

前向散射颗粒粒径测量中的多参数正则化算法

林承军 沈建琪 王天恩

上海理工大学理学院, 上海 200093

摘要 反演算法是光散射颗粒测试技术中的关键问题之一,以 Tikhonov 正则化方法为代表的单参数正则化算法被广泛应用于激光粒度仪颗粒粒径分布函数(PSD)的反演计算中。该算法的缺点之一是所得到的反演解呈现出振荡特征,并伴随负值。为改善这一状况,提出了一种多参数正则化算法。通过构建一个由多个参数控制的带通滤波函数,分别控制正则化解的振荡程度和解的高度,并对正则化解进行非负约束。模拟计算和实验研究结果表明,对多参数进行优化后能够降低正则化算法带来的振荡和负值。此外,所提出的算法具有较好的多峰识别能力,可实现颗粒粒径分布的有效重建。

关键词 测量; 颗粒粒径; 正则化; 反演计算

中图分类号 O436 **文献标识码** A

doi: 10.3788/CJL201643.1104004

Multi-Parameter Regularization Algorithm in Particle Size Measurement of Forward Light Scattering

Lin Chengjun Shen Jianqi Wang Tianen

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China

Abstract Inverse algorithm is one of the key issues in particle measurement technology of light scattering. Single parameter regularization algorithm, especially Tikhonov regularization algorithm is widely used for back calculation of particle size distribution (PSD) in laser particle analyzer. One of the disadvantages of such algorithm is that the inversion solution is usually oscillatory and contains negatives values. To improve the situation, a multi-parameter regularization algorithm is proposed. By constructing a band-pass filter function that is controlled by multiple parameters, oscillations and the height of the regularization solution can be controlled, respectively. Moreover, the regularization solution is nonnegative constrained. Simulated results and experimental evidences show that, with the optimized parameters, the algorithm can eliminate the oscillations and negative values brought by regularization algorithm. Meanwhile, the proposed algorithm has better ability to recognize the multimodal system, and exhibits high ability to effectively re-construct the PSD.

Key words measurement; particle size; regularization; inverse algorithm

OCIS codes 120.5820; 290.5850; 290.5820; 350.4990

1 引 言

颗粒粒径及其分布的反演是颗粒测试技术中的关键问题之一。以使用广泛的前向散射激光粒度仪为例,获得颗粒粒径分布信息的根本性任务是求解第一类弗雷德霍姆积分方程^[1-3],离散化后得到矩阵方程 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 。其中, \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{b} 为 $m \times 1$ 测量向量, \mathbf{X} 是待解的 $n \times 1$ 向量。由于测量误差等因素的存在,该矩阵方程通常是病态的。为求解此逆问题,至今为止,已经发展出了多种不同的反演方法,如约束最小二乘法^[4-5]、奇异值分解法(SVD)^[6-8]、迭代法^[9-11]、Tikhonov 正则化方法^[12-14]。尽管已证明这些方法能有效地求解矩阵方程,但还存在着一些相关的问题和局限性有待解决。以 Tikhonov 正则化算法为例,为降低对噪声的敏感度,在矩阵方程中增加一个正则化项得到正则化方程。求解该方程的关键在于确定一个恰当的正则化参数 λ 。正则

收稿日期: 2016-07-05; **收到修改稿日期:** 2016-09-05

基金项目: 国家自然科学基金(51476104)

作者简介: 林承军(1989—),男,硕士研究生,主要从事颗粒测试技术方面的研究。E-mail: lincj2012@163.com

导师简介: 沈建琪(1965—),男,博士,教授,主要从事颗粒测试技术等方面的研究。

E-mail: jqshenk@163.com(通信联系人)

化参数过小时,很小的噪声与计算误差都会使所得到的解呈现剧烈的振荡;正则化参数过大时,则会导致有用信息的丢失。虽然振荡减少了,但会使分布变宽,从而不利于多峰分布颗粒的识别。最常见的正则化参数选取方法有L曲线法^[15-16]和广义交叉验证法(GCV)^[17-18]。但是,得到的反演解仍然会呈现一定的振荡与负值。解决办法之一是采用非负约束的正则化^[19-24]。然而,这种方法本质上仍是单参数正则化方法,通常情况下采用这种办法时由于减少负值与振荡的需要,参数因子会相对偏大,不利于多峰分布的识别。

以减少反演解的振荡和负值、同时保留更多的信息为目标,本文提出了一种多参数正则化方法用于实现颗粒粒径分布的有效重建。采用模拟计算并与单参数正则化算法比较,分析该算法对反演解的改善情况;最后,对单分散和混合标准颗粒试样进行实测以验证该算法。

2 前向光散射颗粒测试技术

前向散射激光粒度仪的测量原理如图1所示。扩束器将激光展开为平行光并照射到位于测量区中的颗粒上,颗粒的前向散射光经接收透镜后被位于透镜焦平面上的半圆形环状多元光电探测器接收得到一组包含颗粒粒径分布信息的测量信号 $\{b_i\}$,其中 $i = 1, 2, \dots, m$, m 是探测器的环数。

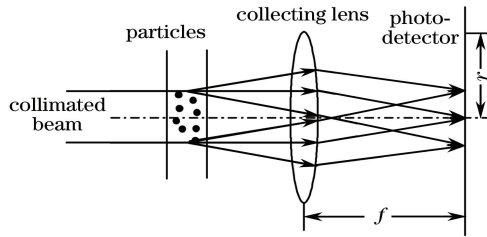


图1 激光粒度仪原理图

Fig. 1 Schematic of laser particle analyzer

测量信号具有离散形式

$$b_i = \sum_{j=1}^n \left[\pi \bar{D}_j^{-3} \int_{\theta_{i,in}}^{\theta_{i,out}} i_{sca}(\hat{m}, \bar{\alpha}_j, \theta) \sin \theta d\theta \right] q_3(\bar{D}_j) \Delta D_j, \quad (1)$$

式中, D 是颗粒粒径; $i_{sca}(\hat{m}, \alpha, \theta)$ 是颗粒在平行光照射下的散射光强度函数; \hat{m} 是颗粒相对周围介质的折射率; α 是颗粒的无因次粒径参数 ($\alpha = \pi D / \lambda$), λ 是激光波长; $q_3(D)$ 是颗粒按体积或重量的粒径分布频度函数; $\theta_{i,in}$ 和 $\theta_{i,out}$ 分别是探测器第 i 环所对应的最小散射角和最大散射角; D_{min} 和 D_{max} 分别是待测颗粒的最小粒径和最大粒径。

(1)式可简写成矩阵方程形式

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}, \quad (2)$$

式中, \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, 矩阵元为 $A_{ij} = \pi \bar{D}_j^{-3} \int_{\theta_{i,in}}^{\theta_{i,out}} i_{sca}(\hat{m}, \bar{\alpha}_j, \theta) \sin \theta d\theta$; 向量 \mathbf{X} 是离散化的颗粒粒径分布函数(PSD), 其元素为 $x_j = q_3(\bar{D}_j) \Delta D_j$, 其中 $j = 1, 2, \dots, n$, n 是颗粒粒径分档数; $\mathbf{b}^T = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ 是测量向量。

3 正则化方法

3.1 Tikhonov 正则化与非负约束正则化

对(2)式中的矩阵 \mathbf{A} 进行奇异值分解 $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$, 可得到直接解

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{b} = \sum_{j=1}^r \frac{\mathbf{u}_j^T \mathbf{b}}{\sigma_j} \mathbf{v}_j, \quad (3)$$

式中, $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 与 $\mathbf{V} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为酉矩阵, $\mathbf{\Sigma} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 为对角矩阵, 且对角元满足: $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, 其中 $r = f_{rank}(\mathbf{A})$, 其含义为矩阵 \mathbf{A} 的秩。考虑到奇异值在直接解 \mathbf{X} 中位于分母位置, 很小的计算误差与实验误差都会被较小的奇异值放得很大, 得到的结果往往呈现出很强的振荡。为了减少振荡, 在(2)式中增设一个正则化项

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda^2 \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (4)$$

式中, λ 是正则化参数因子, 对应的方程解为^[12,14]

$$\mathbf{X}_\lambda = \sum_{j=1}^r \frac{1}{1 + (\lambda/\delta_j)^2} \frac{\mathbf{u}_j^T \mathbf{b}}{\delta_j} \mathbf{v}_j, \quad (5)$$

式中, $f_\lambda = 1/[1 + (\lambda/\delta_j)^2]$ 为滤波函数。逆问题运算在实质上就是使目标函数最小化

$$F_\lambda = (\|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda^2 \|\mathbf{X}\|_2^2), \quad (6)$$

式中, 定义 $\eta(\lambda) = \|\mathbf{X}_\lambda\|_2^2$ 为平滑评价函数, $\rho(\lambda) = \|\mathbf{A}\mathbf{X}_\lambda - \mathbf{b}\|_2^2$ 为残差函数。L 曲线法^[15-16] 以 $(\ln\rho, \ln\eta)$ 为坐标作图, 曲线拐角位置对应最佳参数值。在 GCV 方法^[17-18] 中, 最佳参数 λ_{GCV} 的获得使 GCV 函数最小化

$$V(\lambda) = \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{X}_\lambda - \mathbf{b}\|_2^2}{[f_{\text{trace}}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}_\lambda)]^2}, \quad (7)$$

式中, $\mathbf{A}_\lambda = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T$, $f_{\text{trace}}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}_\lambda)$ 表示矩阵 $(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}_\lambda)$ 的迹。

采用上述方法对正则化参数进行选取, 往往得到的解仍会呈现出不同程度的振荡。为了减少振荡与负值, 非负约束(NNC)正则化^[19-24] 提供了一个解决办法, 其关键在于在非负约束情况下得到最优解, 例如一些学者提出结合积极集^[19]、信赖域^[20]、迭代法^[21]等方法求解。在文献^[24]中提到, 最佳正则化约束参数的获得可直接最小化

$$\min(\|\mathbf{A}\mathbf{X}_\lambda^+ - \mathbf{b}\|_2^2), \quad (8)$$

式中, \mathbf{X}_λ^+ 为非负约束解, 即其元素若为负值则直接由 0 替代。

无论是 Tikhonov 正则化还是非负约束的正则化, 根本上仍是单个参数对所有奇异值无差别的对待。这样带来的结果往往是欠正则化或过正则化: 要么多多少少地包含振荡、要么就是过度“惩罚”, 牺牲了更多的分辨率。

3.2 多参数正则化

解决上述问题的办法之一是采用多参数正则化方法^[25-27]。提出一种多参数正则化方法, 将(2)式转化为

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{X} &= \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \\ \mathbf{A}^T \mathbf{A} &= \mathbf{V} \text{diag}(\lambda_j^2) \mathbf{V}^T, (j = 1, 2, 3, \dots, r). \end{aligned} \quad (9)$$

需要说明的是, $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 不再是一个对角矩阵, 而是一个主对角元占据主导的近对角矩阵。对矩阵 \mathbf{A} 进行 SVD 并经过进一步推演得到

$$\mathbf{X}_\Lambda = \sum_{j=1}^r \frac{1}{1 + (\lambda_j/\delta_j)^2} \frac{\mathbf{u}_j^T \mathbf{b}}{\delta_j} \mathbf{v}_j. \quad (10)$$

与(5)式相比, 方程解的区别在于滤波函数 f_λ 替换为更加自由的 $f_\Lambda = 1/[1 + (\lambda_j/\delta_j)^2]$ 。

接下来, 有必要对奇异值分布的特性进行分析。采用天津大学生产的 31 个探测单元的半圆环状光电探测器, 相应参数可查阅文献^[28]。探测器最小半径和最大半径分别为 0.149 mm 和 15.9 mm, 接收透镜焦距为 100 mm, 采用波长为 0.635 μm 的半导体激光为光源。相应的粒径区间为 1.50 μm 和 191.2 μm 。取 $n = 31$ 个颗粒粒径分档并在对数坐标上按照等比数列选取分档粒径。以分散在水中的聚苯乙烯标准颗粒为模拟对象, 相对折射率为 $\hat{m} = 1.59/1.33$ 。

在改变激光波长、折射率等条件时, 无论是衍射近似还是米氏理论计算得到的矩阵 \mathbf{A} , 其奇异值分布普遍呈现图 2 所示的情形。注意到图 2 中 $j \leq h$ 的部分奇异值缓慢减少, 而在 $j > h$ 部分急剧减小, 中间存在着转折点 h (可以通过斜率或者曲率知识得到该点位置)。这预示着在后半部分由于奇异值分解计算导致了较大的计算误差。考虑到后半部分奇异值比前半部分相比要小得多, 很小的计算误差与实验噪声都会被放得非常大, 所以在以后的计算中, 预先采用截断奇异值法(TSVD)^[7], 截断因子 $h = 23$ 。(10)式变为

$$\mathbf{X}_\Lambda = \sum_{j=1}^{h=23} \frac{1}{1 + (\lambda_j/\delta_j)^2} \frac{\mathbf{u}_j^T \mathbf{b}}{\delta_j} \mathbf{v}_j. \quad (11)$$

接下来的工作中多参数的选取尤为关键。一些学者在多参数 λ_j 的选取上提出了诸多方法。例如构建的递增函数 $\lambda_j = \delta_1 - \delta_j$ ^[26-27] 在考虑奇异值的分布时抑制了小奇异值对噪声的放大效应, 虽然获得了很好的效果, 但是由于该函数未与噪声相联系起来, 因此在对噪声的适应性上存在缺陷。引入调节因子 η_1 与 η_2 , 构建函数

$$\lambda_j = \eta_1 (k_j)^2 + \eta_2 (1/k_j)^2,$$

$$k_j = \delta_{(h-j)} / \delta_j。$$

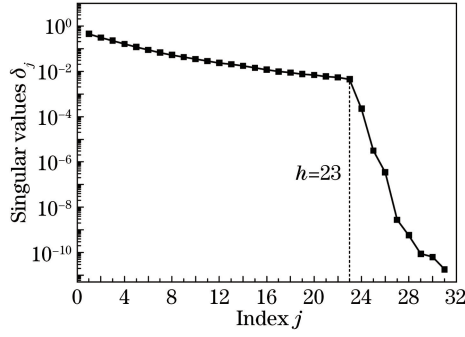


图 2 矩阵 A 的奇异值

Fig. 2 Singular values of the matrix A

以最小化 $\min(\| \mathbf{A} \mathbf{X}_A^c - \mathbf{b} \|_2^2)$ 为目标函数 (\mathbf{X}_A^c 即是 \mathbf{X}_A 负值元素替代为 0), 利用共轭梯度法解得最优参数 (η_1, η_2) , 具体设置参数为: 初始点 $(10^{-3}, 10^{-5})$, 终止迭代阈值为 10^{-5} 。为了对多参数滤波函数进行考察。模拟了双峰颗粒系下的一组正态对数分布, 其分布参数为 $\bar{D}_1 = 10 \mu\text{m}$ 和 $\ln\sigma_1 = 0.11, \bar{D}_2 = 21 \mu\text{m}$ 和 $\ln\sigma_2 = 0.11$ 。

图 3(a) 显示采用约束情况下的多参数正则化后, 振荡与负值明显减少。图 3(b) 中, 与单参数滤波函数 f_λ 不同的是多参数滤波函数 f_A 为带通滤波形式, 两者除了都在大 j 项处滤除外, f_A 在前端也需要一定程度的滤除。由于 η_1 因子负责后端滤波、 η_2 负责前端滤波, 因此不妨采用控制变量的方法考察该滤波函数的作用。

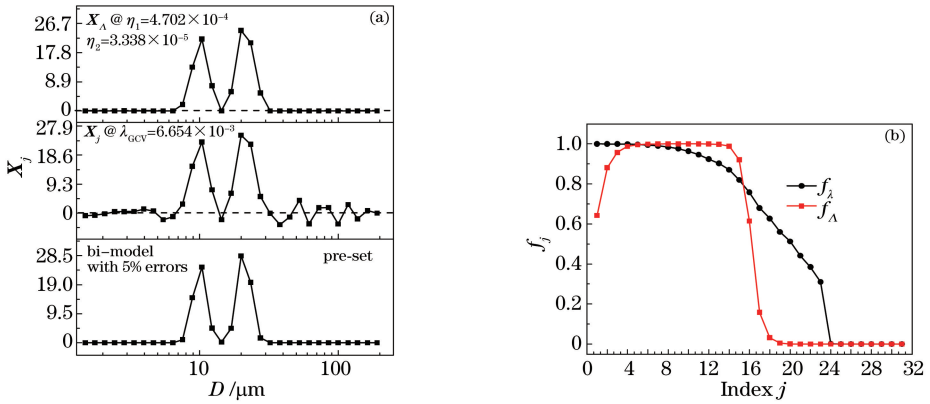


图 3 (a) 双峰颗粒系 Tikhonov 正则化反演结果; (b) 多参数正则化反演结果及其滤波函数 f_λ 与 f_A

Fig. 3 (a) Inversion results of Tikhonov regularization on a bi-modal system; (b) multi-parameter regularization inversion result and associated filter function f_λ and f_A

η_1 因子对应于后端滤波, 其数值大小直接影响着在大 j 项的滤除程度, 因此可达到直接减少振荡的作用, 如图 4(a) 所示。然而构建的函数多多少少包含着人为因素, 虽然在很大程度上能减少振荡与负值, 但仍然会不可避免地包含小范围的振荡。为此, 有必要对这部分小振荡作进一步处理。图 4(b) 中, 在保持 η_1 一定的情况下, 添加一个对应于前端滤波带调节因子的递减函数 $\eta_2 (1/k_j)^2$ 。在小 j 项上由于奇异值较大, 对噪声的放大效应不明显, 该函数的引入在一定范围内不会对减少振荡有贡献。如图 4(b) 所示, 随着调节因子 η_2 的变化, 振荡没有明显减少, 但是会对整个解产生纵向移动。 η_2 在一定范围内增大会使整个反演解往下平移, 与非负约束相结合, 残留的小振荡与负值一同被去除, 实现间接消除振荡的作用。综上, 所构建的函数(12)式在由 η_1 与 η_2 因子的协同作用下, 能获得更加光顺的反演解。

4 值模拟计算

在模拟计算中, 条件参数与第 2 部分相同。对于单峰颗粒系, 其粒径分布函数 $q_3(D)$ 采用对数正态分布; 对于多峰分布颗粒系, 粒径分布函数采用多个对数正态分布按照一定比例混合。先预设一个粒径分布函

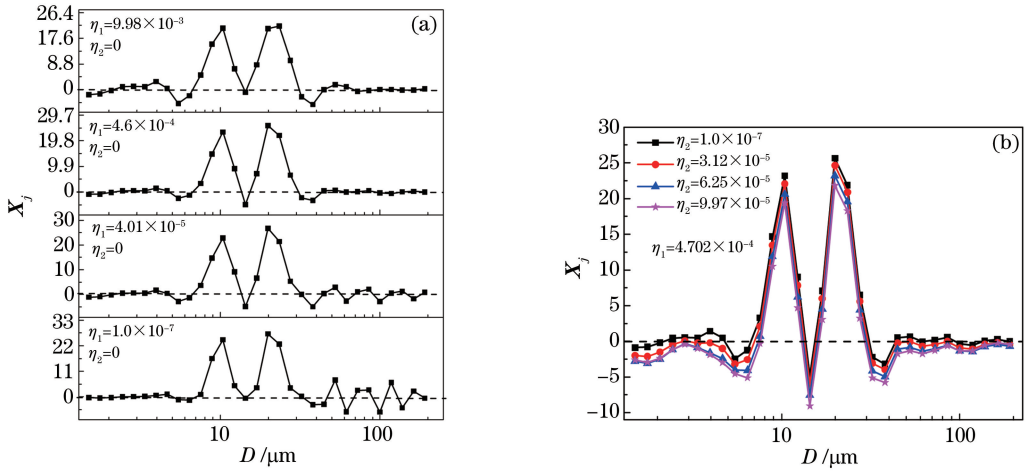


图 4 参数 η_1 与 η_2 效果分析。(a) η_2 不变 ($\eta_2=0$), 改变 η_1 数值得到的解; (b) η_1 不变 ($\eta_1=4.702 \times 10^{-4}$), 改变 η_2 数值得到的解

Fig. 4 Effect analysis of parameters η_1 and η_2 . (a) Solutions with changed η_1 and constant η_2 ($\eta_2=0$); (b) solutions with changed η_2 and constant η_1 ($\eta_1=4.702 \times 10^{-4}$)

数(具体设定参数见表 1), 模拟计算一组测量信号 $\{b_i\}$ 并计算矩阵的各元素值 A_{ij} ; Tikhonov 正则化解和最佳参数通过(5)式与(7)式求得, 并标记为 \mathbf{X}_{GCV} 与 λ_{GCV} ; 非负约束正则化解和最佳参数通过(5)式与(8)式求得, 标记为 \mathbf{X}_{NNC} 与 λ_{NNC} ; 多参数正则化解 \mathbf{X}_{MPR} 通过(11)式计算得到, 其最佳参数通过(12)式构造的函数计算。

表 1 颗粒粒径分布的参数设定

Table 1 Parameters setting of PSD

Distribution	Parameters ($\bar{D}/\mu\text{m}, \ln \sigma$)	Ratio
Mono-modal	(9.0, 0.14)	1.0
Bi-modal	(9.0, 0.11); (19.0, 0.11)	1.0:1.2
Tri-modal	(9.0, 0.11); (20.0, 0.11); (45.0, 0.11)	1.0:1.2:1.1
Quadri-modal	(8.0, 0.11); (16.0, 0.11); (32.0, 0.11); (70.0, 0.11)	1.0:1.1:1.1:1.0

图 5 给出了单峰颗粒系下的正则化算法反演结果, 非负约束正则化与多参数正则化算法都能较明显地去除振荡与负值, 但是由于非负约束情况下单个参数数值过大, 使得峰宽变宽, 如图 5(b)所示。对于图 6~8 对应的多峰分布情形, 多参数正则化算法能明显地减少振荡与负值, 同时保留更多的有用信息, 从而加强了峰与峰之间的识别能力。而非负约束正则化虽然实现了减少振荡与负值的目标, 但过大的单参数降低了分辨率, 特别是图 5(a)、图 5(b)、图 6(b)、图 7(b); 未受约束的 Tikhonov 正则化算法依然呈现出很大的振荡。

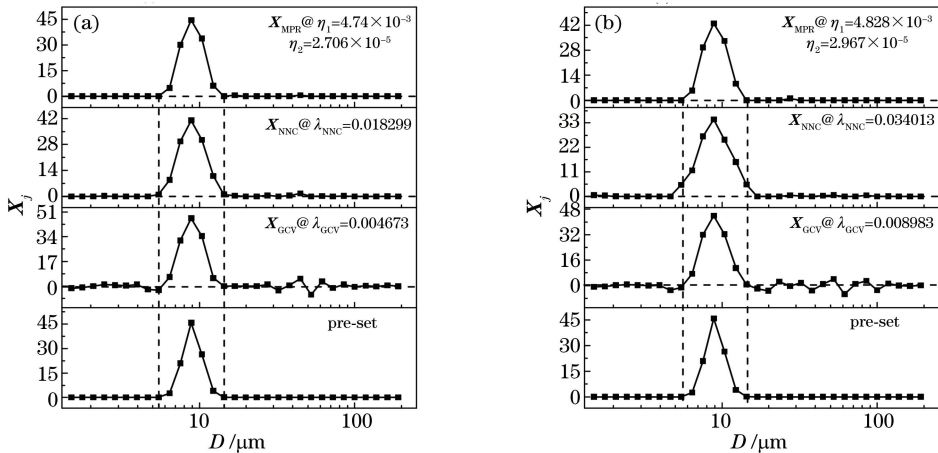


图 5 单峰颗粒系单参数/多参数正则化模拟计算结果。(a) 2% 误差; (b) 6% 误差

Fig. 5 Simulated results of single parameter/multi-parameter regularizations on a mono-modal system.

(a) 2% errors; (b) 6% errors

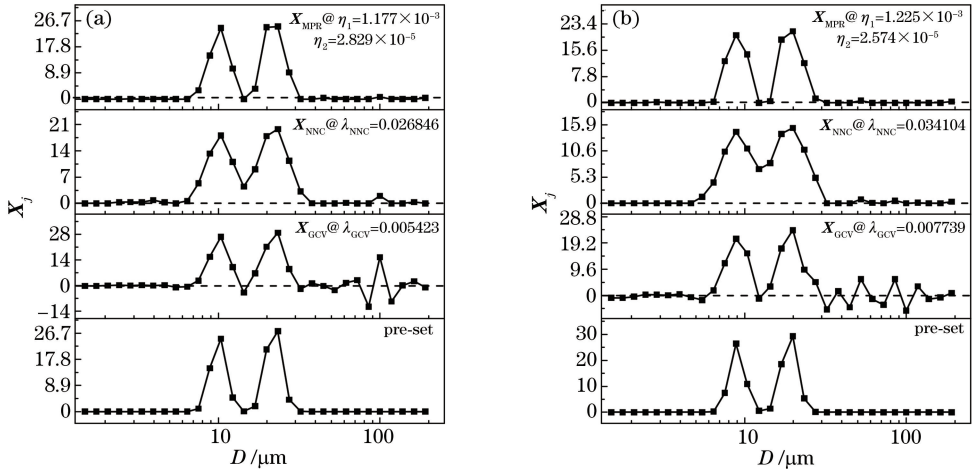


图 6 双峰颗粒系单参数/多参数正则化模拟计算结果。(a) 2%误差;(b) 6%误差

Fig. 6 Simulated results of single parameter/multi-parameter regularizations on a bi-modal system.

(a) 2% errors; (b) 6% errors

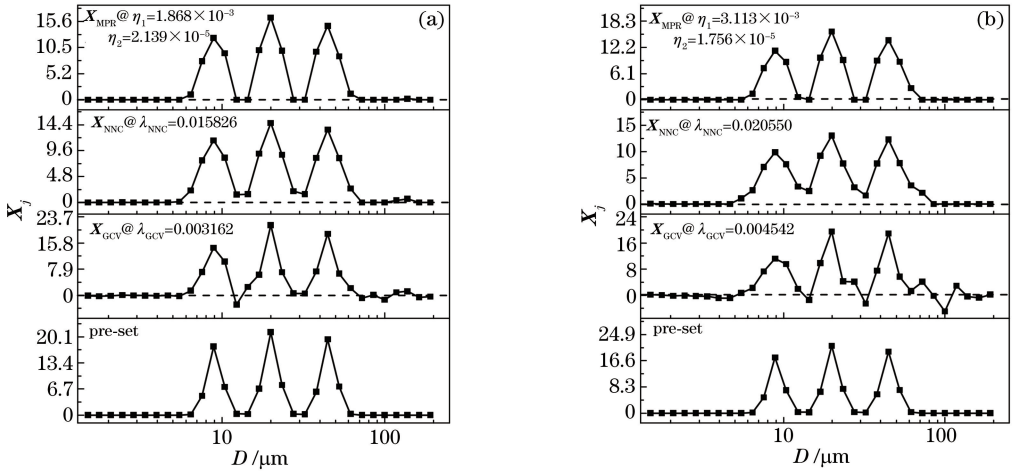


图 7 三峰颗粒系单参数/多参数正则化模拟计算结果。(a) 2%误差;(b) 6%误差

Fig. 7 Simulated results of single parameter/multi-parameter regularizations on a tri-modal system.

(a) 2% errors; (b) 6% errors

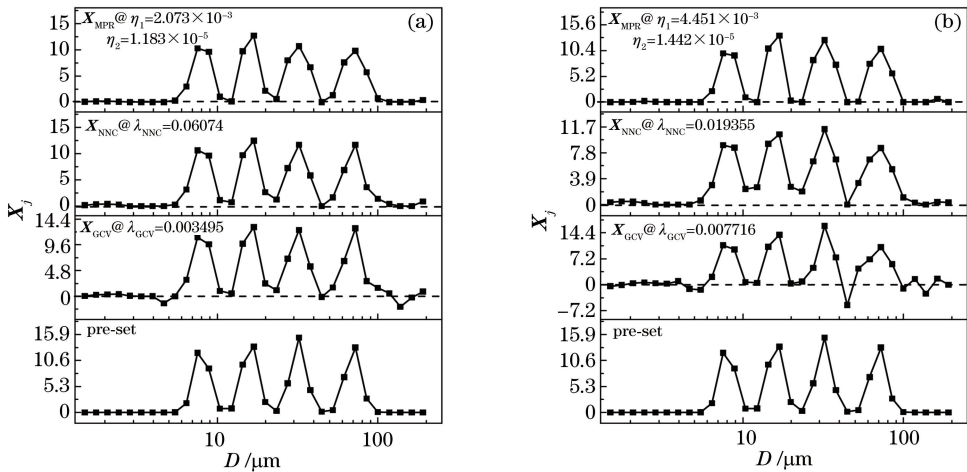


图 8 四峰颗粒系单参数/多参数正则化模拟计算结果。(a) 2%误差;(b) 6%误差

Fig. 8 Simulated results of single parameter/multi-parameter regularizations on a quadri-modal system.

(a) 2% errors; (b) 6% errors

5 实验验证

将聚苯乙烯标准颗粒(海岸鸿蒙公司生产)分散在水中,标准颗粒的标称粒径分别为 10.9, 15, 39, 76.9 μm 。样品的折射率为 $m_p = 1.59$ 、水的折射率为 $m_s = 1.33$ 、入射光波长为 0.635 μm 、接收透镜的焦距为 100 mm。为避免复散射,颗粒浓度控制在一定的范围,使得遮光率在 30%。为保障颗粒在测量区内均匀分布且不随时间明显变化,采用了丹东百特仪器有限公司生产的 BT-800 自动循环进样系统,颗粒分散在纯水中并以一定的速度循环流动。此外,对单个测试样品进行数十次重复测量并取测量平均值。

图 9 给出了标称值分别为 10.9, 15 μm 的标准颗粒测试结果,其相对误差分别为: 4.59% 与 4.00%。可以看到,和模拟结果类似、未受约束的 Tikhonov 正则化算法得到的解振荡明显,而非负约束正则化与多参数正则化算法都能使反演解变得更加光滑。同时,多参数正则化反演获得的反演峰峰宽更加窄,峰值比约束的单参数正则化算法反演解更高。图 10 给出了双峰颗粒系实验结果,多参数正则化解能清楚地识别出双峰,而 Tikhonov 正则化解依然振荡强烈、受约束单参数正则化解无法清晰分辨出双峰。

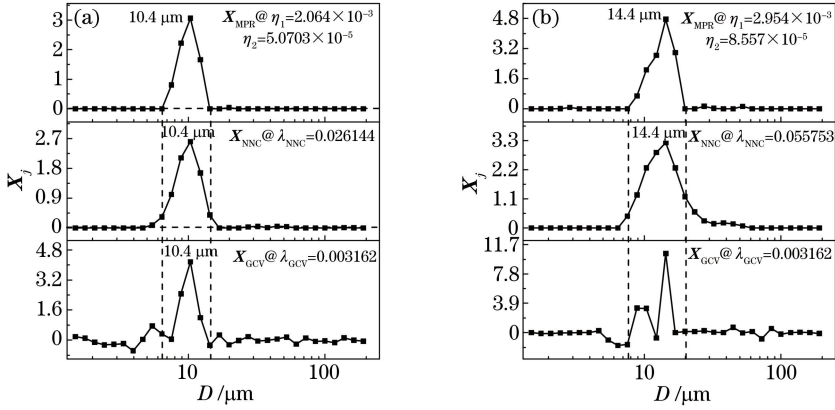


图 9 单峰颗粒系采用不同正则化算法得到的实验结果。(a)标称值为 10.9 μm ; (b)标称值为 15 μm

Fig. 9 Experimental results of mono-modal systems obtained by different regularization algorithms. (a) Labeled mean diameter is 10.9 μm ; (b) labeled mean diameter is 15 μm

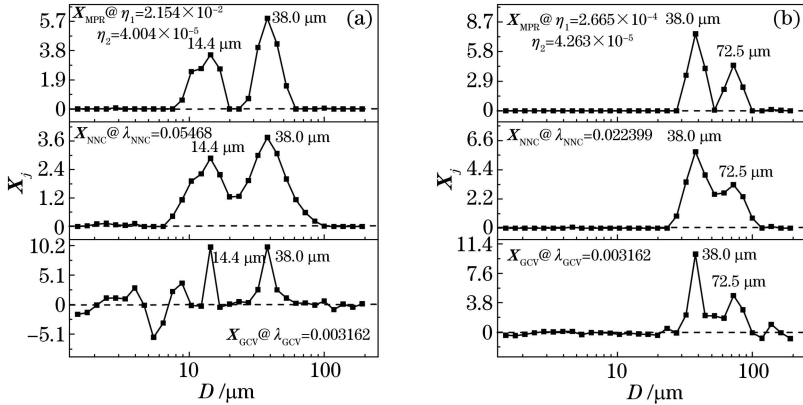


图 10 双峰颗粒系采用不同正则化算法得到的实验结果。(a)标称值为 10.9 μm 和 39 μm ;
(b)标称值为 39 μm 和 76.9 μm

Fig. 10 Experimental results of bi-modal systems obtained by different regularization algorithms. (a) Labeled mean diameters are 10.9 μm and 39 μm ; (b) labeled mean diameters are 39 μm and 76.9 μm

6 结 论

以减少前向光散射颗粒测试技术的逆运算中单参数正则化反演带来的振荡与负值为目标,发展了一种受约束的多参数正则化反演算法。构建了含双参数因子的带通形式滤波函数,由最小化约束残差为目标函数确定最佳因子,进而使滤波函数与不同程度的噪声相适应。模拟计算与实验表明,该算法能减少单参数正

则化反演带来的振荡同时能对多峰颗粒系进行较为清晰的分辨,实现对颗粒粒径的有效重建。

参 考 文 献

- 1 Jones A R. Light scattering for particle characterization[J]. Prog Energ Combust, 1999, 25(1): 1-53.
- 2 Xu R. Particle characterization: light scattering methods[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- 3 Doicu A, Wriedt T, Eremin Y A. Light scattering by systems of particles: null-field method with discrete sources: theory and programs[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.
- 4 Twomey S. On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by the inversion of the linear system produced by quadrature[J]. Journal of the ACM, 1963, 10(1): 97-101.
- 5 Phillips D L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind[J]. Journal of the ACM, 1962, 9(1): 84-97.
- 6 Yanai H, Takeuchi K, Takane Y. Projection matrices, generalized inverse matrices, singular value decomposition[J]. Statistics for Social & Behavioral Sciences, 2011, 77(3): 613-614.
- 7 Hansen P C. Truncated singular value decomposition solutions to discrete ill-posed problems with ill-determined numerical rank[J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1990, 11(3): 503-518.
- 8 Dou Zhenhai, Wang Yajing, Shen Jin, *et al.* A hybrid non-negative inversion of dynamic light scattering based on truncated singular value decomposition[J]. Chinese J Lasers, 2013, 40(6): 0608001.
 窦震海, 王雅静, 申 晋, 等. 动态光散射混合非负截断奇异值反演[J]. 中国激光, 2013, 40(6): 0608001.
- 9 Chahine M T. Determination of the temperature profile in an atmosphere from its outgoing radiance[J]. J Opt Soc Am, 1968, 58(12): 1634-1637.
- 10 Shen J Q, Riebel U. Particle size analysis by transmission fluctuation spectrometry: Experimental results obtained with a Gaussian beam and analog signal processing[J]. Part Part Syst Char, 2003, 20(4): 250-258.
- 11 Shen J Q, Yu B, Wang H R, *et al.* Smoothness-constrained projection method for particle analysis based on forward light scattering[J]. Appl Optics, 2008, 47(11): 1718-1728.
- 12 Vauhkonen M, Vadasz D, Karjalainen P A, *et al.* Tikhonov regularization and prior information in electrical impedance tomography[J]. IEEE T Med Imaging, 1998, 17(2): 285-293.
- 13 Fuhry M, Reichel L. A new Tikhonov regularization method[J]. Numerical Algorithms, 2012, 59(3): 433-445.
- 14 Hansen P C. Regularization tools: A Matlab package for analysis and solution of the discrete ill-posed problems[J]. Numerical Algorithms, 1994, 6(1): 1-35.
- 15 Hansen P C. The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems [M]. Lyngby: Department of Mathematical Modeling, 1999.
- 16 Hansen P C, O' Leary D R. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1993, 14(6): 1487-1503.
- 17 Grace W. A comparison of GCV and GML for choosing the smoothing parameter in the generalized spline smoothing problem[J]. The Annals of Statistics, 1985, 13(4): 1378-1402.
- 18 Gene H G, Michael H, Grace W. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter[J]. Technometrics, 1979, 21(2): 215-223.
- 19 Landi G, Zama F. The active-set method for nonnegative regularization of linear ill-posed problems[J]. App Math Com Sc, 2006, 175(1): 715-729.
- 20 Rojas M, Steihaug T. An interior-point trust-region-based method for large-scale non-negative regularization[J]. Inverse Probl, 2002, 18(5): 1291-1307.
- 21 Teng Y Y, Zhang Y N, Li H, *et al.* A convergent non-negative deconvolution algorithm with Tikhonov regularization [J]. Inverse Prob, 2015, 31(3): 035002.
- 22 Wang Y J, Du J J, Dou Z H. Non-negative Tikhonov regularization inversion combing trust region with interior point newton for photon correlation spectroscopy[J]. Information Technology Journal, 2013, 12(19): 4864-4869.
- 23 Milner T E, Goodman D M, Tanenbaum B S, *et al.* Depth profiling of laser-heated chromophores in biological tissues by pulsed photothermal radiometry[J]. J Opt Soc Am A, 1995, 12(7): 1479-1488.
- 24 Lin C J, Shen J Q, Wang T E. Use of non-negative constraint in Tikhonov regularization for particle sizing based on forward light scattering[J]. J Mod Optic, 2016, 63(16): 1630-1637.
- 25 Leung C M, Lu W S. A multiple-parameter generalization of the Tikhonov-Miller regularization method for image restoration[C]. Signals, Systems and Computers, 1993 Conference Record of The Twenty-Seventh Asilomar Conference

on IEEE, 1993: 856-860.

- 26 Chen Z Y, Lu Y, Xu Y S, *et al.* Multi-parameter Tikhonov regularization for linear ill-posed operator equations[J]. Journal of Computational Mathematics, 2008, 26(1): 37-55.
- 27 Lu Y, Shen L X, Xu Y S. Shadow block iteration for solving linear systems obtained from wavelet transforms[J]. Appl Comput Harmon A, 2005, 19(3): 359-385.
- 28 Wang Naining, Cai Xiaoshu, Zheng Gang, *et al.* Optical particle sizing and its application[M]. Beijing: Atomic Energy Press, 2000: 168-179.
王乃宁, 蔡小舒, 郑 刚, 等. 颗粒粒径的光学测量技术及应用[M]. 北京: 原子能出版社, 2000: 168-179.