

多模阶跃光纤纤芯传导模式的快速求解

史 尘¹ 王小林^{1,2,3*} 陆启生^{1,2,3}

¹国防科学技术大学光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073

²高能激光技术湖南省重点实验室, 湖南 长沙 410073

³大功率光纤激光协同创新中心, 湖南 长沙 410073

摘要 在多模光纤模式色散求解、光纤耦合模理论分析以及锥形光纤的模式演化等过程中,都涉及到多模阶跃光纤纤芯传导模式的特征方程的求解,计算量很大,从而直接影响整体的计算效率。分析了牛顿迭代法及其收敛速度的优势。求解弱导近似下的标量模式特征方程时,利用第一类贝塞尔函数的零点确定其解区间,再结合牛顿迭代法在区间内快速求解特征方程。将此求解过程引入矢量模式特征方程求解中,并结合上下边界截弦的方式快速判断特征方程尾根与首根的存在性问题。将此方法的计算结果与 OptiFiber 软件的计算结果作对比,画出光纤的模式色散曲线,验证了该快速求解方法的正确性。

关键词 光纤光学; 特征方程; 纤芯传导模式; 牛顿迭代法; 数值逼近

中图分类号 TN252

文献标识码 A

doi: 10.3788/CJL201643.1006002

Fast Solution of Fiber Core Conduction Mode in Multimode Step-Index Fiber

Shi Chen¹ Wang Xiaolin^{1,2,3} Lu Qisheng^{1,2,3}

¹College of Opto-Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China

²Human Provincial Key Laboratory of High Energy Laser Technology, Changsha, Hunan 410073, China

³Collaborative Innovation Center of High Power Fiber Laser, Changsha, Hunan 410073, China

Abstract The solution of characteristic equation of multimode step-index fiber core conduction mode is involved in many cases, such as the mode dispersion solution of multimode fiber, the theory analysis of optical fiber coupled-mode, and the mode evolution of tapered fiber. The large computation capability of this solution affects the whole computational efficiency directly. The Newton-Raphson iteration method is analyzed and it has obvious advantage in convergence speed. In the solving process of scalar mode characteristic equation under the weak-guidance approximation, we use the zero point of the type I Bessel function to determine the interval of roots, then solve the characteristic equation quickly in the interval by combining the Newton-Raphson iteration method. The solving process is introduced in the solving of vector mode characteristic equation, and its first root and last root are determined quickly by combining the way of upper and lower boundary chord intercept. Finally, we compare the calculation results of our method with the results of OptiFiber software, draw the mode dispersion curve of fiber, and verify the accuracy of our method.

Key words fiber optics; characteristic equation; fiber core conduction mode; Newton-Raphson method; numerical approaching

OCIS codes 060.2400; 140.3510

收稿日期: 2016-04-14; 收到修改稿日期: 2016-06-17

基金项目: 国家自然科学基金(61505260)

作者简介: 史 尘(1989—),男,博士研究生,主要从事光纤激光器方面的研究。E-mail: bigbryant@nudt.edu.cn

导师简介: 陆启生(1942—),男,教授,博士生导师,主要从事激光与物质相互作用方面的研究。

E-mail: luqsheng@public.cs.hn.cn

* 通信联系人。E-mail: chinawxllin@163.com

1 引 言

自 1970 年美国康宁公司成功研制了第一根低损耗光纤以来,由于光纤具有光束质量好、成本低、紧凑性好等优点被广泛应用于光通信、工业加工、光纤传感等领域^[1-3]。在长距离通信中,光纤模式色散的计算^[4]、不同模场光纤熔接损耗的计算^[5]及模式分解^[6]、锥形光纤的模场演化及模式耦合^[7]等都涉及到多模阶跃光纤纤芯传导模式的求解,且计算量较大。因此,寻找针对纤芯传导模式特征方程的快速、精确、稳定的解法非常重要。目前对于纤芯传导模式方程的数值解法主要分为区间内的二分法^[8]和截弦法^[9]两种。在计算量较大的情况下,二分法的收敛速度慢;由于光纤特征方程的特点,截弦法的收敛速度明显对趋近无穷大的一侧边界的收敛速度具有很大的依赖性,而该侧边界较难估计准确。

本文详细分析了多模阶跃光纤纤芯中的线偏振(LP)模式与精确矢量模式特征方程的特点及其解法。由于采用牛顿迭代法精确确定解区间,本文方法在求解速度方面有很大优势。针对在求解方程过程中容易遗漏根的区间问题进行了详细的探讨并给出了判断根存在性的判据,从而有效解决了求解过程中存在漏解的问题。本文所提出的计算方法为多模阶跃光纤纤芯传导模式的求解提供了快速有效的工具以及理论参考。

2 弱导近似下的线偏振模式特征方程求解

2.1 牛顿迭代法及其收敛速度分析

牛顿迭代法是针对非线性方程和超越方程的一种非常有效的数值求解方法。其基本思想如下:设实函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且可导,存在 $x^* \in [a, b]$ 满足 $f(x^*) = 0$, 设 x_0 为 x^* 的一个估计值, 则 $f(x^*)$ 在 x_0 处的泰勒展开式为

$$f(x^*) = 0 = f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + O[(x^* - x_0)^2], \tag{1}$$

当 x_0 在 x^* 附近时, 忽略其截断误差, 得到 x^* 的近似值 x_1 的表达式为

$$x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0), \tag{2}$$

其几何意义为点 $(x_1, 0)$ 是函数 $f(x)$ 在点 $[x, f(x)]$ 处的切线与 x 轴的交点, 因此牛顿迭代法又叫牛顿切线法。对于牛顿迭代法的收敛性这里不再赘述, 事实上 x_1 比 x_0 更加接近 x^* , 因此继续迭代得到数列 $\{x_n\}$ 最终收敛于 x^* 。图 1 为牛顿迭代法的示意图。图中曲线为 $f(x)$, 其在图中所示区间内连续可导, 并且 $f(x) = 0$ 在此区间内有根。 x_0 为初始估计值, x_1 和 x_2 分别为第一、第二次迭代的解。在每一次迭代中, 通过计算 $f(x_n)$ 的值考察精度, 若 $f(x_n)$ 已经足够接近 0, 那么 x_n 即为满足精度要求的 x^* 的近似。

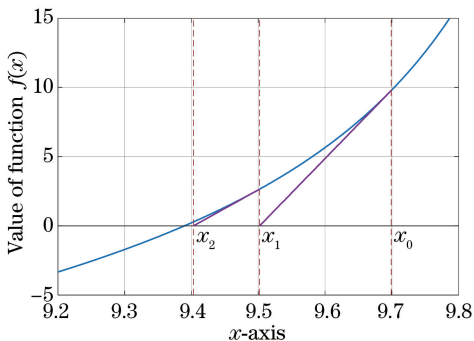


图 1 牛顿迭代法示意图

Fig. 1 Illustration of Newton-Raphson method

下面将牛顿迭代法与目前常用的二分法和截弦法的收敛速度作对比。在数值分析中, 定义^[10]: 迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x^* , 如果存在实数 $p \geq 1$ 和常数 $C \neq 0$, 且当 $n \geq n_0$ 时 $x_n \neq x^*$, 则渐近关系式为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(x_{n+1} - x^*) / (x_n - x^*)^p] = C, \tag{3}$$

若(3)式成立, 则称序列为 p 阶收敛。收敛阶数越高, 其收敛速度越快。

对于二分法, 由于每次逼近将区间长度缩小一半, 所以逼近的精度取决于当前区间的长度。设第 n 轮迭代之后区间长度为 l_n , 且满足 $x_n - x^* = l_n$, 则二分法的渐近关系式为 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x^*) / (x_n - x^*) = l_{n+1} / l_n = 1/2$, 可知

二分法为线性收敛($p = 1$)。截弦法与牛顿法类似,截弦法用差商代替了微商,故其收敛阶数为 $1 < p < 2^{[10]}$ 。

对于牛顿迭代法, $f(x^*)$ 在 x_n 处的展开式为

$$f(x^*) = 0 = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x^* - x_n)^2, \quad (4)$$

式中 ξ_n 位于 x^* 和 x_n 之间,将(4)式两边同时除以 $f'(x_n)$ 并将其代入(2)式,可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(x_{n+1} - x^*) / (x_n - x^*)^2] = f''(\xi_n) / 2f'(x_n). \quad (5)$$

与二分法和截弦法相比,牛顿迭代法具有更快的收敛速度。为了定量地比较这 3 种数值迭代方法,分别使用 3 种方法求解同一方程,此方程表达式为

$$x [J_1(x) / J_0(x)] = \sqrt{11.2^2 - x^2} [K_1(\sqrt{11.2^2 - x^2}) / K_0(\sqrt{11.2^2 - x^2})], \quad (6)$$

式中 $J_0(x)$ 、 $J_1(x)$ 和 $K_0(x)$ 、 $K_1(x)$ 分别为对应阶数的第一类贝塞尔函数和第二类修正贝塞尔函数。求解(6)式,得到上述方程在区间(3.8317, 5.5201)内的根(所求得解为 $V=11.2$ 时的 LP_{02} 模式横向归一化相位参数)。

在相同初始条件、相同精度的前提下,在 Matlab 软件中分别采用 3 种方法对(6)式进行 5000 次求解,最终得到的耗时以及求解迭代次数如表 1 所示。

表 1 Matlab 软件中 3 种数值迭代方法的求解速度及迭代次数对比

Table 1 Solving speeds and numbers of iteration of the three different numerical iteration methods in Matlab

Iterative algorithm	Total elapsed time /s	Number of iteration
Newton-Raphson method	31.970	12
Chord iteration method	39.890	14
Dichotomy method	60.856	44

从表 1 可以得到,牛顿迭代法和截弦法的收敛速度都比较理想,这主要得益于它们超线性收敛的特点,而二分法达到同样的精度需要更多的收敛步数,这与之前的分析结论一致。在实际应用中,求解特征方程的计算量远超过 5000 次,则牛顿迭代法在求解速度方面具有很大的优势。

2.2 线偏振模式特征方程分析

阶跃光纤的折射率分布为

$$n(r) = \begin{cases} n_1 & r \leq a \\ n_2 & r > a \end{cases}, \quad (7)$$

式中 a 为纤芯半径, n_1 和 n_2 分别为纤芯和包层的折射率。为了保证纤芯对光的约束,折射率应满足 $n_1 > n_2$ 。在弱导近似条件下,假设 $n_1 \approx n_2$,则矢量模式简化为标量的线偏振模式,其传导模式的特征方程为^[11]

$$UJ_{l+1}(U) / J_l(U) = WK_{l+1}(W) / K_l(W), \quad (8)$$

$$U = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_{\text{eff}}^2}, \quad (9)$$

$$W = k_0 a \sqrt{n_{\text{eff}}^2 - n_2^2}, \quad (10)$$

式中 $J_l(U)$ 、 $J_{l+1}(U)$ 分别为 l 阶、 $l+1$ 阶第一类贝塞尔函数, $K_l(W)$ 、 $K_{l+1}(W)$ 分别为 l 阶、 $l+1$ 阶第二类修正贝塞尔函数, k_0 为光的自由空间波数($k_0 = 2\pi/\lambda$), n_{eff} 为传导模式的有效折射率, U 为归一化横向相位参数, W 为归一化横向衰减参数。若记光纤的归一化截止频率为 V ,那么 V 、 U 、 W 之间的关系式为

$$V^2 = U^2 + W^2. \quad (11)$$

由于在弱导近似下,纤芯的传导模式特征方程形式简单,因此首先从线偏振模式入手来分析多模光纤特征方程的解法。将(8)式函数中的自变量 W 通过(11)式代换为 U ,分别画出(8)式中等号左右两侧关于自变量 U 的函数图像,如图 2 所示。图中横轴为归一化横向相位参数 U ,纵轴为计算得到对应的函数值。图 2 计算中取贝塞尔函数阶数 $l=1$,纤芯直径为 $65 \mu\text{m}$,波长 $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$,纤芯数值孔径 $NA = 0.1$,通过计算得到 $V = 13.17$ 。

A、B 曲线的交点即为特征方程的根,设贝塞尔函数的阶数为 l ,则两曲线的第 p 个交点即为线偏振模式 LP_{lp} 的根。由(8)式可知,曲线 A 的零点和无穷大奇点分别为函数 $J_{l+1}(U)$ 和 $J_l(U)$ 的零点,由于曲线 A 具有周期性,可以确定特征方程第 l 阶的第 p 个根 U_{lp} 位于函数 $J_{l+1}(U)$ 的第 p 个零点与函数 $J_l(U)$ 的第 p 个

零点之间(零点包括 $U=0$)。确定解区间后,定义目标函数为

$$f_l(U) = U \frac{J_{l+1}(U)}{J_l(U)} - W \frac{K_{l+1}(W)}{K_l(W)}. \quad (12)$$

利用贝塞尔函数递推关系式,得到(12)式关于 U 的导函数为

$$f'_l(U) = U \left[\frac{J_{l+1}(U)}{J_l(U)} \right]^2 - 2l \frac{J_{l+1}(U)}{J_l(U)} + U \left[\frac{K_{l+1}(W)}{K_l(W)} \right]^2 - 2l \frac{UK_{l+1}(W)}{WK_l(W)}. \quad (13)$$

利用(12)、(13)式,结合牛顿迭代法,可在解区间中快速求解特征方程。

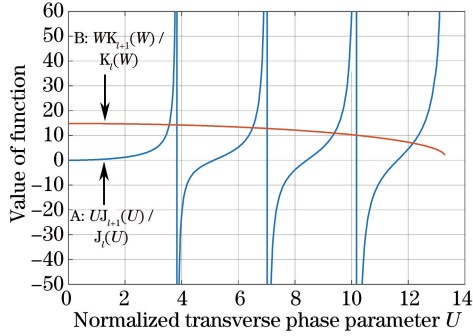


图 2 线偏振模特征方程函数图像

Fig. 2 Illustration of characteristic equation of linearly polarized mode

2.3 尾根存在性讨论

求解纤芯传导模式的特征方程时, U 的取值在区间 $(0, V)$ 内,这时需要判断在 $J_{l+1}(U)$ 的最后一个零点与 V 之间是否存在特征方程的根。使用与图 2 中相同的贝塞尔函数阶数、纤芯直径、波长,不同的是将纤芯数值孔径减小为 0.085,得到图 3 所示的函数曲线,此时 $V=11.20$ 。可以看出,图 3 中最后一个根是不存在的,这与图 1 不同。造成这种差异的主要原因是当 $U \rightarrow V$ 时, $\lim_{U \rightarrow V} W [K_{l+1}(W)/K_l(W)]$ 的值与 V 无关,此时 $W \rightarrow 0$,但 $\lim_{U \rightarrow V} U [J_{l+1}(U)/J_l(U)] = V [J_{l+1}(V)/J_l(V)]$ 的值与 V 值相关。图 3 的例子中,减小数值孔径导致纤芯 V 值减小,因此特征方程在 $J_{l+1}(U)$ 的最后一个零点与 V 之间无解。

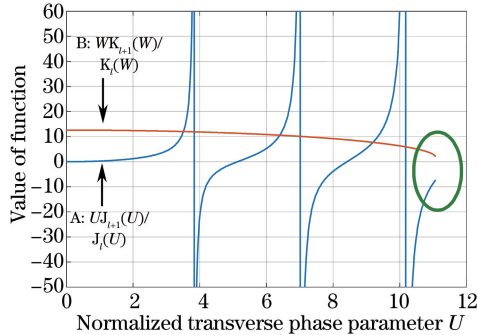


图 3 尾根不存在的情况示意图

Fig. 3 Illustration in the case without the last root

为了判断尾根是否存在,使用小宗量近似考察 $WK_{l+1}(W)/K_l(W)$ 在 $U \rightarrow V$ 处的极限,并与 $VJ_{l+1}(V)/J_l(V)$ 的值作对比。根据中值定理,当且仅当 $VJ_{l+1}(V)/J_l(V) > \lim_{U \rightarrow V} WK_{l+1}(W)/K_l(W)$ 时,尾根存在。第二类修正贝塞尔函数的小宗量($z \rightarrow 0$)近似式^[12]为

$$K_l(z) \approx \begin{cases} -\ln z + (\ln 2 - \gamma) & l = 0 \\ \frac{(l-1)!}{2} \left(\frac{2}{z}\right)^l & l \neq 0 \end{cases}, \quad (14)$$

式中 γ 为欧拉常数,且 $\gamma \approx 0.577$ 。由(14)式可以导出其极限为

$$\lim_{U \rightarrow V} \frac{WK_{l+1}(W)}{K_l(W)} = \begin{cases} 0 & l = 0 \\ 2l & l \neq 0 \end{cases}. \quad (15)$$

综上所述,导出了弱导近似下特征方程尾根存在的条件为

$$VJ_{l+1}(V)/J_l(V) > 2l. \quad (16)$$

2.4 线偏振模式求解仿真验证

为了验证上述计算方法的正确性,在阶跃光纤折射率分布(图4)条件下,求解弱导光纤中的模式。选择光纤尺寸纤芯和包层的直径分别为 105 μm、125 μm,入射波长为 1550 nm,纤芯折射率 $n_1 = 1.500652043019595$,纤芯数值孔径 $NA = 0.06$ 。

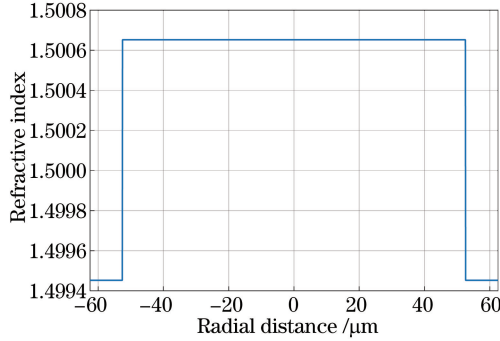


图4 光纤折射率分布曲线

Fig. 4 Fiber refractive index profile

分别使用单侧导数逼近法和软件 OptiFiber 对上述光纤中的线偏振模式进行求解,求解结果对比如表 2 所示。

表2 单侧导数逼近法和 OptiFiber 软件对线偏振模式的计算结果对比

Table 2 Results comparison of LP mode calculated by unilateral derivative approximation method and OptiFiber software

LP mode	Unilateral derivative approximation method	OptiFiber	LP mode	Unilateral derivative approximation method	OptiFiber
LP(0, 1)	1.500615482062037	1.5006155	LP(3, 2)	1.500057467810980	1.5000575
LP(0, 2)	1.500460056193436	1.5004601	LP(3, 3)	1.499617952475429	1.4996180
LP(0, 3)	1.500183665832580	1.5001837	LP(4, 1)	1.500289830159226	1.5002898
LP(0, 4)	1.499796085825699	1.4997961	LP(4, 2)	1.499891460752375	1.4998915
LP(1, 1)	1.500559320605556	1.5005593	LP(5, 1)	1.500168868508237	1.5001689
LP(1, 2)	1.500342777066055	1.5003428	LP(5, 2)	1.499711538241277	1.4997115
LP(1, 3)	1.500008434390372	1.5000084	LP(6, 1)	1.500033175579126	1.5000332
LP(1, 4)	1.499577264661680	1.4995773	LP(6, 2)	1.499519749673883	1.4995197
LP(2, 1)	1.500485673827049	1.5004857	LP(7, 1)	1.499883168177555	1.4998832
LP(2, 2)	1.500208257314998	1.5002083	LP(8, 1)	1.499719267485602	1.4997193
LP(2, 3)	1.499818740605877	1.4998187	LP(9, 1)	1.499541943952064	1.4995419
LP(3, 1)	1.500395609772320	1.5003956			

由表 2 可以得到,使用单侧导数逼近法与 OptiFiber 软件计算得到的模式数量以及标号一致。OptiFiber 给出的有效折射率均为 8 位有效数字,与本文方法计算的有效折射率一致,说明上述对于线偏振模式的逼近方法是精确的。

3 矢量模式特征方程求解

3.1 矢量模式特征方程分析

弱导近似必须是在纤芯与包层的折射率非常接近的前提下,而实际中大芯径的光纤数值孔径很难做到非常小,纤芯包层折射率差较大。对于大芯径的多模光纤,使用精确的矢量模式分析是非常必要的。阶跃光纤的矢量模式特征方程为^[13]

$$m^2 \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \left(\frac{n_1^2}{U^2} + \frac{n_2^2}{W^2} \right) = [\bar{J}_m(U) + \bar{K}_m(W)] [n_1^2 \bar{J}_m(U) + n_2^2 \bar{K}_m(W)], \quad (17)$$

$$\begin{cases} \bar{J}_m(U) = \frac{J'_m(U)}{UJ_m(U)} \\ \bar{K}_m(W) = \frac{K'_m(W)}{WK_m(W)} \end{cases}, \quad (18)$$

式中 $J'_m(U)$ 和 $K'_m(W)$ 为贝塞尔函数对于其相应自变量的一阶导数, U 和 W 的定义与(8)式相同。为了与线偏振模式区别, 不再使用下标 l 和 p , 这里使用 m 表示贝塞尔函数的阶次, 使用 n 表示解的序号。画出(17)式等号两侧的函数图像, 如图 5 所示, 其中横轴为参数 U , 纵轴为计算的函数值, 计算中取贝塞尔函数阶数 $m=1$, 纤芯直径为 $65 \mu\text{m}$, 波长为 $1.55 \mu\text{m}$, 数值孔径 $NA=0.085$, 通过计算得到 $V=11.20$ 。曲线 A 为(17)式等号右侧函数图像, 曲线 B 为(17)式等号左侧函数的图像。图中圈内位置即为特征方程的根。

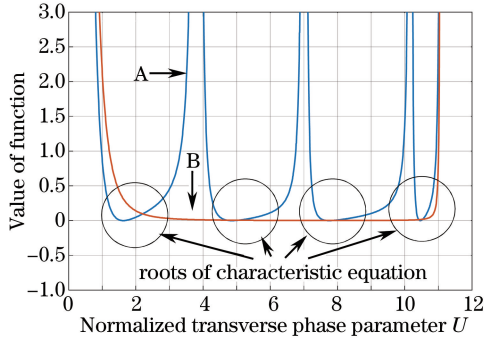


图 5 矢量模式特征方程函数图像

Fig. 5 Illustration of vector mode characteristic equation

3.1.1 贝塞尔函数阶次为 0 ($m=0$)

当 $m=0$ 时, 分析横向电场(TE)和横向磁场(TM)两种模式下特征方程的根。当贝塞尔函数阶次为 0 时, 曲线 B 与横轴重合, 此时特征方程的根即为函数

$$\begin{cases} \bar{J}_0(U) + \bar{K}_0(W) = 0 & \text{TE} \\ n_1^2 \bar{J}_0(U) + n_2^2 \bar{K}_0(W) = 0 & \text{TM} \end{cases} \quad (19)$$

的根。利用贝塞尔函数导数递推式, 将(19)式转化为

$$\begin{cases} \frac{J_1(U)}{UJ_0(U)} - l \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) + \frac{K_1(W)}{WK_0(W)} = 0 & \text{TE} \\ \frac{n_1^2 J_1(U)}{UJ_0(U)} - l \left(\frac{n_1^2}{U^2} + \frac{n_2^2}{W^2} \right) + \frac{n_2^2 K_1(W)}{WK_0(W)} = 0 & \text{TM} \end{cases} \quad (20)$$

由于(20)式的解区间与贝塞尔函数 $J_0(U)$ 的零点相关联, 利用牛顿迭代法, 可以求得矢量模式中 TM 模式和 TE 模式的解。图 6 为(20)式中第一个等式等号左侧的函数图像, 图像计算时使用的光纤参数与图 5 保持一致。由图像可知, TE 模式的最后一个根位于 V 值与 V 值左侧的零阶贝塞尔函数零点之间, 其他根位于零阶贝塞尔函数的相邻零点之间。区间确定后, 结合单侧导数逼近法可以快速求解 TM/TE 模式的特征

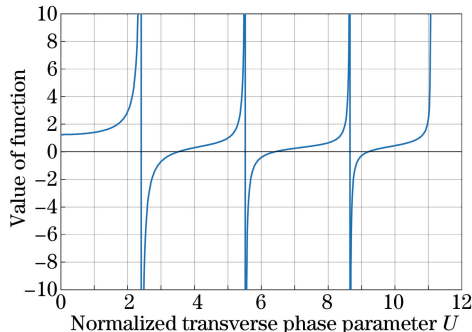


图 6 TE 模式特征方程函数图像

Fig. 6 Illustration of TE mode characteristic equation

方程的根。事实上,由于 TM 模式和 TE 模式的特征方程形式非常接近,仅在系数上略有差别,因此 TM 模式和 TE 模式的特征方程的根非常接近,即 TM/TE 模式是近似简并的。观察图 5 中曲线 A 与横轴 $y=0$ 的交点也可以得到类似的结论。

3.1.2 贝塞尔函数阶次大于 0 ($m > 0$)

当 $m > 0$ 时,分析 EH 和 HE 混合模式(EH 和 HE 为电场与磁场的纵向、横向分量均不为 0 的混合模式)下的特征方程的根。当贝塞尔函数阶次大于 0 时,(17)式左侧的函数不再恒为 0,而是一条呈“U”型且恒大于 0 的曲线。由图 5 可知,曲线 A 和 B 的交点与曲线 A 的零点非常靠近,因此可通过曲线 A 与横轴的交点精确确定特征方程的根的范围,从而快速求解特征方程。

首先求曲线 A 与横轴的交点,即方程

$$[\bar{J}_m(U) + \bar{K}_m(W)] [n_1^2 \bar{J}_m(U) + n_2^2 \bar{K}_m(W)] = 0 \quad (21)$$

的根。该方程的解法在 3.1.1 节中已进行了讨论,在此不再赘述。由于(21)式的根成对出现,将其第 n 对根记为 $(z_{n,0}, z_{n,1})$,其中 $z_{n,0} < z_{n,1}$,则 $EH_{m,n}$ 模式的根位于贝塞尔函数 $J_m(U)$ 的第 n 个零点(不含 $U=0$)与 $z_{n+1,0}$ 之间,且 $HE_{m,n}$ 模式的根位于 $z_{n,1}$ 与贝塞尔函数 $J_m(U)$ 的第 n 个零点(不含 $U=0$)之间。同样定义目标函数为

$$F_m(U) = [\bar{J}_m(U) + \bar{K}_m(W)] [n_1^2 \bar{J}_m(U) + n_2^2 \bar{K}_m(W)] - m^2 \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \left(\frac{n_1^2}{U^2} + \frac{n_2^2}{W^2} \right). \quad (22)$$

利用贝塞尔函数关系式和链式求导法可得

$$[\bar{J}_m(U)]'_U = -\frac{2m}{U^3} - \frac{1}{U} + \frac{2(m+1)}{U^2} \left[\frac{J_{m+1}(U)}{J_m(U)} \right] - \frac{1}{U} \left[\frac{J_{m+1}(U)}{J_m(U)} \right]^2, \quad (23)$$

$$[\bar{K}_m(W)]'_U = \frac{U}{W} \left\{ \frac{2m}{W^3} - \frac{1}{W} - \frac{2(m+1)}{W^2} \left[\frac{K_{m+1}(W)}{K_m(W)} \right] + \frac{1}{W} \left[\frac{K_{m+1}(W)}{K_m(W)} \right]^2 \right\}, \quad (24)$$

$$\left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right)'_U = \frac{2U}{W^4} - \frac{2}{U^3}. \quad (25)$$

利用(23)~(25)式,可以求得 $F_m(U)$ 的导数,结合确定的解区间并利用牛顿迭代法快速求解特征方程。

3.2 $HE_{m,1}$ 模式存在性讨论

线偏振模式的最后一个根容易出现漏根的情况,而矢量模式中最后一个根的存在性是非常明确的。但是当纤芯的 V 值小于贝塞尔函数 $J_m(U)$ 的第一个零点的时候,可能出现找不到 $F_m(U)=0$ 的根的情况,此时(22)式的根(即模式 $HE_{m,1}$ 特征方程的根)仍然可能存在。下面针对这种情况讨论在何种情况下 $HE_{m,1}$ 模式存在,并且讨论该情况的解法。

当纤芯的 V 值小于贝塞尔函数 $J_m(U)$ 的第一个零点时,(17)式中等号两侧的函数曲线如图 7 所示。

图 7 中曲线 A、B 分别为(17)式的右侧、左侧的函数图像。从图中可以看到,曲线 B 始终在曲线 A 的上方。当 $U \rightarrow V$ 时,曲线 A、B 都趋于正无穷,此时对曲线 A 和 B 作差,由于精度问题,得到的图像与横轴也没有交点,而且在趋近区间边界时趋于无穷。

为方便讨论,以 W 为自变量,将 $HE_{m,1}$ 模式特征方程的两侧分别定义为两个函数 $g_m(W)$ 和 $h_m(W)$,

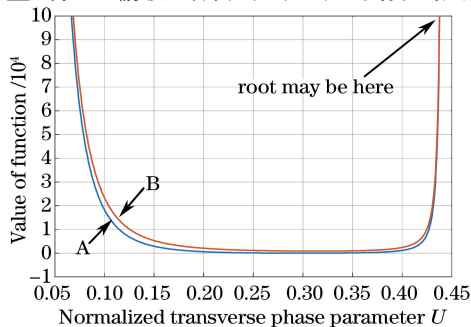


图 7 $HE_{m,1}$ 模式特征方程的根的存在性讨论函数图像

Fig. 7 Illustration for the existence discussion of the root of $HE_{m,1}$ mode characteristic equation

$$g_m(W) = [\bar{J}_m(U) + \bar{K}_m(W)] [n_1^2 \bar{J}_m(U) + n_2^2 \bar{K}_m(W)], \quad (26)$$

$$h_m(W) = m^2 \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \left(\frac{n_1^2}{U^2} + \frac{n_2^2}{W^2} \right). \quad (27)$$

当 $U \rightarrow V$ 时, 显然 $W \rightarrow 0$ 。 $g_m(W)$ 和 $h_m(W)$ 的小宗量近似式分别为

$$g_m(W) \approx n_1^2 \bar{J}_m^2(V) - \frac{m(n_1^2 + n_2^2) \bar{J}_m(V)}{W^2} + \frac{m^2 n_2^2}{W^4}, \quad (28)$$

$$h_m(W) \approx \frac{m^2 n_1^2}{V^4} + \frac{m^2(n_1^2 + n_2^2)}{V^2 W^2} + \frac{m^2 n_2^2}{W^4}. \quad (29)$$

为了避免无穷大相减产生的精度问题, 在这种情况下定义新的目标函数为

$$R_m(U) = g_m(W) / h_m(W) - 1. \quad (30)$$

由(28)、(29)式, 可以得到 $R_m(U)$ 的极限为

$$\lim_{U \rightarrow V} R_m(U) = \frac{W^4 n_1^2 \bar{J}_m^2(V) - W^2 m(n_1^2 + n_2^2) \bar{J}_m(V) + m^2 n_2^2}{W^4 n_1^2 / V^4 + W^2 m^2(n_1^2 + n_2^2) / V^2 + m^2 n_2^2} - 1 = 0. \quad (31)$$

显然, 在特征方程的根为 0 的位置, 函数 $R_m(U)$ 的值也为 0。因此, 若在 3.1.2 节中叙述的零点 $z_{m,1}$ 与 V 之间存在解时, 根据中值定理, 当 $R_m(z_{m,1}) < 0$ 时, 导出模式 $HE_{m,1}$ 存在的条件为

$$R_m(V - \xi) > 0, \quad (32)$$

式中 ξ 为一个很小的量, 且 $\xi \rightarrow 0^+$ 。

由于 $R_m(U)$ 的凹凸性在区间内并不恒定, 为避免牛顿迭代法产生振荡影响收敛速度, 当确定区间内有解时, 使用截弦法求得该区间内的解。

3.3 矢量模式求解仿真验证

为了验证上述对矢量模式特征方程的求解方法的正确性, 分别采用单侧导数逼近法和 OptiFiber 软件求解光纤中的矢量模式特征方程。取光纤尺寸纤芯与包层直径分别为 105 μm 、125 μm , 入射波长为 1550 nm, 纤芯折射率 $n_1 = 1.500652043019595$, 纤芯数值孔径 $NA = 0.12$ 。经过计算, 纤芯内共支持 HE 模式 88 个、EH 模式 72 个、TE 模式和 TM 模式各 8 个, 此结果与 OptiFiber 软件的计算结果一致。由于模式数量较多, 表 3 只列出 4 种模式中有效折射率最大和最小时的计算结果。

表 3 单侧导数逼近法与 OptiFiber 软件对光纤纤芯矢量模式的计算结果对比

Table 3 Results comparison of fiber core vector mode calculated by unilateral derivative approximation method and OptiFiber software

Mode	Unilateral derivative approximation method	OptiFiber	Mode	Unilateral derivative approximation method	OptiFiber
TE(0,1)	1.500552042431102	1.5005520	HE(1,1)	1.500612638612590	1.5006126
TM(0,1)	1.500551995649867	1.5005520	EH(1,1)	1.500472386216595	1.5004724
TE(0,2)	1.500316998935787	1.5003170	HE(1,2)	1.500444506284832	1.5004445
TM(0,2)	1.500316846339907	1.5003168	EH(1,2)	1.500169792559741	1.5001698
TE(0,3)	1.499948158573944	1.4999482	HE(1,3)	1.500142379786224	1.5001424
TM(0,3)	1.499947852134277	1.4999479	EH(1,3)	1.499734082353421	1.4997341
TE(0,4)	1.499446474217767	1.4994465	HE(1,4)	1.499706889004909	1.4997069
TM(0,4)	1.499445984186595	1.4994460	EH(1,4)	1.499166255027712	1.4991663
TE(0,5)	1.498813598101174	1.4988136	EH(18,1)	1.496630860768283	1.4966309
TM(0,5)	1.498812923543230	1.4988129	HE(18,2)	1.495887807217875	1.4958878
TE(0,6)	1.498052631684155	1.4980526	HE(19,1)	1.496978078898116	1.4969781
TM(0,6)	1.498051817696445	1.4980518	EH(19,1)	1.496267652305162	1.4962677
TE(0,7)	1.497170464472565	1.4971705	HE(20,1)	1.496629426481286	1.4966294
TM(0,7)	1.497169638679518	1.4971696	EH(20,1)	1.495889769191773	1.4958898
TE(0,8)	1.496191636830357	1.4961916	HE(21,1)	1.496266006949347	1.4962660
TM(0,8)	1.496191145719980	1.4961911	HE(22,1)	1.495887893655243	1.4958879

同样如表 3 所示, 单侧导数逼近法与 OptiFiber 软件计算得到的模式数量以及标号一致, 且 OptiFiber

得出的有效折射率均为 8 位有效数字,与矢量模式分析法的计算结果一致,说明上述对于矢量模式的求解方法是精确的。

此外,使用单侧导数逼近法计算并画出了数值孔径为 0.12 的阶跃光纤的精确模式色散曲线,如图 8 所示。

图 8 色散曲线中,曲线重合的模式被写在了一起,可以看到,HE_{1n} 模式没有与之简并的模式,所以对应线偏振模式中的 LP_{0n} 模式;HE_{2n} 模式与 TM_{0n}/TE_{0n} 模式简并,形成 LP_{1n} 模式;更高阶的模式中,HE_{m+1,n} 模式与 EH_{m-1,n} 模式简并,成为 LP_{mn} 模式。在图 8 中,所有模式简并为线偏振模式从上至下依次为 LP₀₁, LP₁₁, LP₂₁, LP₀₂, LP₃₁, LP₁₂, LP₄₁, LP₂₂, LP₀₃, LP₅₁, LP₃₂, LP₆₁, LP₁₃, LP₄₂, LP₇₁ 模式。同样计算数值孔径为 0.5 的阶跃光纤的模式色散曲线,如图 9 所示。

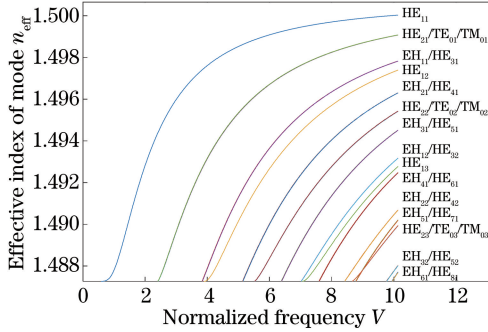


图 8 阶跃光纤(NA=0.12)模式色散曲线
Fig. 8 Mode dispersion curves of step-index fiber (NA=0.12)

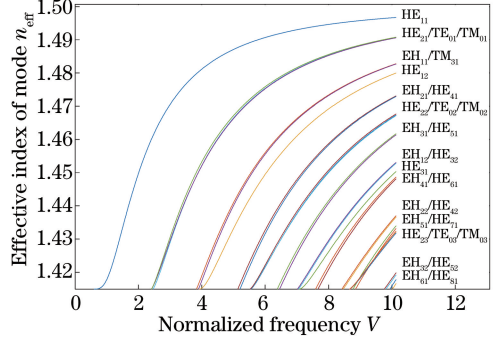


图 9 阶跃光纤(NA=0.5)模式色散曲线
Fig. 9 Mode dispersion curves of step-index fiber (NA=0.5)

比较图 8 与图 9 可以明显看出,当纤芯包层折射率差增大时,线偏振模式的简并发生了击破,每个 LP 模式中的精确模式色散曲线开始发生分裂。两次计算的结果体现了从弱导近似条件到简并击破条件的演化,从侧面证明了本文方法的正确性。

4 结 论

详细叙述了计算多模阶跃光纤纤芯传导模式特征方程的快速数值解法,分析了牛顿迭代法的收敛速度优势并给出了易遗漏根区间是否有根的快速判据,并使用 OptiFiber 软件验证所提方法的正确性。

1) 分析了弱导近似条件下纤芯导模的特征方程,分析了方程根的存在区间,并采用牛顿迭代法快速求解特征方程;对易于遗漏尾根的区间进行了探讨,得出了尾根存在的条件,从而有效解决了特征方程根遗漏的问题。

2) 分析了矢量模式的特征方程,并通过第一次迭代快速找到混合模式的解区间,再通过第二次迭代快速得到特征方程的根;对于 HE_{m1} 模式特征方程的根的存在性进行了探讨,提出使用比值法解决无穷大相减产生的精度问题,从而判断根的存在性,有效解决了 HE_{m1} 模式特征方程的根遗漏问题。

3) 将该计算结果与 OptiFiber 软件的计算结果作对比,并画出光纤的模式色散曲线,验证了所提计算方法的正确性。

该计算方法为光纤光栅设计和锥形光纤模式演化的计算提供理论参考以及快速的计算工具。

致 谢 部分研究工作在多伦多大学完成,感谢多伦多大学物理系 Muniz 博士和 Sipe 教授的有益探讨。

参 考 文 献

- 1 段云锋,黄榜才,张 鹏,等. 高能量脉冲光纤激光器的研究进展及其应用[J]. 光通信技术, 2006(8): 55-57.
- 2 Zhao Xin. High-power pulsed laser technology and its application in the field of industrial[J]. Equipment Manufacturing

Technology, 2013(4): 141-143.

赵 鑫. 高功率脉冲激光技术及其在工业领域的应用[J]. 装备制造技术, 2013(4): 141-143.

- 3 Fu Xinghu, Xie Haiyang, Yang Chuanqing, *et al.* Research on the temperature sensing characteristics of triple cladding quartz specialty fiber based on cladding mode resonance[J]. Acta Physica Sinica, 2016, 65(2): 024211.

付兴虎, 谢海洋, 杨传庆, 等. 基于包层模谐振的三包层石英特种光纤温度传感特性[J]. 物理学报, 2016, 65(2): 024211.

- 4 Hocker G B, Burns W K. Mode dispersion in diffused channel waveguides by the effective index method[J]. Applied Optics, 1977, 16(1): 113-118.

5 Mohammed W S, Mehta A, Johnson E G. Wavelength tunable fiber lens based on multimode interference[J]. Journal of Lightwave Technology, 2004, 22(2): 469-477.

- 6 Huang L J, Guo S F, Leng J Y, *et al.* Real-time mode decomposition for few-mode fiber based on numerical method[J]. Optics Express, 2015, 23(4): 4620-4629.

7 Soh D B S, Nilsson J, Baek S, *et al.* Modal power decomposition of beam intensity profiles into linearly polarized modes of multimode optical fibers[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2004, 21(7): 1241-1250.

- 8 Yang Chun, Xia Zhichao. Propagation constant solution for large core and high numerical aperture step-index multimode optical fiber[J]. Acta Optica Sinica, 2004, 24(7): 957-960.

杨 春, 夏志超. 大芯径大数值孔径阶跃光纤传导模特征方程求解[J]. 光学学报, 2004, 24(7): 957-960.

- 9 Li Lijun, Lai Yongzheng, Cao Maoyong, *et al.* Calculation and simulation of optical fiber core and cladding mode effective refractive index[J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(14): 140201.

李丽君, 来永政, 曹茂永, 等. 光纤纤芯及包层模有效折射率计算及仿真[J]. 物理学报, 2013, 62(14): 140201.

- 10 Tyrtysnikov E E. A brief introduction to numerical analysis[M]. New York: Springer Science + Business Media, 2012.

11 刘德明, 向 清, 黄德修. 光纤光学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.

- 12 Snyder A W, Love J D. Optical waveguide theory[M]. New York: Springer Science + Business Media, 2012.

- 13 Liao Yanbiao, Jin Huiming. Fiber optics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1992.

廖延彪, 金慧明. 光纤光学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1992.