

基于回转椭球波函数的光学系统分析

张 蓓 付东翔 陈家璧 项华中

上海理工大学光电信息与计算机工程学院, 上海 200093

摘要 回转椭球波函数在有限空间域和无限空间域内都是一组完备正交函数集, 适合分析孔径尺寸有限的实际光学系统。线性正则变换是一种重要的时频分析工具, 同时菲涅耳变换也是一种特殊的线性正则变换, 因此线性正则变换可以模拟一个光学系统。研究了有限空间域和有限频域条件下的回转椭球波函数的补偿线性正则变换, 以补偿线性正则变换模拟一个二维光学系统, 并以回转椭球波函数作为信号函数, 分析了信号通过该系统的能量损失情况, 根据椭球波函数本征值性质, 其本征值反映了椭球波函数的能量保存比。数值计算结果表明信号函数通过该系统的能量比与通过函数本征值的能量比的估计值一致, 表明了该方法的有效性。

关键词 傅里叶光学; 光学系统; 椭球波函数; 补偿线性正则变换; 能量保存比

中图分类号 O438

文献标识码 A

doi: 10.3788/CJL201643.0609005

Optical System Analysis Based on Prolate Spheroidal Wave Functions

Zhang Bei Fu Dongxiang Chen Jiabi Xiang Huazhong

School of Optical-Electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology,
Shanghai 200093, China

Abstract The prolate spheroidal wave function is a set of complete orthogonal functions set in both the finite and infinite space domain, which is suitable to analyze the practical optical systems with finite aperture size. The linear canonical transform is a kind of important time-frequency analysis tool, and the Fresnel transform is a special case of linear canonical transform. So, the linear canonical transform can model optical system. The offset linear canonical transform of prolate spheroidal wave functions in finite space domain and frequency domain is instituted, and the offset linear canonical transform models a two-dimension optical system. Using the spheroidal wave functions as signal functions, the signal's energy loss after passing through the system is analyzed. Based on prolate spheroidal wave functions' eigenvalue property, the eigenvalue reflects the energy-preservation ratio. The numerical calculation result suggests that the signal function's energy ratio after passing through the system is consistent with the energy ratio's estimation value gained by the function's eigenvalue, which indicates the validity of this method.

Key words Fourier optics; optical system; spheroidal wave functions; offset linear canonical transform; energy-preservation ratio

OCIS codes 070.2590; 070.2575; 070.2465

1 引 言

实际的光学系统都是有限孔径系统, 对于一个光学信号来说, 其空间分布往往是有限的, 根据测不准原则, 其在频域内分布是无限的。实际应用中信号函数通常都是限带函数, 高于限定带宽的能量不予考虑, 即忽略高频分量引起的误差。而傅里叶变换、线性正则变换等都是在无限区间内分析信号, 回转椭球波函数的特殊性质在于: 其在有限空间域、有限频域内和无限空间域、无限频域内都是一组完备正交函数, 因此利用椭

收稿日期: 2015-12-23; 收到修改稿日期: 2016-02-14

基金项目: 国家自然科学基金(11104184, 61177043)

作者简介: 张 蓓(1992-), 女, 硕士研究生, 主要从事光电系统测试技术方面的研究。E-mail: alleyzhangbei2@163.com

导师简介: 付东翔(1971-), 男, 博士, 副教授, 主要从事光电精密测试技术方面的研究。

E-mail: fudxusst@163.com(通信联系人)

球波函数分析有限区间内的傅里叶或线性正则变换更接近实际应用。本文分析了椭球波函数在有限空间域的补偿线性正则变换,以补偿线性正则变换模拟一个二维光学系统,以椭球波函数为信号函数,数值计算了信号函数通过该系统的能量输入输出比,与根据椭球波函数本征值得到的能量输入输出比结果相一致,表明椭球波函数可以用来分析光学系统的能量损失,并且可以用来评价光学系统的性能。

2 回转椭球波函数

椭球函数是在椭球坐标系下 Helmholtz 方程的解^[1],包括角向波函数和径向波函数,基于零阶角向波函数构造了椭球波函数 $\varphi_n(x, c)$:

$$\varphi_n(x, c) = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\mu_n(c)} S_{0n}(x/X, c), \quad (1)$$

式中 $S_{mn}(t, c)$ 为角向波函数, $S_{mn}(t, c) = \sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{mn}(c) P_{m+r}^n(t)$, $t \in [-1, 1]$, $P_n^m(t) = (1-t^2)^{m/2} d^m P_n(t)/dt^m$, $t \in [-1, 1]$, $[\mu_n(c)]^2 = \int_{-1}^1 [S_{0n}(t, c)]^2 dt$, $P_n^m(t)$ 为勒让德多项式, λ_n 为本征值, $d_r^{mn}(c)$ 为椭球角系数; $c = X \cdot \Omega$ 为椭球波函数参量,它决定了 $\varphi_n(x, c)$ 及其本征值 λ_n 的衰减程度,为表示简便,记 $\varphi_n(x, c) = \varphi_n(x)$ 。通过图 1 给出椭球波函数的性质。

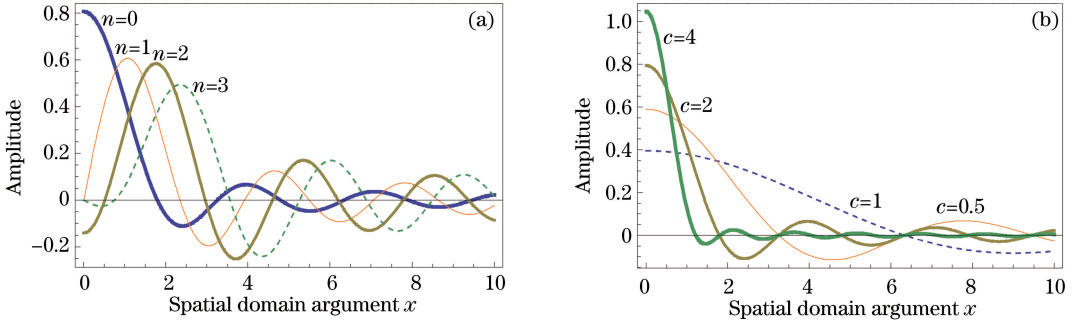


图 1 椭球波函数 $\varphi_n(x)$ 与 $\varphi_0(x)$ 。(a) $c=2, n=0, 1, 2, 3$; (b) $c=0.5, 1, 2, 4, n=0$

Fig. 1 Spheroidal wave functions $\varphi_n(x)$ and $\varphi_0(x)$. (a) $c=2, n=0, 1, 2, 3$; (b) $c=0.5, 1, 2, 4, n=0$

一维线性椭球波函数 $\varphi_n(x)$ 及其本征值 λ_n 主要有以下重要性质^[2]:对于任何大于零的空间区域 $X > 0$ 和任何上限角频率 $W > 0$, 都存在一个实函数集: $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_i(x), \dots$ 和一组正的实数: $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_i \dots$, 这组实数满足 $1 > \lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_i \dots > 0$ 。

这个实数集 $\varphi_i(x)$ 具有如下性质:

1) 在 $(-\infty, \infty)$ 上正交,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \sigma_{mn}, \quad \sigma_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}, \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

2) 在有限区间 $[-X, X]$ 上也正交,

$$\int_{-X}^X \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \lambda_n \sigma_{mn}, \quad \sigma_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}, \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

满足如下积分方程:

$$\lambda_n \varphi_n(x) = \int_{-X}^X \varphi_n(t) \frac{\sin \Omega(x-t)}{\pi(x-t)} dt, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4)$$

3 基于椭球波函数的线性正则变换

3.1 线性正则变换的定义与性质

线性正则变换是重要的时频分析工具,通过改变其参数值,线性正则变换可简化为傅里叶变换^[3-4]、分数

傅里叶变换及菲涅耳变换等^[5]。线性正则变换的主要性质有:时移性、频率调制性和叠加性^[6]。根据其时移性与频率调制性,线性正则变换又可以进一步推广到补偿线性正则变换,可以看成是线性正则变换的时间移位与频率调制,无限对称域补偿线性正则变换^[7]定义如下:

$$OL_{\infty}^A(u) = \frac{\exp(i\rho u)}{(i2\pi b)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{id}{2b}(u-\tau)^2 - i\frac{u-\tau}{b}x + \frac{ia}{2b}x^2\right] f(x) dx, \quad (5)$$

式中 $ad - bc = 1, x \in [-T, T], u \in [-\Omega, \Omega], f(x)$ 为信号函数, x 为时间域自变量(或空间域自变量), u 为频率域自变量, τ, ρ 分别代表时间(空间)和频率偏移。显然,线性正则变换是一个酉变换,它把信号从一个域变换到另一个域。

但实际的光学系统中,光学组件尺寸大小是有限的,这就意味着在实际应用中,补偿线性正则变换的区间必须是有限的,有限对称域的补偿线性正则变换定义如下:

$$OL_f^A(u) = \frac{\exp(i\rho u)}{(i2\pi b)^{1/2}} \int_{-T}^T \exp\left[\frac{id}{2b}(u-\tau)^2 - i\frac{u-\tau}{b}x + \frac{ia}{2b}x^2\right] f(x) dx. \quad (6)$$

3.2 椭球波函数的补偿线性正则变换

最原始的椭球波函数的有限域傅里叶转换有如下性质:

$$i^{-n} (\lambda_{n,\Omega,T} T \Omega^{-1})^{1/2} \varphi_{n,\Omega,T}(T \Omega^{-1} \omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-T}^T \exp(-i\omega x) \varphi_{n,\Omega,T}(x) dx. \quad (7)$$

假设以椭球波函数作为光学系统的输入信号,补偿线性正则变换的广义椭球波函数定义如下:

$$\phi_{n,\Omega,T}(x) = |b|^{-1/2} \exp\left[-i\left(\frac{a}{2b}x^2 + \frac{\tau}{b}x\right)\right] \times \varphi_{n,\Omega,T|b|^{-1}}(|b|^{-1}x), \eta_{n,\Omega,T} = \lambda_{n,\Omega,T|b|^{-1}}. \quad (8)$$

基于椭球波函数的补偿线性正则变换进行进一步变换: $OL_A[\phi_{n,\Omega,T}(x)] = \frac{\exp(i\rho u)}{(i2\pi b)^{1/2}} \int_{-T}^T \exp\left[\frac{id}{2b}(u-\tau)^2 - i\frac{(u-\tau)}{b}x + i\frac{a}{2b}x^2\right] \phi_{n,\Omega,T}(x) dx$, 将(8)式代入上式,则得到:

$$OL_A[\phi_{n,\Omega,T}(x)] = \frac{\exp(i\rho u)}{(i2\pi b|b|)^{1/2}} \times \exp\left[\frac{id}{2b}(u-\tau)^2\right] \times \int_{-T}^T \varphi_{n,\Omega,T|b|^{-1}}(|b|^{-1}x) \exp\left(-i\frac{u}{b}x\right) dx = \frac{\exp(i\rho u)}{[i2\pi \text{sgn}(b)]^{1/2}} \times \exp\left[\frac{id}{2b}(u-\tau)^2\right] \times \int_{-T|b|^{-1}}^{T|b|^{-1}} \varphi_{n,\Omega,T|b|^{-1}}(x') \exp\left[-i\frac{u}{\text{sgn}(b)}x'\right] dx',$$

参考(7)式得到: $OL_A[\phi_{n,\Omega,T}(x)] = \exp\left[i\rho u + i\frac{d}{2b}(u-\tau)^2\right] \times i^{-n-1/2} \left(\frac{\lambda_{n,\Omega,T|b|^{-1}} T}{b\Omega}\right)^{1/2} \varphi_{n,\Omega,T|b|^{-1}}\left(\frac{Tu}{b\Omega}\right)$,

考虑到椭球波函数的一个规律: $\varphi_{n,\Omega,T}(x) = (-1)^n \varphi_{n,\Omega,T}(-x)$, 则有: $OL_A[\phi_{n,\Omega,T}(x)] = i^{(-n-\frac{1}{2}) \text{sgn}(b)} \exp\left[i\rho u + i\frac{d}{2b}(u-\tau)^2\right] \times \left(\frac{\lambda_{n,\Omega,T|b|^{-1}} T}{|b|\Omega}\right)^{1/2} \varphi_{n,\Omega,T|b|^{-1}}\left(\frac{Tu}{|b|\Omega}\right)$, 经过整理,最后得到:

$$\begin{cases} OL_A[\phi_{n,\Omega,T}(x)] = \mu_n k_1^{-1/2} \exp(ik_2 u^2 + ik_3 u) \phi_{n,\Omega,T}\left(\frac{u}{k_1}\right) \\ k_1 = \Omega T^{-1}, k_2 = \frac{d}{2b} + \frac{aT^2}{2b\Omega^2}, k_3 = \rho - \left(\frac{d}{b} - \frac{T}{b\Omega}\right)\tau \\ \mu_n = i^{(-n-1/2) \text{sgn}(b)} \eta_{n,\Omega,T}^{1/2} \times \exp\left(\frac{i}{b} \frac{d}{2} \tau^2\right) \end{cases}. \quad (9)$$

上述结果表明,椭球波函数做有限域补偿线性正则变换之后,输入与输出的区别只在于:幅值有缩放、有时移,存在频率调制,线性调频增强。

4 基于补偿线性正则变换的二维光学系统

线性正则变换是菲涅耳变换^[8-11]的广义化与一般化,可以用来描述组件更复杂的光学系统,如棱镜和焦距为 f 的透镜;补偿线性正则变换可分别使用传递矩阵^[12-13] $\{1, 0, 0, 1\}$ 、 $\{1, 0, -2\pi/f\lambda, 1\}$ 来模拟棱镜和透镜,多个光学元件组合的光学系统,线性正则变换可以通过传递矩阵相乘^[14]来实现。所以,线性正则变换可以很好地模拟一个光学系统^[15]。

根据线性正则变换的性质,使用补偿线性正则变换为光学系统建模,设输入光信号为 $f_i(x, y)$, 则输出

光信号为

$$f_o(u, v) = \exp(i\epsilon) OL_{Ay} \{ OL_{Ax} [f_i(x, y)] \} \quad (10)$$

式中 OL_{Ax} 与 OL_{Ay} 分别为沿 x 方向和 y 方向的补偿线性正则变换, 两个方向的变化是独立的。

以一个二维光学系统为例, 有两个介质和一个自由空间, 如图 2 所示。介质 1 厚度: $e_0 + e_1x + e_2y + e_3x^2 + e_4y^2$, 范围: $x \in [-D_1, D_1], y \in [-W_1, W_1]$, 介质 2 厚度: $l_0 + l_1u + l_2v + l_3u^2 + l_4v^2$, 范围: $u \in [-D_2, D_2], v \in [-W_2, W_2]$ 。

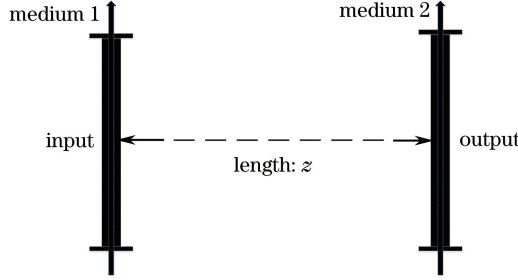


图 2 二维光学系统

Fig. 2 Two-dimension optical system

厚度函数为 $rx^2 + sx + w$ 的介质, 可以使用参数矩阵为 $[1, 0, 2k(n_s - 1)r, 1, 0, k(n_s - 1)s]$ 的补偿线性正则变换建模, 其中 $k = 2\pi/\lambda$, n_s 是介质折射率; 长度为 z 的自由空间, 可以使用参数矩阵为 $\{1, z/k, 0, 1, 0, 0\}$ 的补偿线性正则变换建模。

以 x 方向计算为例, 根据前面提到的参数矩阵计算方法, 求出 x 方向总的参数矩阵为

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2z(n_s - 1)e_3 & z/k \\ 2k(n_s - 1)(e_3 + l_3) + P & 1 + 2z(n_s - 1)l_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tau \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2(n_s - 1)e_1 \\ k(n_s - 1)(e_1 + l_1) + Q \end{bmatrix}.$$

同理求出 y 方向的参数矩阵为

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2z(n_s - 1)e_4 & z/k \\ 2k(n_s - 1)(e_4 + l_4) + P_1 & 1 + 2z(n_s - 1)l_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tau' \\ \rho' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2(n_s - 1)e_2 \\ k(n_s - 1)(e_2 + l_2) + Q_1 \end{bmatrix},$$

式中 $k = 2\pi/\lambda$, λ 为波长, n_s 为介质折射率。 $P = 4zk(n_s - 1)^2 e_3 l_3$, $P_1 = 4zk(n_s - 1)^2 e_4 l_4$, $Q = 2zk(n_s - 1)^2 e_1 l_3$, $Q_1 = 2zk(n_s - 1)^2 e_2 l_4$ 。 二维光学系统中, 以 $\phi_m(x)\phi_n(y)$ 作为输入函数, 根据上面公式得出:

$$\begin{aligned} \phi_m(x) &= \left(\frac{k}{z}\right)^{1/2} \exp\left\{-ik\left[\frac{1 + 2z(n_s - 1)e_3}{2z}x^2 + (n_s - 1)e_1x\right]\right\} \varphi_{m, D_2, kD_1z^{-1}}\left(\frac{k}{z}x\right), \\ \phi_n(y) &= \left(\frac{k}{z}\right)^{1/2} \exp\left\{-ik\left[\frac{1 + 2z(n_s - 1)e_4}{2z}y^2 + (n_s - 1)e_2y\right]\right\} \varphi_{n, W_2, kW_1z^{-1}}\left(\frac{k}{z}y\right). \end{aligned} \quad (11)$$

$\varphi_{n, D_2, kD_1z^{-1}}(\tilde{x})$ 是原始椭球波函数, 满足:

$$\int_{-kD_1z^{-1}}^{kD_1z^{-1}} \frac{\sin[D_2(\tilde{x} - x)]}{\pi(\tilde{x} - x)} \varphi_{n, D_2, kD_1z^{-1}}(x) dx = \lambda_n \varphi_{n, D_2, kD_1z^{-1}}(\tilde{x}). \quad (12)$$

根据前述椭球波函数的性质, 可以计算出信号输入和输出的能量比:

$$R = \frac{\int_{-W_2}^{W_2} \int_{-D_2}^{D_2} |f_o(x, y)|^2 dx dy}{\int_{-W_1}^{W_1} \int_{-D_1}^{D_1} |f_i(x, y)|^2 dx dy} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |\sigma_{m,n}|^2 \lambda_m^2 \lambda_n^2}{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |\sigma_{m,n}|^2 \lambda_m \lambda_n}, \quad (13)$$

式中 $\delta_{m,n} = \lambda_m^{-1} \lambda_n^{-1} \int_{-W_1}^{W_1} \int_{-D_1}^{D_1} f_i(x, y) \phi_m^*(x) \phi_n^*(y) dx dy$ 。

下面根据上述公式, 以椭球波函数 $\phi_i(x)\phi_j(y)$ 为信号输入, 计算通过该二维系统的输出 $\phi'_i(x)\phi'_j(y)$ 及其信号输入与输出的能量比。

设光学系统介质 1 厚度: $0.008 + 0.01x + 0.01y - 2.5x^2 - 2.5y^2$, 范围: $x, y \in [-0.036 \text{ m}, 0.036 \text{ m}]$,

介质 2 厚度: $0.007 + 0.012u + 0.012v - 3.5u^2 - 3.5v^2$, 范围: $u, v \in [-0.03 \text{ m}, 0.03 \text{ m}]$, $z = 1.8 \text{ m}$, $\lambda = 5 \times 10^{-4} \text{ m}$, $n_s = 1.5$.

以 $\phi_0(x)\phi_0(y)$ 、 $\phi_8(x)\phi_8(y)$ 作为输入, 进行数值计算, 得出相应的输出, 输入输出结果如图 3 和图 4 所示。

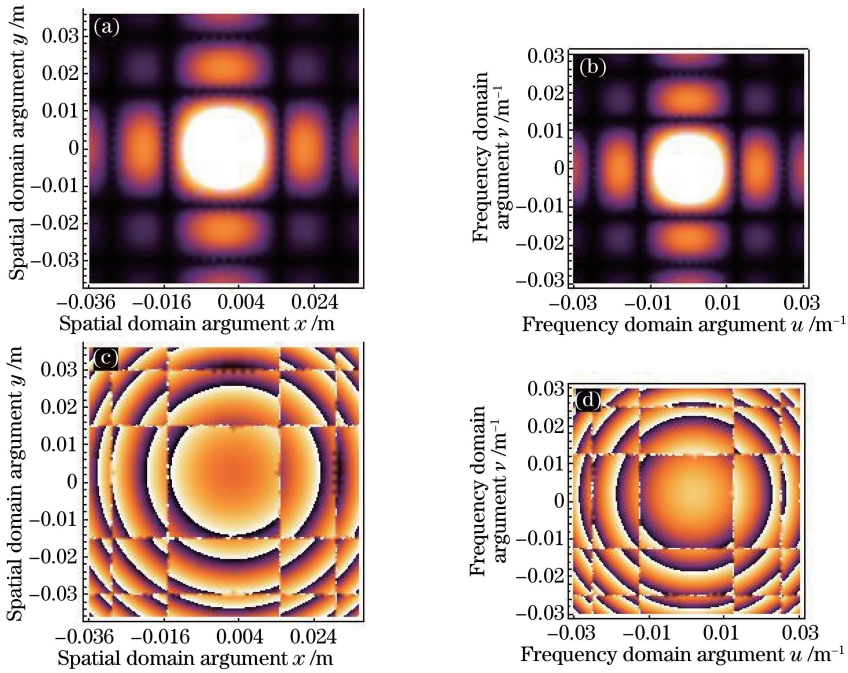


图 3 0 阶椭球波函数的输入、输出结果。(a) 输入幅值分布; (b) 输出幅值分布; (c) 输入相位分布; (d) 输出相位分布

Fig. 3 Input and output results of zeroth-order spheroidal wave functions. (a) Input amplitude distribution; (b) output amplitude distribution; (c) input phase position distribution; (d) output phase position distribution

由图 3 和图 4 可以看出, 输出与输入幅值的区别只在于: 输出幅值分布规律是输入幅值的固定比例

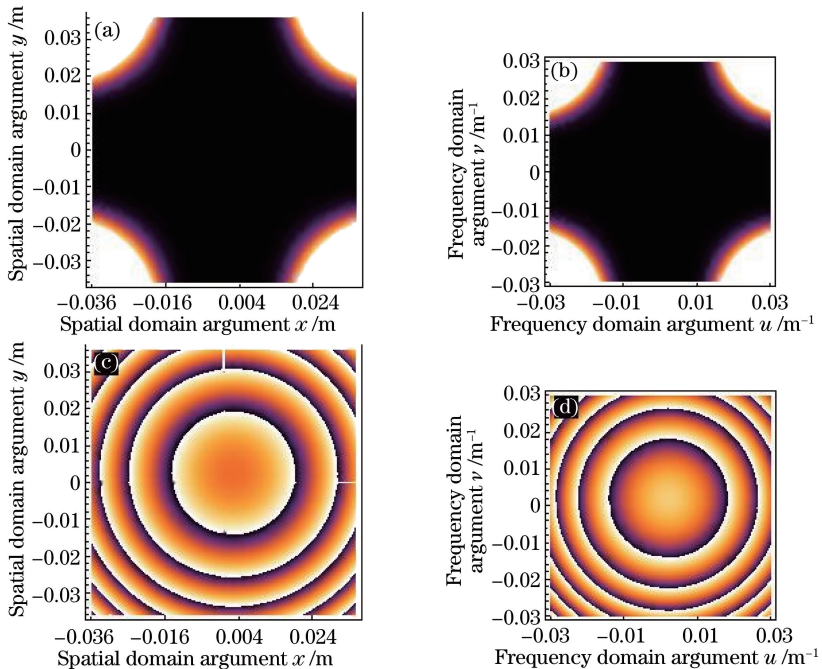


图 4 8 阶椭球波函数的输入、输出结果。(a) 输入幅值分布; (b) 输出幅值分布; (c) 输入相位分布; (d) 输出相位分布

Fig. 4 Input and output results of eighth-order spheroidal wave functions. (a) Input amplitude distribution; (b) output amplitude distribution; (c) input phase position distribution; (d) output phase position distribution

(k_1) 缩放,幅值强度为 $|\phi'_n(k_1x)\phi'_n(k_1y)|=K_n|\phi_n(x)\phi_n(y)|$, K_n 的大小随 n 的不同而变化;输出与输入的相位分布区别在于:输出相位分布是输入相位的一定比例(k_1) 缩放,但相位大小的变化受空间偏移量与频率偏移量的调制,并由阶数 n 及自变量 u, v 坐标综合影响。

根据(13)式计算信号输入与输出的能量比 R ,按照椭球波函数本征值 λ_n ,求出能量输入输出比估计值 λ_n^2 ,两者进行对比:0 阶, $\lambda_0^2=0.906426, R=0.883662$; 8 阶, $\lambda_8^2=0.00270803, R=0.00240216$ 。数值仿真结果说明在二维光学系统中,能量比 R 近似等于 λ_n^2 ;由此结果得知,椭球波函数本征值可用来分析信号通过光学系统的能量损失。

根据此光学系统: $T=|b|^{-1}D_1=251.327, \Omega=D_2=0.03$,空间带宽积 $C=T\Omega=7.53981$,根据回转椭球波函数正交性质 1) 和 2) 可求出各阶本征值 λ_n ,并得到仿真结果,如图 5 所示。

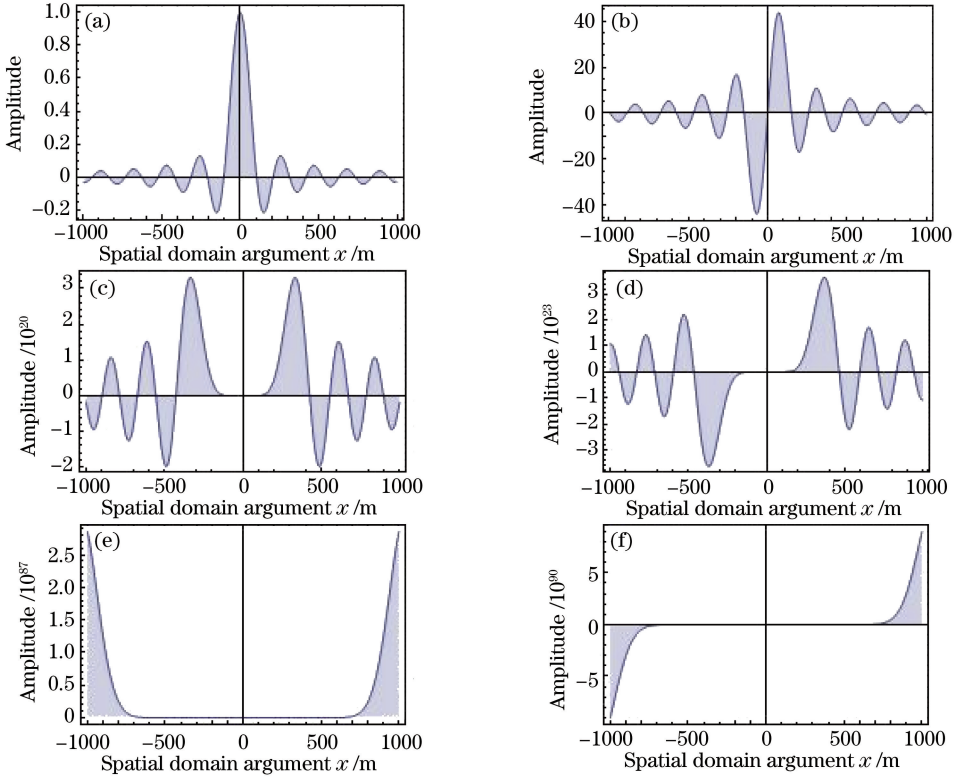


图 5 各阶椭球波函数。(a) $\varphi_0(x)$, $\lambda_0=0.952064$; (b) $\varphi_1(x)$, $\lambda_1=0.878666$; (c) $\varphi_8(x)$, $\lambda_8=0.0520387$; (d) $\varphi_9(x)$, $\lambda_9=0.011633$; (e) $\varphi_{28}(x)$, $\lambda_{28}=2.19396 \times 10^{-28}$; (f) $\varphi_{29}(x)$, $\lambda_{29}=3.50721 \times 10^{-30}$

Fig. 5 Spheroidal wave functions with different orders. (a) $\varphi_0(x)$, $\lambda_0=0.952064$; (b) $\varphi_1(x)$, $\lambda_1=0.878666$; (c) $\varphi_8(x)$, $\lambda_8=0.0520387$; (d) $\varphi_9(x)$, $\lambda_9=0.011633$; (e) $\varphi_{28}(x)$, $\lambda_{28}=2.19396 \times 10^{-28}$; (f) $\varphi_{29}(x)$, $\lambda_{29}=3.50721 \times 10^{-30}$

上述结果表明随着阶数 n 的增大,椭球波函数 $\varphi_n(x)$ 的能量分布在 $[-T, T]$ 之间逐渐减小并趋于 0,在 $n \approx [4T\Omega]=30$ 后($[]$ 为取整), λ_n 基本趋于零,即 λ_n 反映了 $\varphi_n(x)$ 在 $[-T, T]$ 上的能量分布比。

5 结 论

椭球波函数的重要性质在于其是一组正交函数,尤其是在有限区间内也满足正交完备性,其本征值反映了其在有限区间内的能量分布比。补偿线性正则变换的性质可以模拟一个光学系统,通过分析椭球波函数在有限区间内的补偿线性正则变换,以椭球波函数作为信号函数输入上述模拟光学系统,得到输出;比较输入输出信号函数的能量比,与椭球波函数自身本征值相比,两者结果一致,即本征值反映了函数的能量分布。据此可以通过计算输入信号与输出信号的能量比来分析光学系统的能量损失,评价光学系统的性能,以及分析光学系统传递信息的能力。

参 考 文 献

- 1 Chen Zhaonan, Wang Hongxing, Zhong Peilin, *et al.*. The peak-to-average power ratio reduction method for prolate spheroidal wave function based on Givens rotation transformation[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2013, 35(6): 1406-1412.
陈昭男, 王红星, 钟佩琳, 等. 基于 Givens 旋转变换的 PSWF 脉冲调制信号 PAPR 抑制方法[J]. 电子与信息学报, 2013, 35(6): 1406-1412.
- 2 Tao Chunkan, Tao Chunkuang. Optical information theory[M]. Beijing: Science Press, 2005: 6-7.
陶纯堪, 陶纯匡. 光学信息论[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 6-7.
- 3 Liu Liren. 2D Fourier-transform imaging algorithm for synthetic aperture imaging ladars[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(1): 0218001.
刘立人. 合成孔径激光成像雷达的二维傅里叶变换成像算法[J]. 光学学报, 2014, 34(1): 0218001.
- 4 Zhang Wangping, Lü Xiaoxu, Liu Shengde, *et al.*. Generalized phase-shifting phase retrieval approach based on time-domain Fourier transform[J]. Chinese J Lasers, 2015, 42(9): 0908004.
张望平, 吕晓旭, 刘胜德, 等. 基于时域傅里叶变换的广义相移相位恢复方法[J]. 中国激光, 2015, 42(9): 0908004.
- 5 Sun Qiongge, Ma Jinpeng, Yang Yu, *et al.*. Talbot effect in linear canonical transformation[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(7): 0711004.
孙琼阁, 马金鹏, 杨 瑀, 等. 线性正则变换中的泰伯效应[J]. 光学学报, 2014, 34(7): 0711004.
- 6 Xiang Qiang, Qin Kaiyu, Zhang Chuanwu. Linear canonical transform and time-frequency filtering[J]. Journal of Electronic Measurement and Instrument, 2009, 23(4): 69-73.
向 强, 秦开宇, 张传武. 线性正则变换与时频滤波[J]. 电子测量与仪器学报, 2009, 23(4): 69-73.
- 7 Xu Tianzhou, Li Bingzhao. Linear canonical transform and its implication[M]. Beijing: Science Press, 2013: 57.
许天周, 李炳照. 线性正则变换及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 57.
- 8 Chen Jiabi, Su Xianyu. The principle and application of optical information technology[M]. Beijing: Higher Education Press, 2002: 37-38.
陈家璧, 苏显渝. 光学信息技术原理及应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 37-38.
- 9 Yu Daoyin, Tan Hengying. Engineering optics[M]. Beijing: China Machine Press, 2011: 384-386.
郁道银, 谈恒英. 工程光学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2011: 384-386.
- 10 Chen Jiazhen, Zheng Zihua, Lian Guiren. Digital realization method for Fresnel transform of multiple three-dimensional objects[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2014, 51(4): 040901.
陈家祯, 郑子华, 连桂仁. 多三维物体菲涅耳变换数字实现方法[J]. 激光与光电子学进展, 2014, 51(4): 040901.
- 11 Cao Xuemei, Sang Xinzhu, Chen Zhidong, *et al.*. Computer generated hologram of complex three-dimensional object based on a two-dimensional color image and the depth map[J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(6): 0609002.
曹雪梅, 桑新柱, 陈志东, 等. 基于二维彩色图像和深度图的复杂三维场景的计算全息图[J]. 中国激光, 2014, 41(6): 0609002.
- 12 Bastiaans M J. ABCD law for partially coherent Gaussian light, propagating through first-order optical systems[J]. Optical and Quantum Electronics, 1992, 24(9): S1011-S1019.
- 13 Liu Hongzhan. The ABCD matrix of rotating parabolic lens[J]. Acta Photonica Sinica, 2007, 36(12): 2303-2304.
刘宏展. 旋转抛物透镜的 ABCD 矩阵[J]. 光子学报, 2007, 36(12): 2303-2304.
- 14 Zhou Bingkun. Principles of lasers[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2009: 34-35.
周炳坤. 激光原理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2009: 34-35.
- 15 Xiang Qiang, Qin Kaiyu, Zhang Chuanwu. Sampling theories of bandlimited signals in linear canonical transform domain[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(9): 1984-1989.
向 强, 秦开宇, 张传武. 线性正则变换域的带限信号采样理论研究[J]. 电子学报, 2010, 38(9): 1984-1989.