

# 非平面环形谐振腔模式光强分布的数值仿真

汪之国 肖光宗 丁志超 卢广峰 杨开勇

国防科学技术大学光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073

**摘要** 利用柯林斯公式, 采用有限单元法建立了环形腔本征光场的计算模型, 求出了模式横截面上的光强分布。在平面环形腔中, 反射镜的像散导致其模式光强分布在弧矢平面和子午平面不对称, 基模为椭圆光斑, 但高阶模可分离。在非平面环形腔中, 随着图像旋转角逐渐变大, 弧矢平面和子午平面分量发生了耦合, 高阶模的光场分布随坐标旋转角的变化清晰地给出了坐标旋转对光场模式的影响。当采用  $90^\circ$  旋转腔时, 光强分布近乎轴对称, 但与直腔有着本质不同。

**关键词** 激光光学; 环形谐振腔; 有限元传输矩阵法; 本征模式

**中图分类号** O436 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/CJL201542.s102009

## Numerical Analysis of Intensity Distribution in Nonplanar Ring Resonators

Wang Zhiguo Xiao Guangzong Ding Zhichao Lu Guangfeng Yang Kaiyong

*College of Opto-Electronic Science and Engineering, National University of Defense  
Technology, Changsha, Hunan 410073, China*

**Abstract** In order to calculate the intensity distribution of ring resonators, a numerical model is obtained with Collins' formula and finite element propagation matrix method. The intensity distribution of planar resonator is unsymmetrical due to astigmatism. The axis mode has an elliptic facula, but high order mode can be detached. When increasing the coordinate rotation angle in the nonplanar ring resonator, components in the tangential plane and sagittal plane are coupled. The intensity distribution of high order modes changes with the coordinate rotation angle which shows the influence of coordinate rotation angle on the field modes. The intensity distribution of ring resonator with  $90^\circ$  rotation is nearly axis-symmetrical, but it is different from that in the linear resonator.

**Key words** laser optics; ring resonator; finite element propagation matrix; eigen-mode

**OCIS codes** 140.3410; 030.4070; 140.3370

## 1 引 言

环形谐振腔具有许多独特的性质而得到广泛的应用, 如用于激光陀螺<sup>[1-3]</sup>、单频窄线宽激光器<sup>[4]</sup>、引力波测量装置<sup>[5]</sup>、加速器物理学中的光源<sup>[6]</sup>等。激光陀螺是一种高精度的角速度测量器件, 对环形谐振腔中的各种非互易误差非常敏感<sup>[7]</sup>, 优化的谐振腔不仅有助于提高激光陀螺的性能, 而且还可增强激光陀螺对外界干扰的抵抗能力。现有文献已对非平面环形腔的光轴失调敏感性<sup>[8]</sup>、偏振特性<sup>[9-10]</sup>、高斯光束特性<sup>[11-12]</sup>进行了研究, 但还未对环形谐振腔内的光强分布进行详细的讨论。本文利用柯林斯公式, 采用有限单元法建立了环形腔本征光场的计算模型, 进而求出了光场分布, 详细讨论了非平面环形腔中图像旋转对模式的调整。所得结论对环形谐振腔模式性质的理解, 以及激光陀螺谐振腔的优化设计具有一定的参考价值。

**收稿日期:** 2015-01-24; **收到修改稿日期:** 2015-02-26

**基金项目:** 国家自然科学基金(61308059)

**作者简介:** 汪之国(1982—), 男, 博士, 讲师, 主要从事激光与光电子技术方面的研究。E-mail: maxborn@163.com

\* 通信联系人。E-mail: yky208@nudt.edu.cn

## 2 环形腔光场分析的有限元传输矩阵模型

### 2.1 环形腔的广义衍射积分公式

以图 1 中由 4 边构成的等边长等入射角环形腔为例进行分析,图中  $P_i (i=1,2,3,4)$  为顶点,边长为  $l$ ,每个反射镜上的入射角为  $\theta$ ,点  $P_1$  和  $P_2$  处为曲率半径为  $R$  的球面镜, $P_3$  和  $P_4$  处为平面镜,光阑  $S$  位于边  $P_1P_2$  的中点, $\beta$  为平面  $P_1P_2P_4$  和平面  $P_2P_4P_3$  构成的夹角。平面环形腔为  $\beta=0$  的特例。

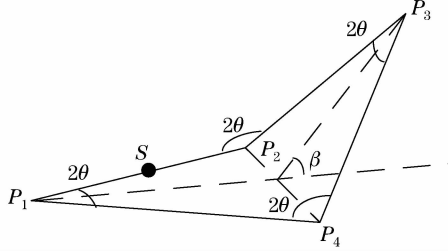


图 1 环形腔结构示意图

Fig. 1 Schematic diagram of a ring resonator

对于感兴趣的环形腔,由于反射镜和毛细管的横向尺寸比光阑的横向尺寸大得多,衍射效应主要由光阑产生,因此可将问题进行简化,即只考虑光阑  $S$  的限模作用,而将整个环形腔用其  $ABCD$  传输矩阵等效。从腔内光阑  $S$  处出发的光场沿环路传播一圈后再次回到  $S$  处,相当于经过  $ABCD$  传输矩阵,如图 2 所示。

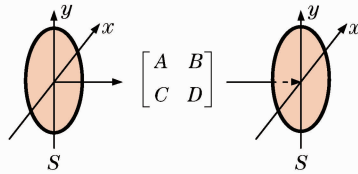


图 2 环形谐振腔光场仿真模型

Fig. 2 Simulation model of optical field in the ring resonator

环形腔为非轴对称光学系统,其  $ABCD$  矩阵要用  $4 \times 4$  变换矩阵  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  描述<sup>[13]</sup>。空间域的广义惠更斯-菲涅耳衍射积分为:

$$E_2(x_2, y_2, z) = \left( -\frac{i}{\lambda \sqrt{|B|}} \right) \exp(ikz) \iint_{S_1} E_1(x_1, y_1, 0) \cdot \exp \left\{ \frac{ik}{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B^{-1}A & -B^{-1} \\ C - DB^{-1}A & DB^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\} dx_1 dy_1, \quad (1)$$

式中  $\lambda$  为波长,  $k=2\pi/\lambda$ ,  $z$  为传输轴上的坐标,  $E_1(x_1, y_1, 0)$  为源点的光场,  $E_2(x_2, y_2, z)$  为待求点的光场,积分对源点  $(x_1, y_1, 0)$  所在  $z=0$  的  $S_1$  面进行,  $A, B, C, D$  均为  $2 \times 2$  矩阵,上标  $T$  为转置,  $|B|$  为  $B$  的行列式,上标  $-1$  表示矩阵求逆。

根据激光腔中光场的自再现条件可知,环形腔中光束环绕一周后再次到达积分面的场与出发场的分布完全相同,除了幅度相差一复数  $\gamma$ 。因此对环形腔本征光场的求解就转化为对如下积分方程的求解:

$$\gamma E_1(x_1, y_1) = \left( -\frac{i}{\lambda \sqrt{|B|}} \right) \exp(ikz) \iint_{S_1} E_1(x_1, y_1) \cdot \exp \left\{ \frac{ik}{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B^{-1}A & -B^{-1} \\ C - DB^{-1}A & DB^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\} dx_1 dy_1. \quad (2)$$

### 2.2 有限元传输矩阵算法

(2)式不存在解析解,必须采用数值计算的方法。有限元传输矩阵算法由文献[14]提出,该算法将FOX-LI算法<sup>[15]</sup>中大量的迭代过程转化为本征矩阵方程特征向量的求解,一次求解就可以得到大量模式,而且对任意形状的激光镜以及非稳腔都适用<sup>[16]</sup>。其原理为:

将源场积分区域划分为  $g$  个单元,将二维连续函数  $E_1(x_1, y_1)$  离散为  $E_1[1], E_1[2] \cdots E_1[g]$ , 这样源场就可用列向量  $E_1 = [E_1[1] \ \dots \ E_1[g]]^T$  来表示。当划分数足够大时,每个单元上复振幅起伏很小,可设为均匀分布,因此  $E_1[m]$  与积分变量  $x$  和  $y$  无关,可从积分号内提出,得到:

$$\gamma E_1[n] = \sum_{m=1}^g E_1(m) \left( -\frac{i}{\lambda \sqrt{|B|}} \right) \exp(ikz) \iint_{S_1} \exp \left\{ \frac{ik}{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B^{-1}A & -B^{-1} \\ C - DB^{-1}A & DB^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\} dx_1 dy_1, \quad (3)$$

也可表示为:

$$\gamma E_1[n] = \sum_{m=1}^g E_1[m] A[n, m], \quad (4)$$

式中:

$$A[n, m] = \left( -\frac{i}{\lambda \sqrt{|B|}} \right) \exp(ikz) \iint_{S_{n,m}} \exp \left\{ \frac{ik}{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B^{-1}A & -B^{-1} \\ C - DB^{-1}A & DB^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\} dx_1 dy_1, \quad (5)$$

记  $U = \begin{bmatrix} E_1[1] \\ E_1[2] \\ \vdots \\ E_1[g] \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} A[1,1] & A[1,2] & \cdots & A[1,g] \\ A[2,1] & A[2,2] & \cdots & A[2,g] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A[g,1] & A[g,2] & \cdots & A[g,g] \end{bmatrix}$ , 可将(4)式写成矩阵的形式,得:

$$\gamma U = VU. \quad (6)$$

于是光场的求解就转化为矩阵  $V$  的本征向量和本征值  $\gamma$  的求解,不同的本征向量对应不同阶的模式,光场沿环形腔环绕一圈的衍射损耗为  $\delta = 1 - |\gamma|^2$ 。

### 2.3 腔结构和参量定义

自由传输距离  $l$  的  $4 \times 4$  变换矩阵为<sup>[8]</sup>:

$$M(l) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

采用文献[17]所提出的 NCS 坐标系,则入射角为  $\theta$  时反射镜的  $4 \times 4$  变换矩阵为:

$$M(R, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2/R/\cos\theta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2\cos\theta/R & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

式中  $R$  为反射镜的曲率半径,易知平面镜的变换矩阵为单位阵。

在非平面腔中,由于毗邻的两个反射镜法线不共面,光束在前一反射镜的出射面传输到后一反射镜入射面时要进行坐标旋转,旋转矩阵为<sup>[8]</sup>:

$$M(\rho) = \begin{bmatrix} \cos\rho & \sin\rho & 0 & 0 \\ -\sin\rho & \cos\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\rho & \sin\rho \\ 0 & 0 & -\sin\rho & \cos\rho \end{bmatrix}, \quad (9)$$

平面环形腔相当于  $\rho=0$  的情况。

### 3 非平面环形腔光场特性分析

非平面环形腔要考虑坐标旋转,设光阑平面的  $x$  轴在球面镜  $P_2$  的入射面内,从光阑出发的光束绕环形腔运行一周的  $ABCD$  矩阵为:

$$M = M\left(\frac{l}{2}\right)M(\rho)M(R,\theta)M(\rho)M(l)M(\rho)M(l)M(\rho)M(l)M(\rho)M(l)M(R,\theta)M\left(\frac{l}{2}\right), \quad (10)$$

对图 1 所示的等边等角非平面腔,反射镜上入射角  $\theta$  与每边的旋转角  $\rho$  的关系为<sup>[8]</sup>,

$$\sin^2\theta = \frac{\cos\rho}{1 + \cos\rho}. \quad (11)$$

设环形腔边长为 50 mm,球面镜曲率半径 4 m,光阑为半径 0.75 mm 的圆孔。当旋转角为  $0^\circ$  时,环形腔为平面腔,计算结果如图 3 所示,这里仅给出前 3 阶模式横截面上的光强分布。由于在环形谐振腔中球面镜的等效焦距在弧矢面和子午面内分别为  $R\cos\theta/2 = \sqrt{2}$  m 和  $R/(2\cos\theta) = 2\sqrt{2}$  m,因此基模为椭圆形,且在  $x$  方向的光斑半径小于  $y$  方向的光斑半径。

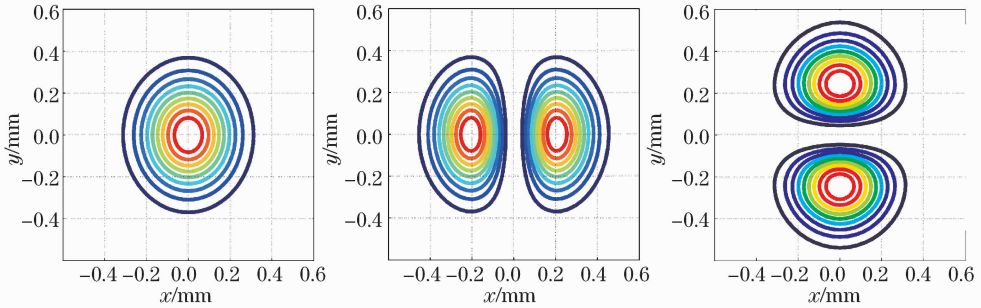


图 3 平面腔模式的等光强面。(a) 00 模;(b) 10 模;(c) 01 模

Fig. 3 Contour of equal Intensity for planar cavity. (a) Mode 00;(b) mode 10;(c) mode 01

下面分别取总旋转角为  $5^\circ, 20^\circ, 45^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ ,计算相应模式的光强分布,模式损耗最小的前 3 阶模的结果如图 4~11 所示, $90^\circ$  旋转腔模式损耗第 4、6、7 的光强分布如图 12 所示,第 5 阶模式与第 4

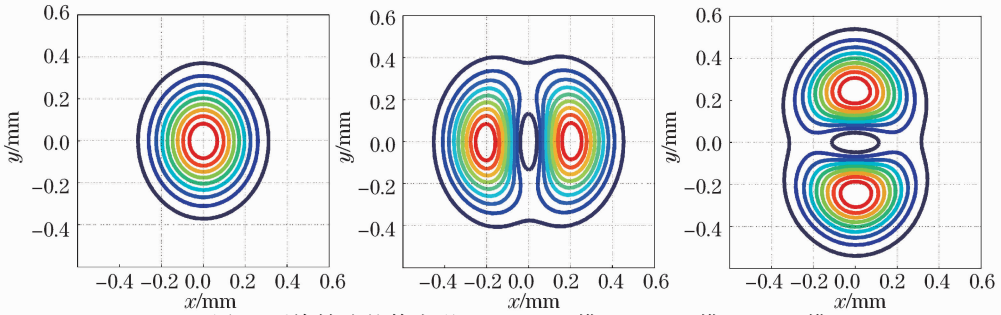


图 4  $5^\circ$  旋转腔的等光强面。(a) 00 模。(b) 10 模;(c) 01 模

Fig. 4 Contour of Intensity for  $5^\circ$  rotation resonator. (a) Mode 00;(b) mode 10;(c) mode 01

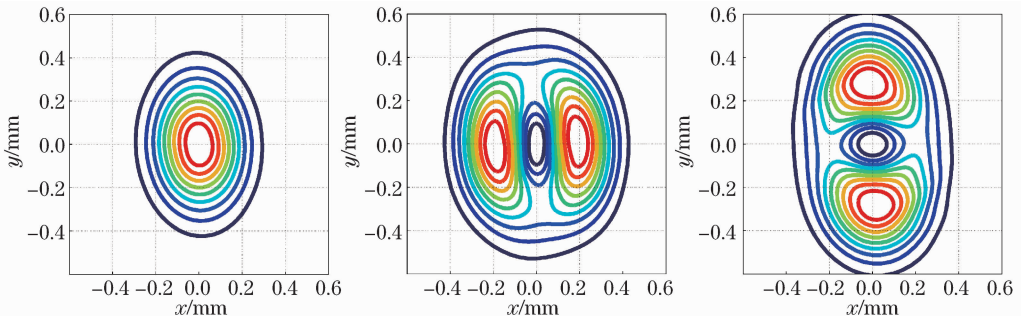


图 5  $20^\circ$  旋转腔的等光强面。(a) 00 模;(b) 10 模;(c) 01 模

Fig. 5 Contour of Intensity for  $20^\circ$  rotation resonator. (a) Mode 00;(b) mode 10;(c) mode 01

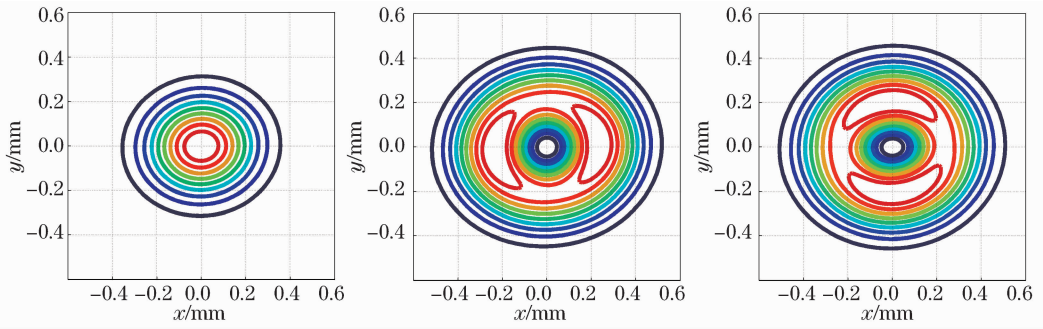


图 6 45°旋转腔的等光强面。(a) 00 模;(b) 10 模;(c) 01 模

Fig. 6 Contour of Intensity for 45° rotation resonator. (a) Mode 00;(b) mode10;(c) mode 01

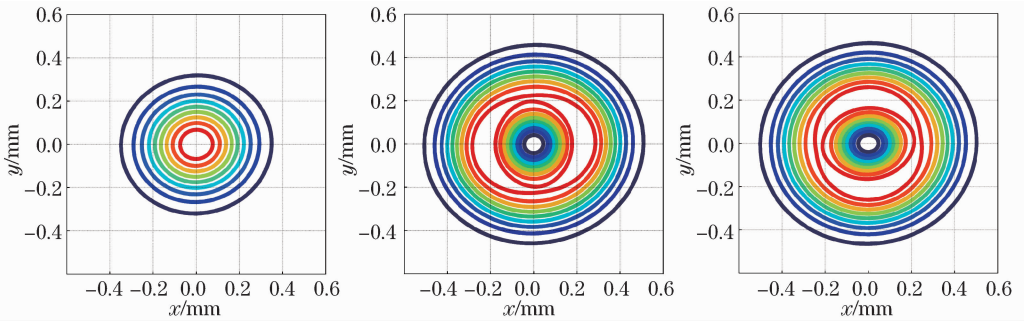


图 7 50°旋转腔的等光强面。(a) 00 模;(b) 10 模;(c) 01 模

Fig. 7 Contour of Intensity of 50° rotation resonator. (a) Mode 00;(b) mode10;(c) mode 01

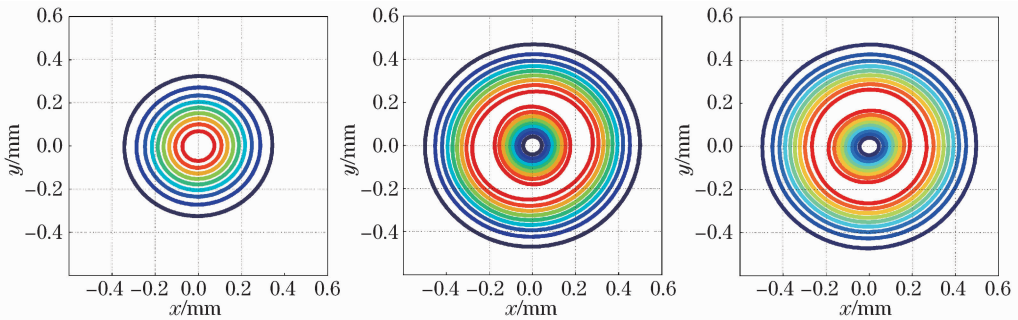


图 8 60°旋转腔的等光强面。(a) 00 模;(b) 10 模;(c) 01 模

Fig. 8 Contour of Intensity for 60° rotation resonator. (a) Mode 00;(b) mode10;(c) mode 01

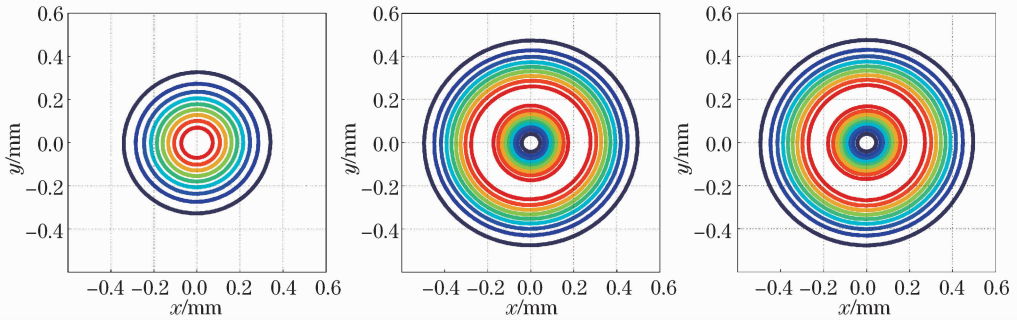


图 9 70°旋转腔的等光强面。(a) 00 模;(b) 10 模;(c) 01 模

Fig. 9 Contour of Intensity for 70° rotation resonator. (a) Mode 00;(b) mode10;(c) mode 01

个简并因而没有给出。由计算结果可知:1)与正方形环形腔相比,坐标旋转导致  $x$  和  $y$  方向的模式产生了“耦合”,高阶模体现的更为清晰,坐标原点周围和最外层逐渐出现闭合的等光强线,随着旋转角从  $0^\circ$  逐渐增大,等光强线密度逐渐增大;2)当坐标旋转为  $90^\circ$  时,光场模式具有非常好的轴对称性,消除了像散导致的模式等光强面的椭圆度,且 01 和 10 模基本相同已不可区分;3)当坐标旋转角达到  $180^\circ$  时,光场模式在某一个方



向上可分离,与平面腔模式类似;4)90°旋转腔的模式更接近轴对称模,但与直腔轴对称模式又有着本质不同,例如没有出现轴向节点。

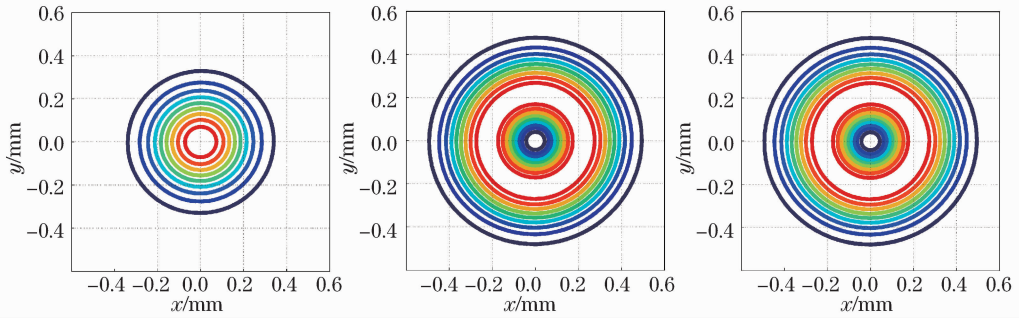


图 10 90°旋转腔的等光强面。(a) 00 模;(b) 10 模;(c) 01 模

Fig. 10 Contour of Intensity for 90° rotation resonator. (a) Mode 00;(b) mode10;(c) mode 01

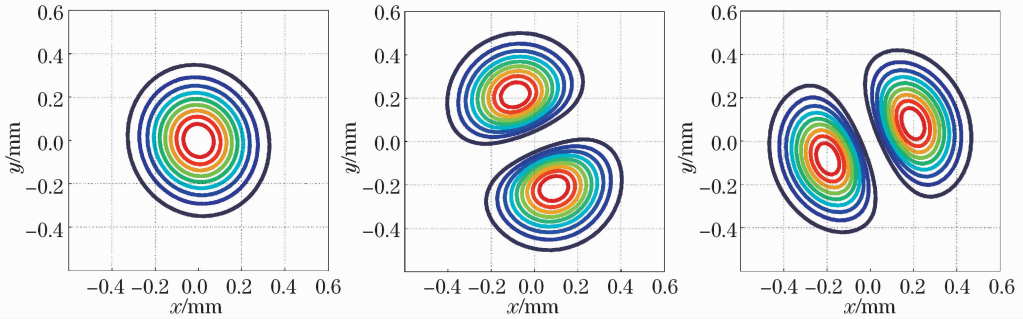


图 11 180°旋转腔的等光强面。(a)00 模;(b)10 模;(c)01 模

Fig. 11 Contour of Intensity for 180° rotation resonator. (a) Mode 00;(b) mode10;(c) mode 01

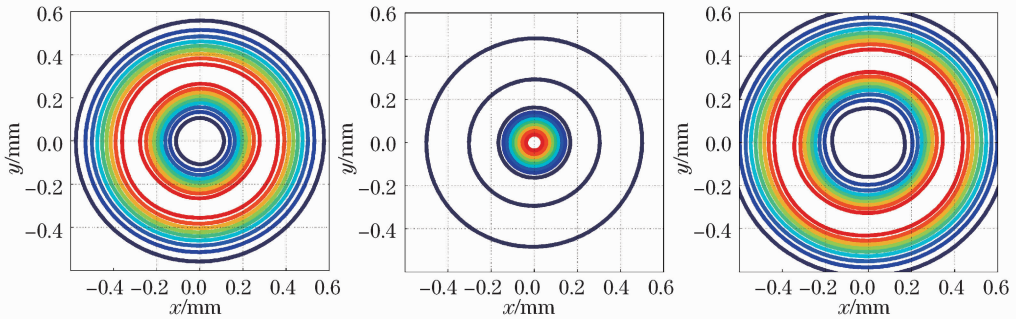


图 12 90°旋转腔损耗为第 4、6、7 的高阶模的等光强面

Fig. 12 Contour of Intensity for high order modes with order 4,6,7 in the 90° rotation resonator

## 4 结 论

利用柯林斯公式和有限元传输矩阵法建立了环形谐振腔光场模式的数学模型,通过数值求解得到了相应的光场分布,加深了对非平面腔坐标旋转特性的理解。与平面腔相比,非平面腔的坐标旋转导致  $x$  和  $y$  方向的模式产生“耦合”,当总旋转角为 90°时非平面腔的光场分布非常接近轴对称,但它与直腔轴对称激光器的模式又有着本质的不同。

## 参 考 文 献

- 1 T A Dorschner. Nonplanar rings for laser gyroscopes[C]. SPIE,1983,0412:192-202.
- 2 H Statz, T A Dorschner, M Holtz, *et al.*. The Multioscillator ring laser gyroscope[C]. Laser handbook, 1985,4: 230-333.
- 3 W W Chow, J Gea-Banacloche, L M Pedrotti, *et al.*. The ring laser gyro[J]. Rev Mod Phys,1985, 57(1): 61-104.
- 4 Feng Tao, Zhang Xuejie, Zhang Yan, *et al.*. Analysis of optical-axis perturbation in non-planar ring resonator[J]. Chinese J Lasers, 2013, 40(4): 0402006.

- 冯 滔,张雪洁,张燕,等. 非平面环形腔的光轴失谐分析[J]. 中国激光, 2013, 40(4): 0402006.
- 5 T Eberle, S Steinlechner, J Bauchrowitz, *et al.*. Quantum enhancement of the zero-area sagnac interferometer topology for gravitational wave detection[J]. Phys Rev Lett, 2010, 104(25): 251102.
- 6 Y Honda, H Shimizu, M Fukuda, *et al.*. Stabilization of a nonplanar optical cavity using its polarization property[J]. Opt Commun, 2009, 282(15): 3108–3112.
- 7 N V Kravtsov, N N Kravtsov. Nonreciprocal effects in ring lasers[J]. Quantum Electronics, 1999, 29(5): 378–399.
- 8 J Yuan, M X Chen, Y Y Li, *et al.*. Reanalysis of generalized sensitivity factors for optical-axis perturbation in nonplanar ring resonators [J]. Opt Express, 2013, 21(2): 2297–2306.
- 9 A C Nilsson, E K Gustafson, R L Byer. Eigenpolarization theory of monolithic nonplanar ring oscillators[J]. IEEE Journal of Quantum Electronics, 1989, 25(4): 767–790.
- 10 D D Wen, D Li, J L Zhao. Analysis on the polarization property of the eigenmodes in a nonplanar ring resonator[J]. Applied Optics, 2011, 50(18): 3057–3063.
- 11 A B Plachenov, V N Kudashov, A M Radin. Analytical description of a Gaussian beam in a ring resonator with a nonplanar axial contour and an even number of mirrors[J]. Quantum Electron, 2009, 39(3): 261–272.
- 12 J Yuan, X W Long, L Liang, *et al.*. Nonplanar ring resonator modes; generalized Gaussian beams[J]. Applied Optics, 2007, 46(15): 2980–2989.
- 13 Lv Baida. Laser Optics(3rd Edition) [M]. Beijing: Higher Education Press, 2003.  
吕百达. 激光光学(第三版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- 14 Y Y Cheng, Y Q Wang, J Hu, *et al.*. A novel eigenvector method for calculation of optical resonator modes and beam propagation[J]. Acta Phycia Sinica, 2004, 53(8): 2576–2582.
- 15 A G Fox, T Li. Resonant modes in a maser interferometer [J]. Bell Sys Tech J, 1961, 40(2): 453–488.
- 16 C Jiang, B Li, Y Y Cheng, *et al.*. Simulation of optical field in laser resonators cavity by eigenvector method[J]. Optics & Laser Technology, 2007, 39(3): 490–499.
- 17 J Yuan, M X Chen, Z L Kang, *et al.*. A novel coordinate system for Gaussian beam reflection[J]. Opt Lett, 2012, 37(11): 2082–2084.

栏目编辑: 刘丰瑞