

# 分数阶高阶贝塞尔涡旋光束的矢量波分析法研究

李新忠<sup>1</sup> 台玉萍<sup>2</sup> 李贺贺<sup>1</sup> 王静鸽<sup>1</sup> 聂兆刚<sup>3</sup> 汤洁<sup>4</sup> 王辉<sup>1</sup> 尹传磊<sup>1</sup>

<sup>1</sup>河南科技大学物理工程学院, 河南 洛阳 471023

<sup>2</sup>河南科技大学化工与制药学院, 河南 洛阳 471023

<sup>3</sup>新加坡南洋理工大学数学物理学院, 新加坡 637371

<sup>4</sup>中国科学院西安光学精密机械研究所瞬态光学与光子技术国家重点实验室, 陕西 西安 710119

**摘要** 利用矢量波分析法对分数阶高阶贝塞尔涡旋光束(FBV)的电矢量特性进行了研究。在紧聚焦和非紧聚焦条件下,研究了拓扑荷(TCs)增量为 0.1 阶、拓扑荷从 2.1 增到 3 的过程中, $E_x$ 、 $E_y$ 、 $E_z$  三个电场分量强度图的变化情况。进而对比分析了 TCs 值为整数阶和半整数阶 FBV 光束在由紧聚焦向非紧聚焦过渡过程中  $E_x$  分量强度的变化情况。数值模拟结果表明,紧聚焦和非紧聚焦情况下,三个分量的电场强度分布差异较大,其亮环圆对称性均遭到破坏;非紧聚焦情况下, $E_x$  分量的圆对称性增强,而  $E_y$ 、 $E_z$  分量与紧聚焦条件下的光强分布基本相同;在由紧聚焦向非紧聚焦过渡过程中, $E_x$  分量整数阶 TCs 光束亮环圆对称性逐渐增强,而半整数阶 TCs 光束亮环结构基本不变,仅存在缩放关系。

**关键词** 激光光学; 奇异光学; 贝塞尔涡旋光束; 矢量波; 紧聚焦光束

**中图分类号** O436; O438.1

**文献标识码** A

**doi:** 10.3788/CJL201643.0605002

## Properties Study of the Fractional Order High Order Bessel Vortex Beam Using Vector Wave Analysis

Li Xinzhong<sup>1</sup> Tai Yuping<sup>2</sup> Li Hehe<sup>1</sup> Wang Jingge<sup>1</sup> Nie Zhaogang<sup>3</sup>

Tang Jie<sup>4</sup> Wang Hui<sup>1</sup> Yin Chuanlei<sup>1</sup>

<sup>1</sup>School of Physics & Engineering, Henan University of Science & Technology, Luoyang, Henan 471023, China

<sup>2</sup>School of Chemical Engineering & Pharmaceutics, Henan University of Science & Technology, Luoyang, Henan 471023, China

<sup>3</sup>School of Physical and Mathematical Sciences, Nanyang Technological University, Singapore 637371, Singapore

<sup>4</sup>State Key Laboratory of Transient Optics and Photonics, Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academic of Sciences, Xi'an, Shaanxi 710119, China

**Abstract** The electric vector feature of fractional high-order Bessel vortex beam (FBV) is studied based on the vector wave analysis. Under the tightly focused and non-tightly focused conditions, the changes of three electric-field components of  $E_x$ ,  $E_y$  and  $E_z$  are studied with the topological charges (TCs) from 2.1 to 3 in the increment of 0.1. Moreover, the  $E_x$  component of the FBV beam with integer and half integer TCs are comparatively analyzed during the process of the imaging scheme from tightly focused to non-tightly focused conditions. Numerical simulation results show that there are obvious difference within the three electric-field components and the circular symmetry of the bright rings are all broken. Under the non-tightly focused conditions, the circular symmetry of  $E_x$  component intensity increases. However, the distribution of  $E_y$  and  $E_z$  components demonstrate same with that under the tightly focused conditions. The circular symmetry of the  $E_x$  component of integer TCs bright rings gradually increased during the process of the imaging scheme from tightly focused to non-tightly focused conditions.

**收稿日期:** 2016-01-05; **收到修改稿日期:** 2016-02-29

**基金项目:** 国家自然科学基金(61205086, 11404097, 11504091)、瞬态光学与光子技术国家重点实验室开放基金(SKLS201203)、河南省高等学校青年骨干教师资助计划(2013071)、河南省教育厅项目(12B140006)

**作者简介:** 李新忠(1979—),男,博士,副教授,主要从事光电信息及其图像处理方面的研究。E-mail: xzli@haust.edu.cn

Different with those, the formation of the half-integer TCs bright rings patterns remain unchanged and only has a magnification relationship.

**Key words** laser optics; singular optics; Bessel vortex beam; vector wave; tightly focused beam

**OCIS codes** 140.3295; 200.4740; 260.6042

## 1 引 言

涡旋光束是一种具有螺旋形波前且中心光强为 0 的空心光束,含有  $\exp(im\theta)$  的指数相位因子,每个光子携带  $m\hbar$  的轨道角动量<sup>[1]</sup>。涡旋光束在量子信息编码<sup>[2-3]</sup>、粒子旋转与操纵<sup>[4-6]</sup>、图像处理<sup>[7-11]</sup>等领域有重要的应用,是近年来信息光学领域的研究热点。

无衍射高阶贝塞尔涡旋光束是一种特殊的涡旋光束<sup>[12-13]</sup>,除了具有上述特点外,其光强分布与传播距离无关,在传播方向上光束不发散。高阶贝塞尔光束的这些特点,使得其在光镊技术中具有很大的应用潜力<sup>[14-19]</sup>。

目前,对涡旋光束的研究已经精进到分数阶<sup>[20-22]</sup>。其中,2004 年 Berry<sup>[20]</sup>系统地阐述了分数阶光学涡旋的理论基础,随后该理论得到了实验验证<sup>[21]</sup>;表征信息及能量的分数阶拓扑荷值的测量可通过干涉强度分析法获得<sup>[22]</sup>。该领域面临的挑战是如何获得空间传输稳定的分数阶涡旋光束<sup>[23-25]</sup>,而高阶贝塞尔涡旋光束具有优异的空间稳定性。因此,将高阶贝塞尔光束扩展到分数阶,研究其空间光强分布具有重要的科学意义。

通常情况下,采用标量波理论来研究分数阶高阶贝塞尔涡旋光束<sup>[26-27]</sup>。但当光束中心斑点尺寸与光束的波长相当(即紧聚焦情况)时,标量波理论不能准确描述分数阶贝塞尔涡旋光束的特性,这时需要采用矢量波理论来对高阶贝塞尔光束进行分析。近年来, Mitri<sup>[28-29]</sup>用矢量波分析法研究了分数阶高阶贝塞尔光束的光场特性,取得了一些有意义的结果。但在 Mitri 的研究中,在电场分量随分数阶(0.1 阶精度)拓扑荷值的变化过程及从紧聚焦向非紧聚焦演变过程的研究方面存在欠缺,仅给出了 0.2 阶精度电场分量的强度分布图,没有讨论其与拓扑荷值的内在关系。然而,要深入理解分数阶高阶贝塞尔光束的物理特性,需要在 0.1 阶精度下对光场三个电场分量的强度分布进行可视化研究和分析,探讨光强分布与拓扑荷值的内在物理联系;并进一步研究由紧聚焦向非紧聚焦条件下转变的演化过程,以便给出更清晰直观的物理图像。

针对该问题,本文采用矢量波分析法研究了分数阶高阶贝塞尔涡旋光束的电场强度分布特性。研究了在紧聚焦情况下,分数阶(0.1 阶精度)拓扑荷值的贝塞尔涡旋光束三个电场分量的强度分布演变情况。以及在分数阶条件下,由紧聚焦向非紧聚焦过渡时这三个电场强度分量的变化特点。该研究对电磁波散射、辐射力及涡旋光束与微粒相互作用等领域具有重要的借鉴意义。

## 2 理论基础

光束传播的标量场理论是基于麦克斯韦方程组得到标量亥姆霍兹方程,在傍轴条件下解亥姆霍兹方程得到波函数方程。傍轴结果实质上为麦克斯韦方程组的零级解,当光束光斑尺寸远小于入射波长时结果足够精确;但当光束光斑尺寸与波长相当(即紧聚焦条件)时,标量波理论已不适用,此时,需要利用矢量波理论开展研究<sup>[30-32]</sup>。

为此,采用 Mitri<sup>[29]</sup>提出的矢量波分析方法:假设电磁波在非磁性各向同性均匀介质中传播,由麦克斯韦方程组出发,根据洛伦兹规范条件,经推导可得高阶贝塞尔涡旋光束沿  $z$  轴传播的电场强度矢量在直角坐标系下的三个分量分别为

$$E_x = \frac{1}{2}E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{i^{(m-|n|)} \text{sinc}(m-n) \exp[i(k_z z + |n|\theta)] \times \left\{ \left[ 1 + \frac{k_z}{k} - \frac{k_r^2 x^2}{k^2 R^2} + \frac{|n|(|n|-1)(x-iy)^2}{k^2 R^4} \right] J_{|n|}(k_r R) - \frac{k_r(y^2 - x^2 - 2i|n|xy)}{k^2 R^3} J_{|n|+1}(k_r R) \right\} \}, \quad (1)$$

$$E_y = \frac{1}{2}E_0 xy \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{i^{(m-|n|)} \text{sinc}(m-n) \exp[i(k_z z + |n|\theta)] \times \left\{ \frac{|n|(|n|-1)[2 + i(x^2 - y^2)/(xy)] - k_r^2 R^2}{k^2 R^4} J_{|n|}(k_r R) + \frac{k_r[2 + i|n|(y^2 - x^2)/(xy)]}{k^2 R^3} J_{|n|+1}(k_r R) \right\} \}, \quad (2)$$

$$E_z = \frac{1}{2} i E_0 \frac{x}{kR} \left(1 + \frac{k_z}{k}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{i^{(m-|n|)} \text{sinc}(m-n) \exp[i(k_z z + |n|\theta)] \times \left\{ \left[ \frac{|n|(1-iy/x)}{R} \right] J_{|n|}(k_r R) - k_r J_{|n|+1}(k_r R) \right\} \}, \quad (3)$$

式中  $i$  为虚数单位,  $E_0$  为电矢量振幅常数;  $k = 2\pi/\lambda$  为波数,  $k_r$  和  $k_z$  分别为径向和轴向波数, 且有  $k_r^2 + k_z^2 = k^2$ ,  $m$  为实数(可取整数或分数), 代表涡旋光束的拓扑荷值;  $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ;  $J_{|n|}(\cdot)$  代表第一类  $n$  阶柱坐标贝塞尔函数;  $\theta = a \tan(y/x)$  为径向角度。由于光场的磁效应很弱, 特定场合下可忽略不计, 所以, 对磁场演变暂不进行讨论。

根据(1)~(3)式, 重点研究在紧聚焦( $k/k_r \approx 1$ )和非紧聚焦( $k/k_r > 1$ )情况下, 拓扑荷值  $m$  为分数阶(0.1 阶精度)时, 高阶贝塞尔光束电场分量(即光场强度)的演变规律和特点。

### 3 结果与讨论

当光斑尺寸与入射波长处于同一数量级时, 此时实验测量电场的三个分量的空间分布难度非常大<sup>[28]</sup>, 因此, 采用数值模拟的方法对电场的三个分量进行可视化研究。数值模拟中, 选取入射波长为  $\lambda = 633 \text{ nm}$  的激光束, 首先研究紧聚焦( $k_r \approx k$ )情况下三个电场分量随拓扑荷值的变化, 此时, 拓扑荷值变化范围  $m$  为  $2.1 \sim 3$ (0.1 阶为间隔), 选取比率  $k/k_r = 1.0846$ , 收敛条件  $n_{\max} = -n_{\min} = 40$ , 令  $E_0 = 1$ 。

图 1 为  $x$  方向电场分量强度分布图, 每幅子图对应的空间尺寸为  $0.4 \text{ mm} \times 0.4 \text{ mm}$ , 下同。由图 1 可以看出,  $E_x$  分量强度图中亮环上水平方向的强度明显高于垂直方向的强度, 这可由(1)式在两个方向求极大值得出。在拓扑荷值由 2.1 增加到 3.0 的过程中, 光强图中心暗核数由 2 个增加为 3 个(即产生一个新的拓扑荷); 在拓扑荷为半整数( $m = 2.5$ )时, 各级亮环均出现缺口, 这与分数阶涡旋光束特点类似<sup>[20]</sup>。

此外, 随着拓扑荷值的逐渐增大, 各级亮环半径也逐渐增大, 该结果与拉盖尔高斯(LG)涡旋光束类似<sup>[10]</sup>。所不同的是: 各级亮环(一级亮环除外)的右半圆半径增加较快, 当  $m$  增加到 3.0 时, 各级亮环的右半圆半径恰好增加到比其低一级左半圆的半径, 两者重新组合为一个亮环; 导致该现象的原因主要是分数阶光场相位分布具有不对称性<sup>[29]</sup>。因此, 利用  $|E_x|$  随拓扑荷值的变化, 可以实现高阶贝塞尔光束的光强重新分布, 以及微粒的多维度自由调控。此外, 拓扑荷  $m$  从 2.1 增加到 3 的过程中,  $E_x$  电场分量分布的对称性经历由高变低再变高的过程; 但与傍轴条件下贝塞尔光束相比, 其圆对称性遭到了破坏。

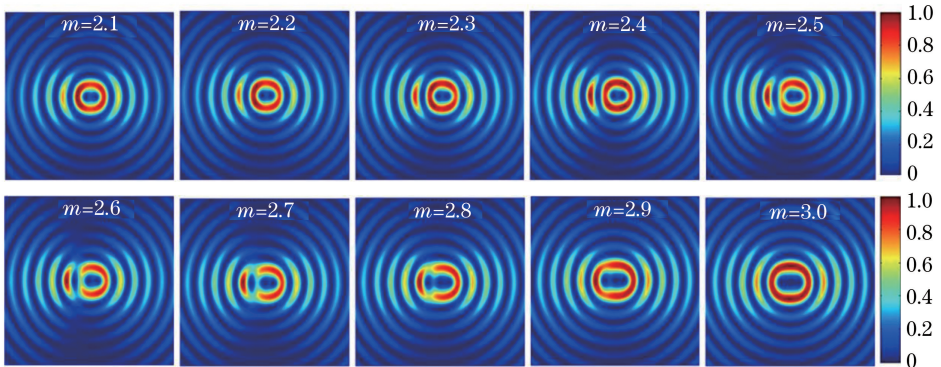


图 1  $k/k_r = 1.0846$  时,  $x$  方向电场分量强度随拓扑荷值的变化

Fig. 1 Intensity of the electric field components versus TCs along  $x$  axis when  $k/k_r = 1.0846$

图 2 是在紧聚焦条件下( $k/k_r = 1.0846$ ), 拓扑荷  $m$  为  $2.1 \sim 3$  时  $y$  方向上的电场分量强度变化图。由图 2 可以看出, 不同分数阶拓扑荷值的  $E_y$  分量光强图中无暗核存在, 因此, 该分量对微粒没有操控力。对不同拓扑荷值的光强图来说, 基本呈对角线分布, 这与 Mitri<sup>[28]</sup>得到的结果一致。一个有趣的现象是, 在拓扑荷值增加的过程中, 零级亮斑位置出现偏移, 一级亮环(由 4 瓣构成)光强重新分布; 最终原光强零级亮斑与一级亮环的左瓣融合生成一级甜甜圈亮环<sup>[10]</sup>, 零级则由亮斑变为暗斑。

在拓扑荷值增加过程中, 各级亮环半径也逐渐增大; 并且仍然存在各级亮环的右半圆半径增加较快的现

象。当拓扑荷值  $m \geq 2.5$  时,各级亮环明显出现错位及分叉现象,光束的圆对称性破缺。此外,  $E_y$  分量光强分布与  $E_x$  分量的光强分布明显不同,由(1)、(2)式的对比可以得出。

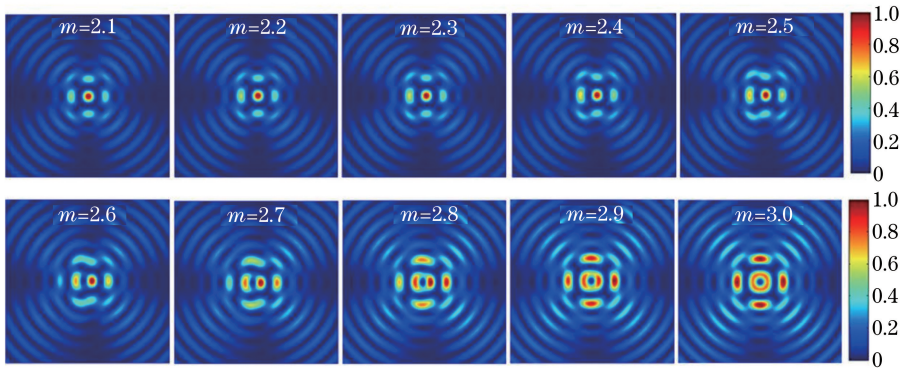


图 2  $k/k_r=1.0846$  时,  $y$  方向电场分量强度随拓扑荷值的变化

Fig. 2 Intensity of the electric field components versus TCs along  $y$  axis when  $k/k_r=1.0846$

再研究相同条件下  $z$  方向上的电场分量强度变化特点,如图 3 所示。由图 3 可以看出,  $E_z$  分量的光强分布与  $E_x$ 、 $E_y$  分量的光强分布均不相同。对  $E_z$  分量来说,各级亮环的光强主要集中在垂直方向上。在分数阶拓扑荷值  $m$  从 2.1 增加到 2.5 的过程中,各级亮环上的光强分布逐渐向右偏移,光强图的对称性降低;当  $2.5 \leq m \leq 3$  时,各级亮环出现错位现象后形成新的亮环结构,对称性逐渐增强。在  $z$  方向上,光束的圆对称性亦遭到了破坏,变为水平和垂直方向两个对称轴并随  $m$  的变化由两条对称轴变为一条(仅剩水平对称轴);然后,又逐渐变回两条对称轴。此外,光强图中心存在暗核结构,但暗核数量不易分辨。

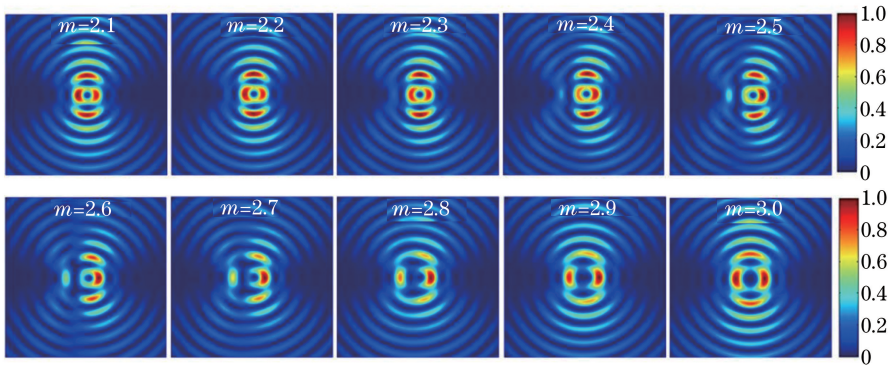


图 3  $k/k_r=1.0846$  时,  $z$  方向电场分量强度随拓扑荷值的变化

Fig. 3 Intensity of the electric field components versus TCs along  $z$  axis when  $k/k_r=1.0846$

为进行对比分析,研究了非紧聚焦情况下光场电矢量强度变化特点。图 4 是选取  $k/k_r=2.2632$ , 矢量波理论下拓扑荷  $m$  分别取 2.1、2.3、2.5、2.8 和 3.0 时的光强图。图 4 中第一行、第二行和第三行分别是  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向上电场分量的强度分布图。可以看出,随拓扑荷值的增大,  $E_x$  分量光强图的变化趋势与紧聚焦情况基本相同,不同的是亮环的圆对称性增强,这说明偏离紧聚焦点后  $E_x$  分量向标量贝塞尔光束光强分布接近。对比图 2~4 可以看出,非紧聚焦情况下,当拓扑荷值从分数变化到整数时,  $y$  方向和  $z$  方向上的电场强度分量变化与紧聚焦情况时的变化规律基本相同。这主要由于  $E_y$ 、 $E_z$  两个分量对比率  $k/k_r$  的变化不敏感并且  $k/k_r$  比值不够大。

在紧聚焦和非聚焦情况下,分数阶高阶贝塞尔涡旋光束的  $x$  方向的电矢量强度光强分布存在差异。进一步对比分析了拓扑荷值为整数阶和半整数阶时,由紧聚焦向非紧聚焦过渡条件下  $E_x$  分量光强图的变化情况。

图 5 为拓扑荷  $m=2$ 、 $k/k_r$  为 1.1~2, 增量为 0.1 时  $E_x$  分量的强度分布图。可以看出,随着  $k/k_r$  的增加(由紧聚焦逐渐变为非紧聚焦),  $E_x$  分量的强度图的一级亮环逐渐由椭圆形变成圆形,而其他各级亮环的光强分布逐渐均匀,亮环的圆对称性逐渐增强。此外,随着  $k/k_r$  比例的增大,光强中心拓扑荷值分别为 +1 的两个暗核逐渐融合在一起变为一个拓扑荷值为 +2 暗核,这与一般分数阶涡旋光束拓扑荷产生的规律类

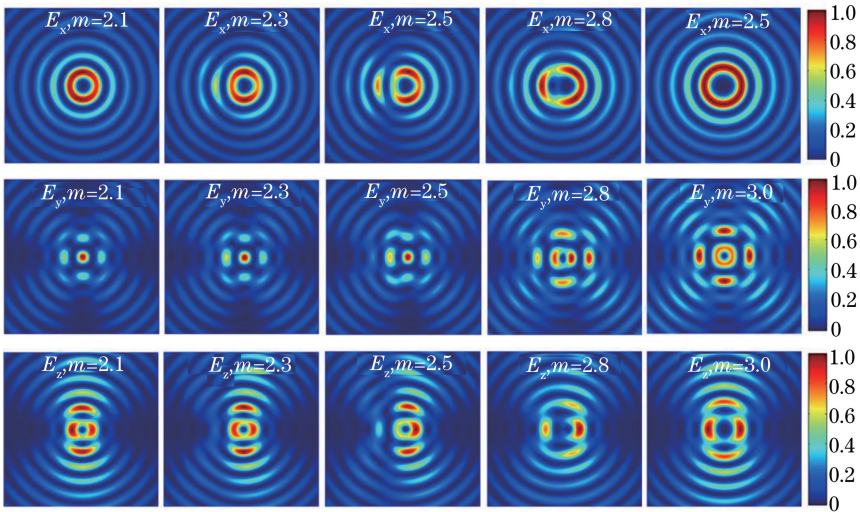


图 4 非紧聚焦情况下,不同拓扑荷时的电场分量图

Fig. 4 Electric field component diagram of different TCs under the non-tightly focused condition

似<sup>[33]</sup>。说明在此空间区域内,该贝塞尔光束变得更加稳定(即无衍射特性增强)<sup>[34]</sup>。

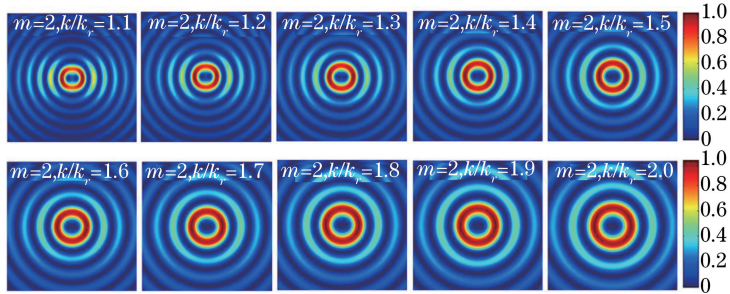


图 5  $x$  方向上,  $m=2, k/k_r$  为 1.1~2(增量为 0.1)时  $|E_x|$  的强度变化图

Fig. 5 Intensity of the electric field components  $|E_x|$  along  $x$  axis under the conditions of

$m=2, k/k_r$  is 1.1~2 (increment is 0.1)

当拓扑荷值为半整数( $m=2.5$ )、 $k/k_r$  为 1.1~2(增量为 0.1)时  $E_x$  分量的强度图如图 6 所示。可以看出,随着  $k/k_r$  的增加,亮环半径成正比例增大,但亮环形状变化较小;随着  $k/k_r$  的增大,高阶亮环的强度逐渐降低。此外,依然存在两个光强暗核融合为一个暗核的现象。

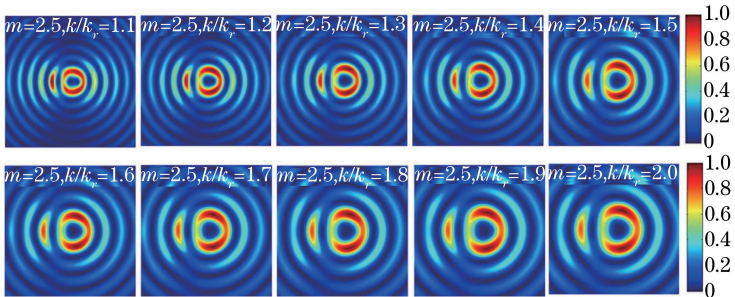


图 6  $x$  方向上,  $m=2.5, k/k_r$  为 1.1~2(增量为 0.1)时的  $|E_x|$  强度变化图

Fig. 6 Intensity of the electric field components  $|E_x|$  along  $x$  axis under the conditions of

$m=2.5, k/k_r$  is 1.1~2 (increment is 0.1)

## 4 结 论

利用矢量波理论对分数阶高阶贝塞尔涡旋光束的电场特性进行了研究。研究发现,在紧聚焦情况下

( $k/k_r=1.0846$ ),  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $E_z$ 三个分量的亮环圆对称性均遭到了破坏;其中  $E_x$ 、 $E_z$ 两个分量含有光强暗核,对微粒具有操控力,而  $E_y$ 分量不含光强暗核;在拓扑荷值  $m$  从 2.1 增加到 3.0 的过程中,三个分量均出现同一亮环左、右半圆半径增大快慢不同,从而导致了亮环出现错位和重新融合的现象。在非紧聚焦情况下( $k/k_r=2.2632$ ),  $E_x$ 分量光强图中的亮环圆对称性增强,而  $E_y$ 、 $E_z$ 两个分量对比率  $k/k_r$ 的变化不敏感。在由紧聚焦向非紧聚焦过渡的过程中( $k/k_r=1.1\sim 2$ ),  $E_x$ 分量整数阶光束亮环圆对称性增强,而半整数阶光束亮环结构基本不变,仅存在缩放关系。

该工作的开展有助于更直观地理解矢量涡旋光束的光强分布特性,为分数阶高阶贝塞尔涡旋光束在微粒控制与操纵及信息处理等领域的应用开拓新思路。

### 参 考 文 献

- 1 Nye J F, Berry M V. Dislocations in wave trains[J]. Proc R Soc London Ser A-Math Phys Eng Sci, 1974, 336(1605): 165-190.
- 2 Molina-Terriza G, Torres J P, Torner L. Twisted photons[J]. Nature Physics, 2007, 3(5): 305-310.
- 3 Bozinovic N, Yue Y, Ren Y, *et al.*. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers[J]. Science, 2013, 340(6140): 1545-1548.
- 4 Grier D G. A revolution in optical manipulation[J]. Nature, 2003, 424(6950): 810-816.
- 5 Tao S, Yuan X C, Lin J, *et al.*. Fractional optical vortex beam induced rotation of particles[J]. Optics Express, 2005, 13(20): 7726-7731.
- 6 Ng J, Lin Z, Chan C T. Theory of optical trapping by an optical vortex beam[J]. Physical Review Letters, 2010, 104(10): 103601.
- 7 Crabtree K, Davis J A, Moreno I. Optical processing with vortex-producing lenses[J]. Applied Optics, 2004, 43(6): 1360-1367.
- 8 Sharma M K, Joseph J, Senthilkumaran P. Selective edge enhancement using shifted anisotropic vortex filter[J]. Journal of Optics, 2013, 42(1): 1-7.
- 9 Pan Y, Jia W, Yu J, *et al.*. Edge extraction using a time-varying vortex beam in incoherent digital holography[J]. Optics Letters, 2014, 39(14): 4176-4179.
- 10 Li X, Tai Y, Nie Z, *et al.*. Digital speckle correlation method based on phase vortices[J]. Optical Engineering, 2012, 51(7): 077004.
- 11 Li X, Tai Y, Zhang L, *et al.*. Characterization of dynamic random process using optical vortex metrology[J]. Applied Physics B, 2014, 116(4): 901-909.
- 12 Liu R, Gu B Y. Generation of the high-order Bessel beams by diffractive phase elements[J]. Optik, 1999, 110(2): 71-76.
- 13 Arlt J, Dholakia K. Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon[J]. Optics Communications, 2000, 177(1-6): 297-301.
- 14 Mitri F G. Three-dimensional vectorial analysis of an electromagnetic non-diffracting high-order Bessel trigonometric beam[J]. Wave Motion, 2012, 49(5): 561-568.
- 15 Wu Pinghui, Huang Wenhua. Theoretical analysis of quasi-Bessel beam for laser micromachining[J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(s1): s102002.  
吴平辉, 黄文华. 准贝塞尔光束在激光微加工中的理论分析[J]. 中国激光, 2014, 41(s1): s102002.
- 16 Yu Wensu, Qin Yali, Ren Hongliang, *et al.*. Research on ring-like vortex solitons in Bessel lattices[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(7): 0719001.  
余文榛, 覃亚丽, 任宏亮, 等. 贝塞尔晶格中环状涡旋孤子的研究[J]. 光学学报, 2014, 34(7): 0719001.
- 17 Zhang Xia, Su Xiaofei, Zhang Lei, *et al.*. Analysis of orbital angular momentum modes based on high-order Bessel functions in optical fiber of ring refractive index distribution[J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(12): 1205002.  
张霞, 宿晓飞, 张磊, 等. 折射率环状分布光纤中基于高阶贝塞尔函数的轨道角动量模式分析[J]. 中国激光, 2014, 41(12): 1205002.
- 18 Sun Chuan, He Yanlin, Chen Jing, *et al.*. Bessel beam generated by linear radial gradient-index lens[J]. Chinese J Lasers, 2015, 42(8): 0802002.  
孙川, 何艳林, 陈婧, 等. 线性径向梯度折射率透镜产生贝塞尔光[J]. 中国激光, 2015, 42(8): 0802002.

- 19 Zhou Zhaoxian, Hu Minglie, Zhou Yuzhu, *et al.*. Broadband spectrum Bessel beams directly output from a photonic crystal fiber[J]. Chinese J Lasers, 2015, 42(3): 0302001.  
周钊贤, 胡明列, 周雨竹, 等. 光子晶体光纤直接产生超连续贝塞尔光束[J]. 中国激光, 2015, 42(3): 0302001.
- 20 Berry M V. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps[J]. Journal of Optics A: Pure and Applied Optics, 2004, 6(2): 259-268.
- 21 Leach J, Yao E, Padgett M J. Observation of the vortex structure of a non-integer vortex beam[J]. New Journal of Physics, 2004, 6(1): 71.
- 22 Li X, Tai Y, Lv F, *et al.*. Measuring the fractional topological charge of LG beams by using interference intensity analysis[J]. Optics Communications, 2015, 334: 235-239.
- 23 Molchan M A, Doktorov E V, Vlasov R A. Propagation of vector fractional charge Laguerre-Gaussian light beams in the thermally nonlinear moving atmosphere[J]. Optics Letters, 2010, 35(5): 670-672.
- 24 Dai H T, Liu Y J, Luo D, *et al.*. Propagation properties of an optical vortex carried by an Airy beam: Experimental implementation[J]. Optics Letters, 2011, 36(9): 1617-1619.
- 25 Petrov N V, Pavlov P V, Malov A N. Numerical simulation of optical vortex propagation and reflection by the methods of scalar diffraction theory[J]. Quantum Electron, 2013, 43(6): 582-587.
- 26 Gutiérrez-Vega J C, López-Mariscal C. Nondiffracting vortex beams with continuous orbital angular momentum order dependence[J]. Journal of Optics A: Pure and Applied Optics, 2008, 10(1): 015009.
- 27 López-Mariscal C, Burnham D, Rudd D, *et al.*. Phase dynamics of continuous topological upconversion in vortex beams [J]. Optics Express, 2008, 16(15): 11411-11422.
- 28 Mitri F G. Vector wave analysis of an electromagnetic high-order Bessel vortex beam of fractional type  $\alpha$ : Erratum[J]. Optics Letters, 2013, 38(5): 615-615.
- 29 Mitri F G. High-order Bessel nonvortex beam of fractional type  $\alpha$ [J]. Physical Review A, 2012, 85(2): 025801.
- 30 Lax M, Louisell W H, McKnight W B. From Maxwell to paraxial wave optics[J]. Physical Review A, 1975, 11(4): 1365-1370.
- 31 Davis L W. Theory of electromagnetic beams[J]. Physical Review A, 1979, 19(3): 1177-1179.
- 32 Pattanayak D N, Agrawal G P. Representation of vector electromagnetic beams[J]. Physical Review A, 1980, 22(3): 1159-1164.
- 33 Jesus-Silva A J, Fonseca E J S, Hickmann J M. Study of the birth of a vortex at Fraunhofer zone[J]. Optics Letters, 2012, 37(21): 4552-4554.
- 34 Mitri F G. Three-dimensional vectorial analysis of an electromagnetic non-diffracting high-order Bessel trigonometric beam [J]. Wave Motion, 2012, 49(5): 561-568.