

轴棱锥顶点离轴加工误差对贝塞尔光束的影响

胡 润 吴逢铁

华侨大学信息科学与工程学院福建省光传输与变换重点实验室, 福建 厦门 361021

摘要 理论推导了轴棱锥顶点离轴加工误差的透射率函数。在惠更斯-菲涅耳衍射积分理论和稳相近似法的基础上, 推导出顶点离轴轴棱锥后的衍射光场表达式, 分析了顶点离轴加工误差对贝塞尔光束的影响。对顶点离轴轴棱锥后衍射光场进行数值模拟, 结果表明, 当为理想加工轴棱锥时, 轴棱锥后的光场分布为近似理想贝塞尔光束; 当存在加工误差时, 衍射光斑对半分离。相同距离处, 分离程度随顶点离轴误差的增加而增加; 相同的顶点离轴误差下, 分离程度随传输距离的增加而增加。同时, 还研究了这种元件的加工厚度对光斑分离程度的影响, 结果表明, 随着加工厚度的增加, 光斑分离程度也会逐步增大。研究结果对轴棱锥加工、贝塞尔光束应用等具有一定的指导意义。

关键词 物理光学; 轴棱锥; 顶点离轴加工误差; 衍射积分理论; 透射率函数; 贝塞尔光束

中图分类号 TN 241

文献标识码 A

doi: 10.3788/CJL201643.1205002

Influence of Axicon Vertex off Axis Machining Error on Bessel Beams

Hu Run Wu Fengtie

Fujian Key Laboratory of Optical Beam Transmission and Transformation, College of Information Science & Engineering, Huaqiao University, Xiamen, Fujian 361021, China

Abstract The transmittance function of the axicon vertex off axis machining error is derived theoretically. Based on Huygens-Fresnel diffraction integral theory and stationary phase method, the expression of diffraction field behind the vertex off axis machining error is derived and the influence of the vertex off axis machining error in an axicon on the Bessel beams is analyzed. The expression of diffraction field behind the axicon is simulated numerically. Results show that if the axicon is ideal manufactured, the field distribution behind the axicon is approximately an ideal Bessel beam, and if the machining error exists, the diffraction beam pattern will split in half. At the same distance, the separation of the beam pattern will increase with the increasing of the vertex off axis machining error, with the same vertex off axis machining error, the separation of the beam pattern will increase with the increasing of the transmission distance. Meanwhile, the influence of the thickness of the element on the separation of the beam pattern is also studied. The results show that the separation degree of the beam pattern increases gradually with the increasing of the thickness. The findings offer some guidance for axicon machining and the application of Bessel beams, and so forth.

Key words physical optics; axicon; vertex off axis machining error; diffraction integral theory; transmittance function; Bessel beams

OCIS codes 260.1960; 230.4000; 220.4610; 130.1750

1 引言

1987 年, Durnin 等^[1-2]提出了麦克斯韦波动方程的零阶贝塞尔函数形式的严格解, 并且在实验室利用环

收稿日期: 2016-07-21; 收到修改稿日期: 2016-09-01

基金项目: 国家自然科学基金(61178015)、国家自然科学基金青年基金(61605049)、福建省科技重大项目(2016H6016)

作者简介: 胡 润(1991—), 男, 硕士研究生, 主要从事光束传输与变换方面的研究。E-mail: 1062058539@qq.com

导师简介: 吴逢铁(1958—), 男, 博士, 教授, 主要从事光束传输与变换、短脉冲技术及非线性光学等方面的研究。

E-mail: fengtie@hqu.edu.cn(通信联系人)

缝-透镜法^[1]证明了该特解所对应的光束具有无衍射特性,无衍射光束的概念由此诞生。这种光束具备许多优良的传输特性,在自由空间传输过程中,其横向光场分布具有不随传输距离的改变而发生变化、光场能量分布集中、中心光斑强度及尺寸保持不变等特性,因此广泛应用在光学成像^[3]、精密测量^[4-5]、激光微加工^[6]、光通信等领域。并且,以贝塞尔光束为基础产生的局域空心光束^[7-9],可以作为光镊进行粒子俘获^[10],从而实现对微观粒子的操作。为了寻求最为有效的无衍射光束产生方法,人们进行了许多相关研究。目前,无衍射光束的实现方法主要有环缝-透镜法^[1]、全息法^[11-12]、F-P 谐振腔法^[13]、轴棱锥法^[14]等。这些方法中,轴棱锥方法备受瞩目。由于元件简单、光能损伤值低、转换效率高、成本较低等显著优点,该方法成为产生贝塞尔光束最为有效的方法,并得到了广泛的应用。因此,对轴棱锥的研究与应用至今仍是一项热门课题,如 Nicholson 等^[15]将轴棱锥应用于高阶模式光纤放大器的模式转换,Xie 等^[16]将轴棱锥应用于梯度折射率透镜的端面实现点状光源产生贝塞尔光束,Chen 等^[17]利用计算全息同时测量轴棱锥锥角和形状等。研究组至今也一直在利用轴棱锥进行光束传输与变换的研究^[18-19]。然而,在实际情况中,会存在多种误差因子影响着近似无衍射光束的质量,如 Zhou 等^[20-21]从光源误差和器件加工误差方面出发,研究了误差因子对于近似无衍射栅型结构光的影响。轴棱锥在实际加工中也会存在加工误差,Zeng 等^[22]研究了轴棱锥非圆对称加工误差。本文分析了另一种轴棱锥加工误差,即轴棱锥顶点离轴加工误差。基于惠更斯-菲涅耳衍射积分理论和稳相近似法,理论推导了顶点离轴轴棱锥后的衍射光场,给出数值模拟结果,并对结果进行了分析。

2 透射率函数的推导

图 1(a)和(b)分别给出了理想轴棱锥和带有顶点离轴误差的轴棱锥的三维几何示意图。依据几何知识可以知道,当轴棱锥不存在顶点离轴加工误差时,其底角 γ 不随底面方位角 φ 的变化而变化;当存在顶点离轴加工误差时,底角 γ 是顶点离轴距离 ϵ 和底面方位角 φ 的函数。

图 1(b)中, $|OB| = R$, $|OC| = \epsilon$, $|CD| = h$, $|BC| = l$, $\angle AOB = \varphi$, $\angle CBD = \gamma$ 。其中 R 为轴棱锥底面圆半径, ϵ 为顶点离轴距离, h 为轴棱锥顶点到底面的厚度, φ 为底面方位角, γ 为轴棱锥底角。

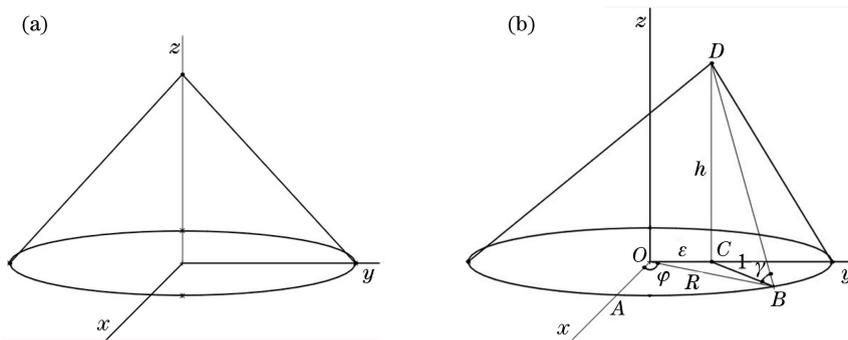


图 1 (a)理想轴棱锥和(b)加工误差轴棱锥

Fig. 1 (a) Ideal axicon and (b) axicon with machining error

由图 1(b)中几何关系可知,

$$\tan \gamma = \frac{h}{l}, \tag{1}$$

$$l = \sqrt{R^2 + \epsilon^2 - 2R\epsilon \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)}, \tag{2}$$

(2)式推导运用了余弦定理。

将(2)式代入(1)式可得

$$\tan \gamma = \frac{h}{\sqrt{R^2 + \epsilon^2 - 2R\epsilon \sin \varphi}}. \tag{3}$$

考虑到轴棱锥底角 γ 很小,因此 $\tan \gamma \approx \gamma$, (3)式化为

$$\gamma(\varphi, \epsilon) = \frac{h}{\sqrt{R^2 + \epsilon^2 - 2R\epsilon \sin \varphi}} \quad (4)$$

已知轴棱锥透射率函数为

$$t(\rho) = \begin{cases} \exp[-ik(n-1)\gamma\rho], & \rho \leq R \\ 0, & \rho > R \end{cases} \quad (5)$$

(4)式代入(5)式可得

$$t(\rho) = \begin{cases} \exp\left[-ik(n-1)\rho \frac{h}{\sqrt{R^2 + \epsilon^2 - 2R\epsilon \sin \varphi}}\right], & \rho \leq R, \\ 0, & \rho > R \end{cases} \quad (6)$$

(6)式即为具有顶点离轴加工误差的轴棱锥的透射率函数。

3 衍射光场表达式

假设入射光束满足高斯光束,则光场分布满足

$$E(\rho) = \exp(-\rho^2/\omega^2), \quad (7)$$

由惠更斯-菲涅耳衍射积分理论可知,在圆柱坐标系下,经过具有顶点离轴加工误差的轴棱锥后在 z 处的无衍射光场可表示为

$$E(r, \theta, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_0^{2\pi} \int_0^R E(\rho) t(\rho) \exp\left\{i \frac{k}{2z} [\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)]\right\} \rho d\rho d\varphi, \quad (8)$$

式中 ρ, φ 分别为场源的径向距离和方位角, r, θ 为观察面场的径向距离和方位角, z 为轴向距离, λ 为入射光波长, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 为波数, R 为入射轴棱锥光束半径, $t(\rho)$ 为轴棱锥透射率函数。场源取值区间分别满足 $\varphi \in [0, 2\pi], \rho \in [0, R]$ 。

将(6)、(7)式代入(8)式,可得

$$E(r, \theta, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \exp\left(-\frac{\rho^2}{\omega^2}\right) \exp\left[ik\left(\frac{\rho^2 + r^2}{2z} - A\rho\right)\right] d\rho d\varphi, \quad (9)$$

式中 ω 为束腰半径, $A = \frac{r \cos(\theta - \varphi)}{z} + \frac{(n-1)h}{\sqrt{R^2 + \epsilon^2 - 2R\epsilon \sin \varphi}}$, n 为折射率。

为了便于运用稳相近似法,对(9)式进行代换,即

$$E(r, \theta, z) = K \int_0^{2\pi} \int_0^R G(\rho) \exp[ikf(\rho)] d\rho d\varphi, \quad (10)$$

式中 $K = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}$, $G(\rho) = \rho \exp\left(-\frac{\rho^2}{\omega^2}\right)$, $f(\rho) = \frac{\rho^2 + r^2}{2z} - A\rho$ 。

$f(\rho)$ 为相位因子,因此利用稳相近似,对 $f(\rho)$ 分别进行一阶求导和二阶求导,可得

$$f'(\rho) = \frac{\rho}{z} - A, \quad (11)$$

$$f''(\rho) = \frac{1}{z}, \quad (12)$$

令一阶导数 $f'(\rho) = 0$ 可以求得稳相点为

$$\rho_p = Az, \quad (13)$$

当 ρ_p 取值为 R 时,可以得到最大无衍射距离为

$$z_{\max} = \frac{[R - r \cos(\theta - \varphi)] \sqrt{R^2 + \epsilon^2 - 2R\epsilon \sin \varphi}}{(n-1)h}. \quad (14)$$

由于在近轴,所以 $r \ll R$, 有

$$z_{\max} = \frac{R}{(n-1)\gamma(\varphi, \epsilon)}, \quad (15)$$

由(14)式可知,当 $\epsilon=0$ 时可得理想轴棱锥的最大无衍射距离为

$$z_{\max} = \frac{[R - r \cos(\theta - \varphi)]R}{(n-1)h} \approx \frac{R}{(n-1)\gamma}, \quad (16)$$

式中 γ 为理想轴棱锥底角,(16)式即为理想轴棱锥产生贝塞尔光束的最大无衍射距离,这也表明(15)式更具有一般性。

依据稳相近似法的相关理论可知,轴棱锥后在 z 轴不同位置光场分布不同,当满足 $z \leq z_{\max}$ (也即稳相点 $\rho_p \leq R$)时,(10)式可近似为

$$E(r, \theta, z) = K \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k f''(\rho_p)}} G(\rho_p) \exp\left\{i \left[k f(\rho_p) + \frac{\pi}{4} \right]\right\} d\varphi. \quad (17)$$

将(12)、(13)式代入(16)式,再将各参量代入,可得 $z \leq z_{\max}$ 光场为

$$\begin{aligned} E(r, \theta, z) = & \frac{\exp(ikz)}{i\lambda} \int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda z} \left[\frac{r \cos(\theta - \varphi)}{z} + \frac{(n-1)h}{\sqrt{R^2 + \epsilon^2 - 2R\epsilon \sin \varphi}} \right] \times \\ & \exp\left\{ - \frac{\left[r \cos(\theta - \varphi) + \frac{(n-1)hz}{\sqrt{R^2 + \epsilon^2 - 2R\epsilon \sin \varphi}} \right]^2}{\omega^2} \right\} \times \\ & \exp\left\{ ik \frac{\left[r \cos(\theta - \varphi) + \frac{(n-1)hz}{\sqrt{R^2 + \epsilon^2 - 2R\epsilon \sin \varphi}} \right]^2 + r^2}{2z} \right\} \times \\ & \exp\left\{ - ikz \left[\frac{r \cos(\theta - \varphi)}{z} + \frac{(n-1)h}{\sqrt{R^2 + \epsilon^2 - 2R\epsilon \sin \varphi}} \right]^2 + \frac{\pi}{4} i \right\} d\varphi, \quad (18) \end{aligned}$$

最终可以得到在 $z \leq z_{\max}$ 范围内,衍射光场 (r, θ, z) 处的光强关于加工误差 ϵ 的函数 $I(r, \theta, z, \epsilon)$ 可表示为

$$\begin{aligned} I(r, \theta, z, \epsilon) = & \left| \frac{\exp(ikz)}{i\lambda} \int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda z} \left[\frac{r \cos(\theta - \varphi)}{z} + \frac{(n-1)h}{\sqrt{R^2 + \epsilon^2 - 2R\epsilon \sin \varphi}} \right] \times \right. \\ & \exp\left\{ - \frac{\left[r \cos(\theta - \varphi) + \frac{(n-1)hz}{\sqrt{R^2 + \epsilon^2 - 2R\epsilon \sin \varphi}} \right]^2}{\omega^2} \right\} \times \\ & \exp\left\{ ik \frac{\left[r \cos(\theta - \varphi) + \frac{(n-1)hz}{\sqrt{R^2 + \epsilon^2 - 2R\epsilon \sin \varphi}} \right]^2 + r^2}{2z} \right\} \times \\ & \left. \exp\left\{ - ikz \left[\frac{r \cos(\theta - \varphi)}{z} + \frac{(n-1)h}{\sqrt{R^2 + \epsilon^2 - 2R\epsilon \sin \varphi}} \right]^2 + \frac{\pi}{4} i \right\} d\varphi \right|^2, \quad (19) \end{aligned}$$

(19)式即为经过误差轴棱锥后的光强表达式。

4 数值模拟实验

根据(19)式,利用计算机软件对经过轴棱锥后在等距离不同加工误差下的光场分布,以及等误差不同距离处的光场分布分别进行数值模拟。其中,光源采用 He-Ne 激光器 $\lambda=632.8 \text{ nm}$, $\omega=10 \text{ mm}$, $R=10 \text{ mm}$ 。轴棱锥折射率取 $n=1.458$,底角取 $\gamma=1^\circ$ 。模拟结果如图 2~4 所示。

图 2 所示为在相同距离处($z=300 \text{ mm}$)不同加工误差 ϵ 所对应的光强分布图。图 2(a)为理想轴棱锥($\epsilon=0$)后衍射光斑图,图 2(b)~(h)分别对应不同加工误差下的衍射光斑图。由图 2 的模拟结果可知,经理想轴棱锥后的衍射光场分布满足近似理想零阶贝塞尔分布,衍射光斑中心对称;但经误差轴棱锥后产生的光场分布将发生畸变,对称性被破坏,衍射光斑沿径向一分为二并分离,并且这种分离程度随顶点离轴距离 ϵ 的增大而增大。

图 3 所示为在相同加工误差($\epsilon=30 \mu\text{m}$)不同距离处的截面光强分布。从图 3 中可以看出,在相同加工误差条件下,衍射光斑的分离程度随传输距离的增大而增大。

图 4 所示为在不同加工厚度 h 条件下的模拟截面光强图,其中图 4(a)~(c)为理想轴棱锥在不同加工厚度下的截面光强图,可以看出,随着轴棱锥加工厚度的增加,由其产生的近似理想贝塞尔光束的中心光斑尺寸逐渐减小。图 4(d)~(f)则给出了误差轴棱锥在不同加工厚度下的截面光强图,这里取 $\epsilon = 20 \mu\text{m}$, $z = 100 \text{ mm}$,可以看出,随着加工厚度的增加,除了光斑尺寸会逐渐减小以外,光斑分离程度也会逐步增大。

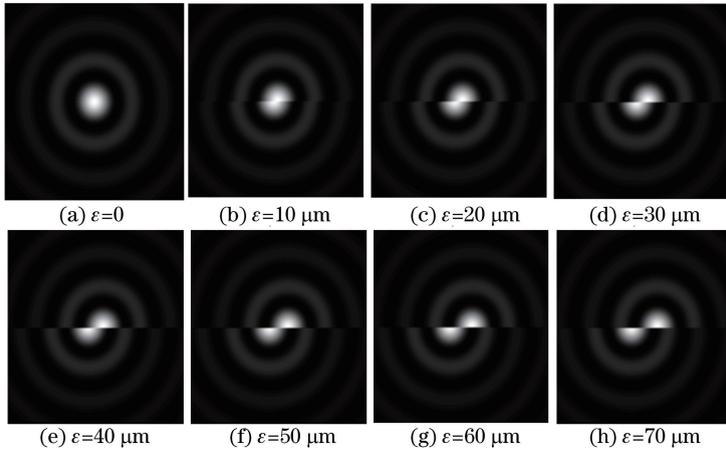


图 2 数值模拟相同距离处 $z = 300 \text{ mm}$ 不同 ϵ 值的截面光强图

Fig. 2 Numerical simulation of transverse intensity distributions with different ϵ in the same position $z = 300 \text{ mm}$

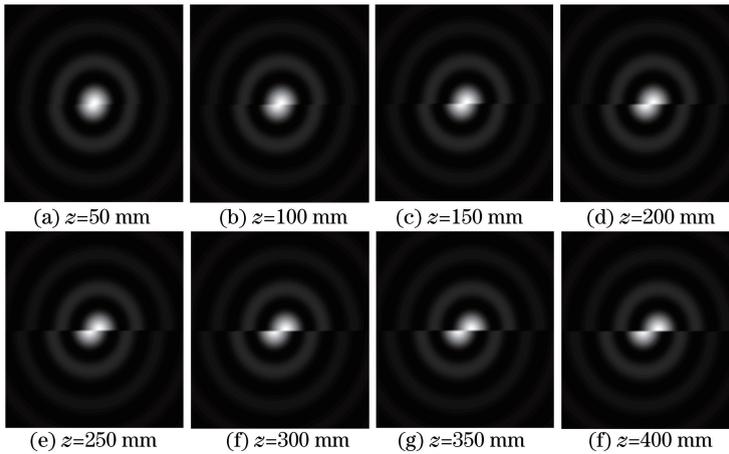


图 3 数值模拟 $\epsilon = 30 \mu\text{m}$ 时不同距离处的截面光强图

Fig. 3 Numerical simulation of transverse intensity distributions in different positions with $\epsilon = 30 \mu\text{m}$

从模拟结果可以看出,当顶点离轴距离 ϵ 达到 $10 \mu\text{m}$ 量级时,衍射光斑便会产生较为明显的对半分离现象,当 $\epsilon = 70 \mu\text{m}$ 时,衍射光斑几乎完全对半分离。因此,在轴棱锥生产加工中,应当对顶点离轴偏移量加以严格控制,过大偏移量将会严重影响光束质量,误差偏移量应当控制在几微米以内。

5 结 论

研究了一种可能存在的轴棱锥加工误差,即轴棱锥顶点离轴加工误差。理论推导了具有顶点离轴加工误差轴棱锥的透射率函数。以惠更斯-菲涅耳衍射积分理论和稳相近似法为基础,导出了高斯光束经过具有该误差加工的轴棱锥后的衍射光场的解析式,分析了顶点离轴加工误差对贝塞尔光束的影响。运用控制变量法,分别研究了加工误差以及传输距离对贝塞尔光束的影响。对推导出的衍射光场解析式进行了数值模拟,数值模拟结果表明,当为理想加工轴棱锥时,轴棱锥后的光场分布为近似理想贝塞尔光束;当存在加工误差时,衍射光斑对半分离。相同距离处,分离程度随 ϵ 的增加而增加;相同顶点离轴距离 ϵ 下,分离程度随传输距离的增加而增加。此外,还研究了在相同误差加工条件下,元件的不同加工厚度 h 对光斑分离程度的影响。该研究结果对轴棱锥加工、贝塞尔光束应用等具有一定的指导意义。

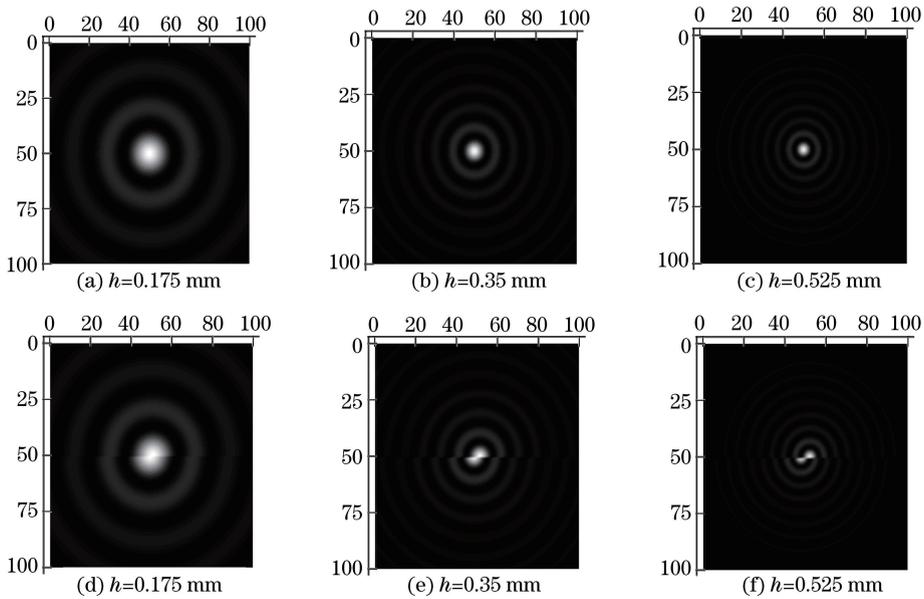


图 4 数值模拟不同 h 值下的截面光强图。(a)~(c)理想轴棱锥;(d)~(f)误差轴棱锥

Fig. 4 Numerical simulation of transverse intensity distributions with different h . (a)-(c) Ideal axicon; (d)-(f) axicon with machining error

参 考 文 献

- 1 Durnin J, Miceli J J, Eberly J H. Diffraction-free beams[J]. Phys Rev Lett, 1987, 58(15): 1499-1501.
- 2 Durnin J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory[J]. J Opt Soc Am A, 1987, 4(4): 651-654.
- 3 Planchon T A, Gao L, Milkie D E, *et al.* Rapid three-dimensional isotropic imaging of living cells using Bessel beam plane illumination[J]. Nature Methods, 2011, 8(5): 417-23.
- 4 Ma G, Liu L, Zhao B. Nondiffracting beam based technology for an attitude measurement system for automatic orientation of shield[J]. Opt Eng, 2015, 54(11): 114106.
- 5 Ma Guolu, Zeng Guoying. Research and uncertainty analysis of probe based on non-diffracting beam for measuring coordinates[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(5): 0512005.
马国鹭, 曾国英. 基于无衍射探针的空间坐标测量及其不确定度分析[J]. 光学学报, 2015, 35(5): 0512005.
- 6 Wu Pinghui, Huang Wenhua. Theoretical analysis of quasi-Bessel beam for laser micromachining[J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(s1): s102002.
吴平辉, 黄文华. 准贝塞尔光束在激光微加工中的理论分析[J]. 中国激光, 2014, 41(s1): s102002.
- 7 Wei M D, Shiao W L, Lin Y T. Adjustable generation of bottle and hollow beams using an axicon [J]. Optics Communications, 2005, 248(1-3): 7-14.
- 8 Du Tuanjie, Wu Fengtie, Wang Tao, *et al.* Theoretical modulation and experiment on the self-reconstruction of periodic bottle beam[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(1): 0114001.
杜团结, 吴逢铁, 王涛, 等. 周期局域空心光束自重建的理论模拟与实验[J]. 光学学报, 2014, 34(1): 0114001.
- 9 Zhu Qingzhi, Shen Donghui, Wu Fengtie, *et al.* Effects of a partially coherent beam on periodic bottle beam[J]. Acta Physica Sinica, 2016, 65(4): 044103.
朱清智, 沈栋辉, 吴逢铁, 等. 部分相干光对周期性局域空心光束的影响[J]. 物理学报, 2016, 65(4): 044103.
- 10 Mcgloin D, Dholakia K. Bessel beams: Diffraction in a new light[J]. Contemporary Physics, 2005, 46(1): 15-28.
- 11 Turunen J, Vasara A, Friberg A T. Holographic generation of diffraction-free beams[J]. Applied Optics, 1988, 27(19): 3959-3962.
- 12 Vasara A, Turunen J, Friberg A T. Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms[J]. J Opt Soc Am A, 1989, 6(11): 1748-1754.
- 13 Cox A J, Dibble D C. Nondiffracting beam from a spatially filtered Fabry-Perot resonator[J]. J Opt Soc Am A, 1992, 9(2): 282-286.
- 14 Scott G, Mcardle N. Efficient generation of nearly diffraction-free beams using an axicon[J]. Opt Eng, 1992, 31(12):

2640-2642.

- 15 Nicholson J W, Desantolo A, Westbrook P S, *et al.* Axicons for mode conversion in high peak power, higher-order mode, fiber amplifiers[J]. *Optics Express*, 2015, 23(26): 33849-33860.
- 16 Xie Z, Armbruster V, Grosjean T. Axicon on a gradient index lens (AXIGRIN): Integrated optical bench for Bessel beam generation from a point-like source[J]. *Applied Optics*, 2014, 53(26): 6103-6107.
- 17 Chen Q, Zhang Y, Qiu C, *et al.* Method for measuring the cone angle and the shape of the axicon simultaneously using computer-generated holograms[J]. *Applied Optics*, 2015, 54(28): 8290-8292.
- 18 Li Dong, Wu Fengtie, Xie Xiaoxia. A novel method of generating qausi-non-diffracting Mahtieu beam based on axicon[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(15): 152401.
李 冬, 吴逢铁, 谢晓霞. 基于轴棱锥产生近似无衍射 Mathieu 光束的新方法[J]. *物理学报*, 2014, 63(15): 152401.
- 19 He Xi, Wu Fengtie, Li Pan, *et al.* Self-reconstruction of high-order Bessel beams generated by green LED light source [J]. *Scientia Sinica Physica, Mechanica & Astronomica*, 2015, 45(1): 014202.
何 西, 吴逢铁, 李 攀, 等. 绿光 LED 产生高阶 Bessel 光的自再现[J]. *中国科学: 物理学力学天文学*, 2015, 45(1): 014202.
- 20 Zhou L, Zhou F, Qu D, *et al.* Error analysis of the non-diffraction grating structured light generated by triangular prism [J]. *Optics Communications*, 2013, 306: 174-178.
- 21 Qu Dan. Study on approximate non-diffracting grating structured light and its related theory [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2011.
瞿 丹. 近似无衍射栅型结构光的实现方法及相关理论研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2011.
- 22 Zeng X, Wu F. Effect of elliptical manufacture error of an axicon on the diffraction-free beam patterns[J]. *Opt Eng*, 2008, 47(8): 083401.