.0	1.30	45.5	68.1
30	222	7734	11547	53.5	1.42	49.6	73.9
40	251	8744	13054	47.3	1.62	56.2	83.6
50	299	10420	15557	39.7	1.92	67.0	99.6
60	384	13396	20000	30.9	2.46	85.7	128.0

## 4 实验验证及分析

当光束在大气湍流中传输时,光强和相位将会随时间变化而产生随机起伏,但其变化特性符合一定的统计特性。为了进一步验证上述非均匀湍流路径上相位屏放置方案以及相应光束传输缩比方案的正确性,从光强起伏的 PDF 和相位结构函数两个角度来进行验证。

### 4.1 光强起伏统计特征验证

当大气湍流满足局部均匀各向同性时,光强起伏的 PDF 在弱起伏条件下服从对数正态分布<sup>[13]</sup>

$$p(I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_I^2}} \frac{1}{I} \exp\left[-\frac{\ln(I/\langle I \rangle) + \sigma_I^2/2}{2\sigma_I^2}\right], I \geq 0, \quad (23)$$

式中  $I$  为湍流条件下的远场光强,  $\langle I \rangle$  为远场光强的平均值,  $\sigma_I^2$  为归一化光强起伏方差。

在弱起伏条件下,归一化光强起伏方差  $\sigma_I^2$  与 Rytov 参量  $\sigma_R^2$  满足(20)式。实验中,在天顶角变化时,通过 CMOS 相机连续采集 200 帧远场光斑图像,对其光强分布进行统计平均,得到其 PDF。为了描述归一化光强起伏方差  $\sigma_I^2$  的实验值和理论值之间的相对误差,定义其相对误差为

$$P_e(\sigma_I^2) = \frac{|\sigma_{I,\text{theory}}^2 - \sigma_{I,\text{measured}}^2|}{\sigma_{I,\text{theory}}^2}. \quad (24)$$

图 7(a)~(g)分别给出了当天顶角  $\theta$  为  $0^\circ$ 、 $10^\circ$ 、 $20^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $40^\circ$ 、 $50^\circ$ 、 $60^\circ$ 时光强起伏的 PDF,图中频率直方图是实测光强起伏分布。为了进一步探究其统计分布特性,这里采用标准的正态分布和对数正态分布分别对频率直方图进行拟合。图中蓝色曲线为用对数正态分布拟合的曲线,绿色曲线为用标准正态分布拟合的曲线,而红色曲线为光强起伏概率密度的理论分布。很显然,相较于绿色曲线,蓝色曲线的整体分布特点更符合频率直方图所表现的趋势,即右偏分布(概率密度曲线的右尾巴长,顶点偏向左边),且比标准正态分布曲线更陡峭。

这里引入偏度(SK)和峰度(KU)这两个统计量进一步定量描述拟合曲线的对称性和峰值附近的陡峭程度,其定义分别为<sup>[14]</sup>

$$S_K = k_3/\sigma^3, \quad (25)$$

$$K_U = k_4/\sigma^4, \quad (26)$$

式中  $k_3$  和  $k_4$  分别为 3 阶和 4 阶中心矩,  $\sigma$  为标准差。偏度小于 0 为左偏分布(left-skewed),而大于 0 为右偏分布(right-skewed);峰度大于 3 说明比正态分布陡峭,而小于 3 说明比正态分布平缓,如表 3 所示。

表 3 不同天顶角下两层大气相位屏模型原型参数与缩比后实验参数

Table 3 Prototype and reduced-scale experimental parameters of two-layer atmosphere phase-screen model under different zenith angles

Zenith angle $\theta / (^\circ)$	Skewness ( $S_K$ )	Kurtosis ( $K_U$ )	Shape of distribution
0	1.04	3.37	right-skewed
10	0.81	2.92	right-skewed
20	0.82	2.98	right-skewed
30	0.75	2.93	right-skewed
40	0.74	2.93	right-skewed
50	1.01	3.41	right-skewed
60	0.86	3.05	right-skewed

从图 7 中可以发现,理论曲线与实验拟合曲线趋势整体一致,图 7(b)和(c)中的曲线吻合程度最高,且呈现出一致的对数正态分布形式。在不同天顶角下,由 PDF 曲线所反映的光强起伏方差相对误差分别为 6.38%, 2.08%, 4.00%, 14.81%, 36.67%, 21.43%, 32.95%。

图 8 中红色曲线为实验测得的归一化光强起伏方差(闪烁指数),蓝色曲线为相应的理论值,而绿色虚线为实验值和理论值之间的相对误差。从图中可以看出,第 1、第 2 和第 3 组的相对误差较小,测得的光强起伏方差与理论值比较接近。而剩余的几组实验值都偏小,这说明用两个湍流相位屏表征的大气湍流强度低于理论值,这可能是实验中使用的伪随机数湍流相位屏采用均匀采样的方法制作,导致低频成分(如倾斜量)欠采样,从而使光强起伏方差在一定程度上偏小。此外,通过(17)和(20)式可以看出,光强起伏方差  $\sigma_I^2$  与相位屏的位置  $h_i$  和层数  $i$  有关,因此随着传输距离的增加,如果还是将大气离散为两层,可能在一定程度上会

导致湍流的效应偏小,即光强起伏偏小。而且数据处理中存在拟合误差以及实验中采集的图像存在一定暗电平光电噪声,这些都可能导致不同程度的偏差。

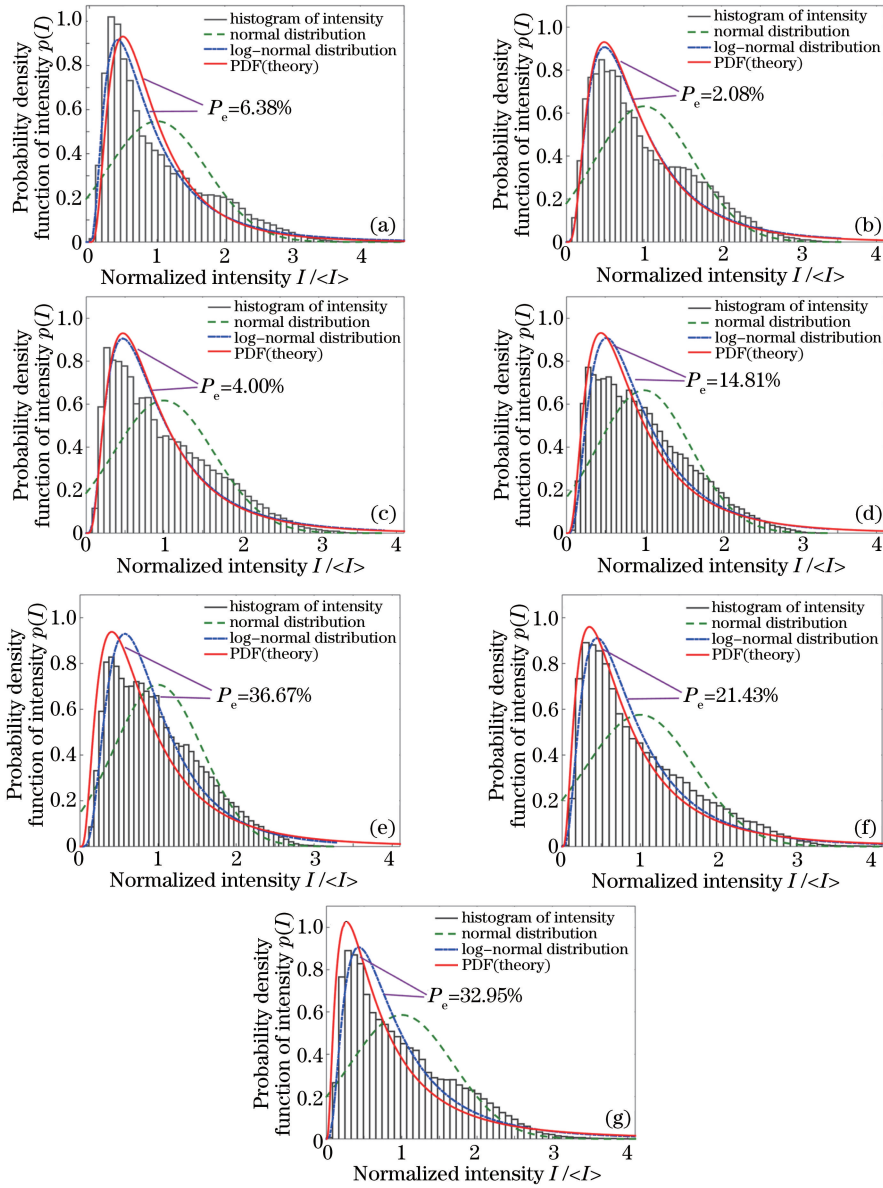


图 7 不同天顶角下远场光强起伏的 PDF。(a)0°; (b)10°; (c)20°; (d)30°; (e)40°; (f)50°; (g)60°

Fig. 7 Probability density distribution of intensity fluctuation under different zenith angles.

(a) 0°; (b) 10°; (c) 20°; (d) 30°; (e) 40°; (f) 50°; (g) 60°

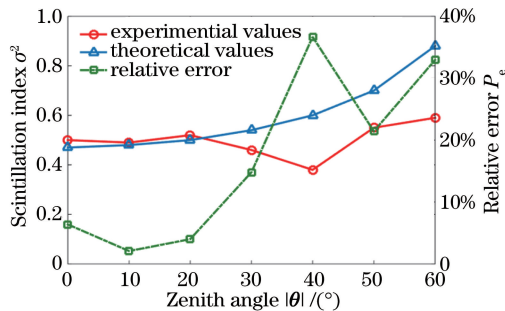


图 8 不同天顶角下远场光强起伏方差理论与实验值对比

Fig. 8 Comparison of theoretical and experimental value of far field intensity fluctuation variance under different zenith angles



以上讨论从曲线分布的趋势对比了光强起伏 PDF 理论与拟合分布曲线,为了进一步比较它们之间的差异,对其经验累积分布曲线进行研究。经验累积分布函数是相应光强起伏概率密度函数的积分。图 9(a)~(g) 给出了当天顶角  $\theta$  为  $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ$  时,光强起伏的经验累积分布理论值与拟合值。从图中可以看出,两条曲线的整体趋势基本一致,这说明虽然拟合的光强起伏概率分布与其理论分布有一定的差异,但在一定误差范围内,上述光束传输缩比实验方案的光强起伏统计特征能满足相应的统计特性,且其 PDF 曲线拟合程度较好。

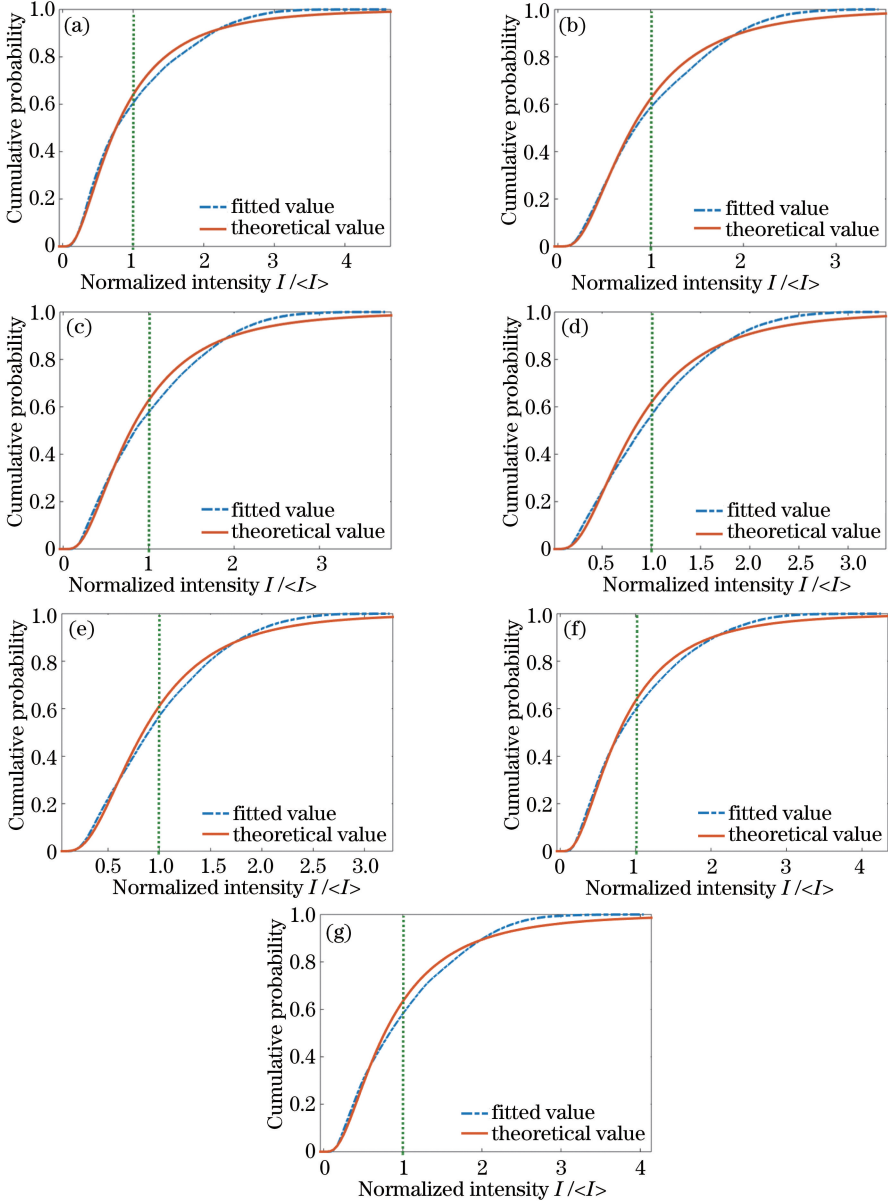


图 9 不同天顶角下光强起伏经验累积分布。(a) $0^\circ$ ; (b)  $10^\circ$ ; (c)  $20^\circ$ ; (d)  $30^\circ$ ; (e)  $40^\circ$ ; (f)  $50^\circ$ ; (g)  $60^\circ$

Fig. 9 Empirical cumulative distributions of intensity fluctuation under different zenith angles.

(a)  $0^\circ$ ; (b)  $10^\circ$ ; (c)  $20^\circ$ ; (d)  $30^\circ$ ; (e)  $40^\circ$ ; (f)  $50^\circ$ ; (g)  $60^\circ$

#### 4.2 相位结构函数统计特性验证

为了保证光束传输缩比实验中相位特性模拟的准确性,在此参数设置下,需要对其进行相位结构函数统计特性验证。在实验中,所用的旋转式伪随机数相位屏采用了 Kolmogorov 谱模型,由  $4096 \times 4096$  大小的相位采样阵列构成,每个相位采样网格大小为  $20 \mu\text{m}$ ,中间环形带的区域为相应的湍流模拟区域,其二维分布如图 10 所示。

同时,利用 H-S 波前传感器来探测不同天顶角下通过湍流相位屏的光波波前。对于这 7 种不同情况,

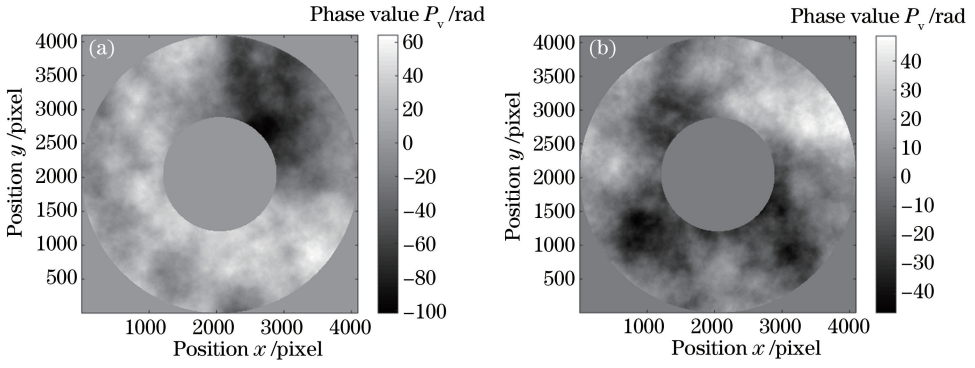


图 10 实验中所用相位屏二维分布。(a)  $r_1=0.5$  mm; (b)  $r_2=0.8$  mm

Fig. 10 Two-dimensional distributions of phase screens in the experiment. (a)  $r_1=0.5$  mm; (b)  $r_2=0.8$  mm

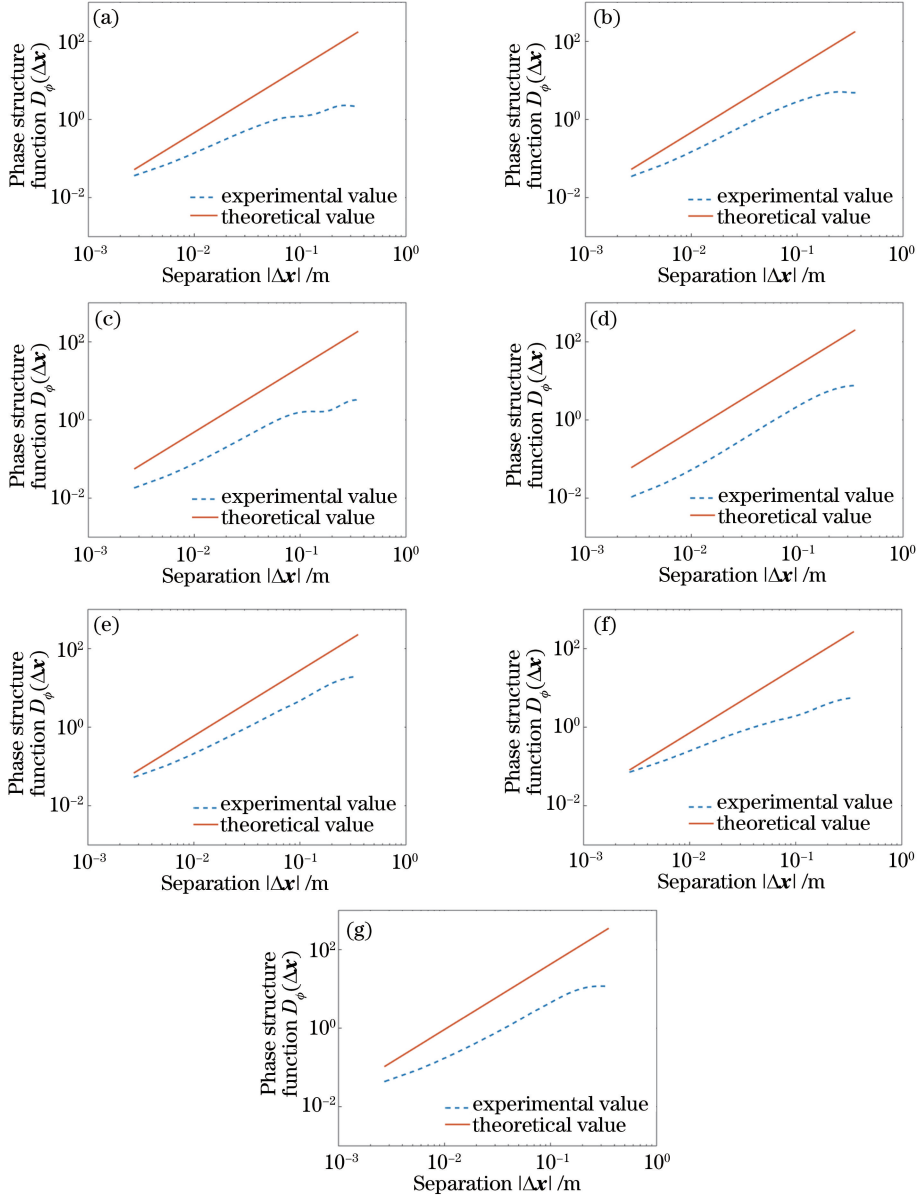


图 11 不同天顶角下相位结构函数的理论与实验值。(a)  $0^\circ$ ; (b)  $10^\circ$ ; (c)  $20^\circ$ ; (d)  $30^\circ$ ; (e)  $40^\circ$ ; (f)  $50^\circ$ ; (g)  $60^\circ$

Fig. 11 Theoretical and experimental value of phase structure function under different zenith angles.

(a)  $0^\circ$ ; (b)  $10^\circ$ ; (c)  $20^\circ$ ; (d)  $30^\circ$ ; (e)  $40^\circ$ ; (f)  $50^\circ$ ; (g)  $60^\circ$

分别进行了 200 次测量,通过测得的波前计算其相位结构函数的统计平均值。图 11 给出了相应的相位结构函数的理论值与实验值,其中理论值参见(9)式。从图中可以看出,实验测得的相位结构函数值与理论值所表现出的趋势保持一致,但是整体偏小,这说明实验中两个湍流相位屏组合所表示的等效大气相干长度偏大。考虑到相位结构函数的理论解析式是在平面波的情况下进行推演的,而实验中使用的是高斯光束,相比平面波,高斯光束具有较小空间扩展,因此在同一湍流路径上,其光波波面受到的湍流效应的影响较平面波小,这在一定程度上导致了大气相干长度偏大。

此外,从 2.1 节可知,大气分层数越多,离散相位屏所表征的等效湍流效应越精确。上述讨论将整层连续大气离散为两层,其表示出的湍流效应并没有完全表征理论值,且相对偏小,这也会导致模拟所得的大气相干长度值偏大。此外,H-S 波前传感器波前复原的误差也会影响到相位结构函数的实验值,且在低频区域,相位结构函数实验值与理论值偏差比较大,这可能是由于采用均匀采样的方法使得伪随机数相位屏在低频区域欠采样所致。

## 5 结 论

在多层随机相位屏模型的基础上,针对非均匀湍流路径下的光束传输,建立了针对不同天顶角的多层相位屏的位置分布模型。结合两层相位屏的光传输算例,在 H-V5/7 大气湍流廓线模型下,详细计算了相应的大气离散分层边界与相位屏的最优分布位置,给出了两层大气相位屏模型的最大 Rytov 判据,并针对具体的实验系统,按等菲涅耳数、等湍流效应和几何尺度缩比原则,计算了具体的实验参数。

根据上述实验方案对比分析了相位结构函数和光强起伏 PDF 的理论值与实验值。结果表明:相位结构函数的实验曲线与理论曲线虽然存在一定的偏差,但其整体趋势一致,且近似服从 5/3 幂律规律;而在弱起伏条件下,光强起伏概率拟合分布与理论分布所反映的归一化光强起伏方差相对误差分别为 6.38%, 2.08%, 4.00%, 14.81%, 36.67%, 21.43%, 32.95%, 虽然有的方案设置引起的误差相对偏大,但整体分布趋势都呈现出一致的对数正态分布形式。从光强起伏的经验累积分布曲线可以看出,光强起伏的 PDF 曲线拟合程度较好。由于两层大气相位屏模型在表征整层连续大气时不可避免地存在一定的误差,下一步工作将进一步完成多层大气相位屏模型的实验验证。

## 参 考 文 献

- Luo Wen, Geng Chao, Li Xinyang. Simulation and experimental study of single-mode fiber coupling efficiency affected by atmospheric turbulence aberration[J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(6): 0606001.  
罗文,耿超,李新阳. 大气湍流像差对单模光纤耦合效率的影响分析及实验研究[J]. *光学学报*, 2014, 34(6): 0606001.
- Ji Xiaoling. Influence of atmospheric turbulence on the spreading and directionality of radial Gaussian array beams[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(1): 692-698.  
季小玲. 大气湍流对径向分布高斯列阵光束扩展和方向性的影响[J]. *物理学报*, 2010, 59(1): 692-698.
- Ma Xiaoping, Sun Jianfeng, Hou Peipei, *et al.* Research progress on overcoming the atmospheric turbulence effect in satellite-to-ground laser communication[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2014, 51(12): 120002.  
马小平,孙建锋,侯培培,等. 星地激光通信中克服大气湍流效应研究进展[J]. *激光与光电子学进展*, 2014, 51(12): 120002.
- Ke Xizheng, Zhang Yu. Scintillation of partially coherent beam in atmospheric turbulence[J]. *Acta Optica Sinica*, 2015, 35(1): 0106001.  
柯熙政,张宇. 部分相干光在大气湍流中的光强闪烁效应[J]. *光学学报*, 2015, 35(1): 0106001.
- Han Liqiang, You Yahui. Performance of free space optical communication with combined effects from atmospheric turbulence and pointing errors[J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(11): 1106005.  
韩立强,游雅晖. 大气湍流及瞄准误差联合效应下自由空间光通信的性能[J]. *光学学报*, 2014, 34(11): 1106005.
- Rao Ruizhong. *Light propagation in the turbulent atmosphere*[M]. Hefei: Anhui Science and Technology Press, 2005: 95-98.  
饶瑞中. *光在湍流大气中的传播*[M]. 合肥:安徽科学技术出版社, 2005: 95-98.

- 7 Coles W A, Filice J P, Frehlich R G, *et al.* Simulation of wave propagation in three-dimensional random media[J]. *Applied Optics*, 1995, 34(12): 2089-2101.
- 8 Qian Xianmei, Zhu Wenyue, Rao Ruizhong. Phase screen distribution for simulating laser propagation along an inhomogeneous atmospheric path[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(9): 6633-6639.  
钱仙妹, 朱文越, 饶瑞中. 非均匀湍流路径上光传播数值模拟的相位屏分布[J]. *物理学报*, 2009, 58(9): 6633-6639.
- 9 Wallner E P. Optimizing the locations of multiconjugate wavefront correctors[C]. SPIE, 1994, 2201: 110-116.
- 10 Fusco T, Conan J M, Michau V, *et al.* Efficient phase estimation for large-field-of-view adaptive optics [J]. *Optics Letters*, 1999, 24(21): 1472-1474.
- 11 Hardy J W, Thompson L. Adaptive optics for astronomical telescopes[M]. New York: Oxford University Press, 1998: 90-92.
- 12 Schmidt J D. Numerical simulation of optical wave propagation with examples in MATLAB [M]. Bellingham: SPIE Press, 2010: 164-166.
- 13 Andrews L C, Phillips R L, Hopen C Y. Laser beam scintillation with applications[M]. Bellingham: SPIE Press, 2001: 68-89.
- 14 Rao Ruizhong, Wang Shipeng, Liu Xiaochun, *et al.* Probability distribution of laser irradiance scintillation in a real turbulent atmosphere[J]. *Acta Optica Sinica*, 1999, 19(1): 81-86.  
饶瑞中, 王世鹏, 刘晓春, 等. 实际大气中激光闪烁的概率分布[J]. *光学学报*, 1999, 19(1): 81-86.