

# 基于时域傅里叶变换的广义相移相位恢复方法

张望平 吕晓旭 刘胜德 赵 晖 钟丽云

华南师范大学广东省微纳光子功能材料与器件重点实验室, 广东 广州 510006

**摘要** 提出了一种基于时域傅里叶变换的广义相移相位恢复方法。该方法不需要对相移量进行特殊标定,就可从一系列相移量单调变化的干涉条纹图中快速地恢复出物体的相位。由于所提方法是运用傅里叶变换逐点从频域提取物体的相位,所以该方法不仅具有良好的抗干扰性能,而且对于干涉图中的条纹数目没有要求,可以从条纹数少于1的相移干涉图中精确地恢复相位。数值模拟与实验结果均表明所提方法具有操作简单、方便、快速、精度高等优点。

**关键词** 测量;干涉测量;广义相移干涉测量;傅里叶变换;相位恢复

中图分类号 O438.1

文献标识码 A

doi: 10.3788/CJL201542.0908004

## Generalized Phase-Shifting Phase Retrieval Approach Based on Time-Domain Fourier Transform

Zhang Wangping Lü Xiaoxu Liu Shengde Zhao Hui Zhong Liyun

Key Laboratory of Guangdong Province Micro-nano Photonics Functional Materials and Devices, South China Normal University, Guangzhou, Guangdong 510006, China

**Abstract** An generalized phase-shifting phase retrieval approach based on time-domain Fourier transform (TFT) is proposed. There is no the special requirement for the phase shift calibration, and the measured phase can be retrieved quickly from a sequence of interferograms whose phase shifts are changed monotonously. By using Fourier transform to obtain the object's phase point-by-point from the frequency domain, the proposed method not only has good anti-interference performance, but also the fringe number of the interferogram is not required. Even in the case that the fringe number of the interferogram is less than one, the proposed approach still works well. Both the numerical simulation and experimental results show that the proposed approach is simple, convenient, fast and high precision.

**Key words** measurement; interferometry; generalized phase-shifting interferometry; Fourier transform; phase retrieval

**OCIS codes** 120.3180; 050.5080; 120.5050

## 1 引 言

相移干涉测量技术是一种测量精度高、速度快、操作简单实用的干涉测量技术<sup>[1]</sup>,现已被广泛应用在表面形貌测量和形变分析、生物细胞监测、图像加密与隐藏等诸多领域<sup>[2-7]</sup>。在标准的相移干涉测量术中,通常需要相移量已知或者相移必须等步长<sup>[8-11]</sup>。这些要求在实际测量中往往难以满足,这就需要对相移器进行严格的标定。当相移量标定不准时,容易引入相移误差,使测量精度降低。为了解决这一问题,研究人员提出了一些相移误差分析和校正方法<sup>[12-13]</sup>,但这些方法只能对一些诸如线性相移误差之类的特定误差进行分析校正,对随机相移误差等其他类型误差的校正将会失效。为了避免相移干涉术对相移量的严格限制,许多广义相移(相移量未知的)相位恢复算法不断被提出<sup>[14-19]</sup>。文献[15]提出了一种改进的基于最小二乘原理的迭

收稿日期: 2015-03-31; 收到修改稿日期: 2015-05-04

基金项目: 国家自然科学基金(61275015、61177005、61475048)

作者简介: 张望平(1989—),男,硕士研究生,主要从事数字全息与相位测量方面的研究。E-mail: zhangwp@m.scnu.edu.cn

导师简介: 钟丽云(1968—),女,博士,教授,主要从事光学微纳成像和生物单分子探测等方面的研究。

E-mail: zhongly@scnu.edu.cn

代算法(AIA),该方法虽然计算精度高,但要求相移干涉条纹图中的背景和调制度保持不变,在迭代计算过程中需要设定初始值,使得计算速度较慢,并且要求干涉条纹图中的条纹数大于1。Vargas等<sup>[17]</sup>提出了一种基于主成分分析原理的随机相移算法(PCA),该方法不需相移干涉条纹图中的背景和强制度保持不变,计算过程不需要迭代,计算速度快、精度高,但是该方法需要预先求出系列干涉图中的平均背景强度,要求相移干涉条纹图中的相移量分布在 $[0,2\pi]$ 范围内,同时也要求干涉条纹图中的条纹数多于1。

近年来,Park等<sup>[20]</sup>提出了一种基于时域傅里叶变换的相位恢复算法,但是其仅从抑制环境振动干扰的角度对方法进行阐述,并且也要求相移器匀速移动(即相移等步长)。为此,本文提出了一种基于时域傅里叶变换的广义相移相位恢复算法,该方法只要求相移量单调变化,就可从一系列相移干涉条纹图中运用傅里叶变换方法从频域逐点恢复出物体的相位。该方法对空气扰动、机械振动等噪声干扰有较好的抑制作用,并且可以从条纹数少于1的相移干涉条纹图中快速精确地恢复相位。下面对该方法的原理进行详细阐述,并通过模拟和实验计算进行验证。

## 2 基本原理

假设在实验中采集了 $N$ 幅相移干涉条纹图,其中一幅干涉条纹图的光强可以表示为

$$I = A + B \cos(\Phi + \theta), \quad (1)$$

式中 $A$ 、 $B$ 、 $\Phi$ 、 $\theta$ 分别表示干涉图的背景强度、调制振幅、待测相位和相移量。从这一系列干涉条纹图中取出的同一像素点 $(r,s)$ 处的光强值构成的时域信号可以表示成

$$i(r,s,n) = a(r,s) + b(r,s)\cos[\varphi(r,s) + 2\pi d_n/\lambda], \quad (2)$$

式中 $(r,s)$ 表示像素点的坐标, $a(r,s)$ 表示该点的背景强度, $b(r,s)$ 表示该点调制度, $d_n$ 表示相移距离, $\lambda$ 为激光器的波长。为了方便表示,(2)式可以简写为

$$i(r,s,n) = a + b \cos(\varphi + 2\pi f_s d_n), \quad (3)$$

式中 $f_s$ 表示空间频率。对(3)式同时进行傅里叶变换,得到

$$\mathfrak{F}[i(r,s,n)] = a\delta(f) + \frac{b}{2}\exp(i\varphi)\delta(f-f_s) + \frac{b}{2}\exp(-i\varphi)\delta(f+f_s), \quad (4)$$

从(4)式可以看出, $a\delta(f)$ 为直流项,像素点 $(r,s)$ 处的相位 $\varphi$ 被锁定在幅度频谱的峰值位置 $f=f_s$ 处。为了表述方便,令 $X(f) = \frac{b}{2}\exp(i\varphi)\delta(f-f_s)$ ,则物体在像素点 $(r,s)$ 处的相位 $\varphi$ 可以表示为

$$\varphi = \arctan\{\text{Im}[X(f_s)]/\text{Re}[X(f_s)]\}, \quad (5)$$

依此,对干涉条纹图中的其他像素点做同样的操作,可以逐点求出物体每一点的相位,进而得到整个物体的相位 $\Phi$ 。

## 3 数值模拟

首先通过模拟相移干涉条纹图对所提方法进行验证。模拟条纹图的光强分布由(1)式决定,干涉条纹图的大小为 $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$ 。其背景分布为 $A=30\exp[-0.05(x^2+y^2)]+40$ ,调制振幅为 $B=40\exp[-0.05(x^2+y^2)]$ , $-1.28 \text{ mm} \leq x,y \leq 1.28 \text{ mm}$ ,光源的波长 $\lambda=632.8 \text{ nm}$ 。设物体的高度按 $h_{\text{obj}}=0.9(x+y^2)+0.3P(x,y)$ 分布,其中 $P(\cdot)$ 表示Matlab自带的peaks函数,则待测物体的相位 $\Phi = 2\pi h_{\text{obj}}/\lambda$ 。相移量 $\theta$ 按等步长相移和广义相移分布两种不同情况进行模拟设置,如图1(a)所示。模拟得到了两组不同相移模式下的干涉条纹图,为了检验所提方法的抗噪性能,同时使模拟更接近于实际,在干涉条纹图中加入了信噪比为5%的加性高斯噪声。图1(b)为模拟得到的一幅干涉条纹图,图1(c)为模拟预设的参考相位。

相移误差是相移干涉测量的主要误差来源,为了说明相移误差对所提方法的影响,首先用所提方法对相移量分布如图1(a)所示的等步长相移和广义相移两种不同相移模式下的模拟相移干涉条纹图进行了计算,计算结果如图2所示,图2(a)~(c)依次为所提时域傅里叶变换方法在等步长相移模式下恢复的包裹相位、解包裹相位以及误差分布情况,图2(d)~(f)依次表示所提方法在广义相移模式下恢复的包裹相位、解包裹相位和误差分布情况。所提方法在两种不同模式下的计算结果与模拟预设的参考相位之间的均方根误差分别为 $0.017 \text{ rad}$

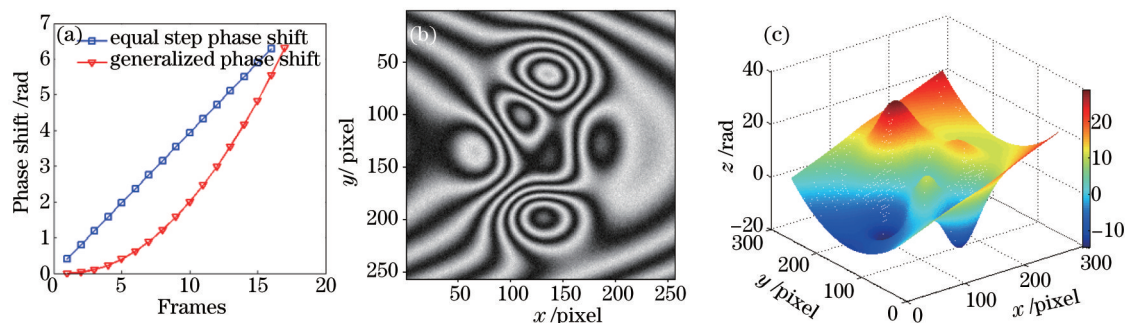


图1 (a) 两种不同相移模式下的相移量分布; (b) 模拟的一幅干涉条纹图; (c) 预设的模拟参考相位  
Fig.1 (a) Two different phase shifts distribution of simulation phase-shifting interferograms; (b) one simulation interferogram;  
(c) reference phase in simulation

和 0.072 rad。从数据分析可知,虽然所提方法在广义相移模式下恢复相位的精度要低于等步长相移模式下的计算精度,但是这个精度已经达到了纳米量级,并且广义相移对于干涉条纹图的相移量分布没有苛刻的要求,更利于所提方法在实际测量中的应用,所以可以将该方法用于广义相移干涉条纹图的相位计算。

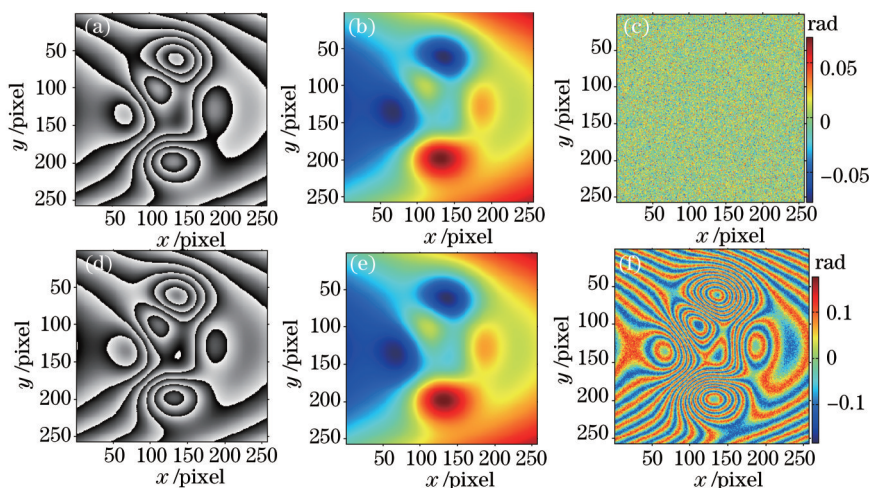


图2 (a) 等步长相移模式下所提方法计算得到的包裹相位; (b) 图2(a)的解包裹相位; (c) 图2(b)与参考相位的误差分布;  
(d) 广义相移模式下所提方法计算得到的包裹相位; (e) 图2(d)的解包裹相位; (f) 图2(e)与参考相位的误差分布  
Fig.2 (a) Retrieved wrapped phase from simulation interferograms by proposed approach in the case of equal step phase shift;  
(b) unwrapped phase of Fig.2 (a); (c) error distribution between Fig.2 (b) and reference phase; (d) retrieved wrapped  
phase from simulation interferogram by proposed approach in the case of the generalized phase shift; (e) unwrapped phase of Fig.2 (d);  
(f) error distribution between Fig.2 (e) and reference phase

为了更好地说明所提出的基于时域傅里叶变换的广义相移相位恢复方法的准确性与可行性。在广义相移模式下,将所提方法的计算结果与其他两种典型的广义相移恢复算法在计算时间、精度上做详细的对比分析,为了描述方便,这里将所提方法简称为TFT。表1为TFT、AIA以及PCA三种不同的广义相移算法计算得到的均方根误差(RMSE)、峰峰值误差(PVE)以及计算时间。

表1 不同广义相移算法在模拟计算中得到的均方根误差、峰谷值误差、处理时间

Table 1 Retrieved root-mean-square errors, peak-to-valley errors and processing time obtained by different generalized phase-shifting algorithms(simulation)

| Approaches | TFT   | AIA   | PCA   |
|------------|-------|-------|-------|
| RMS /rad   | 0.072 | 0.019 | 0.021 |
| PV /rad    | 0.35  | 0.27  | 0.23  |
| Time /s    | 9.8   | 7.6   | 0.66  |

由表1可以看出, TFT方法的计算精度虽然略低于AIA以及PCA,但三者之间的计算精度非常接近,进一步说明了该方法有效可行。下面验证所提方法可以从条纹数少于1的相移干涉条纹图中恢复相位。保持

其他的模拟条件不变,将物体的高度重新设定为  $h_{\text{set}} = 0.05(x^2 + y^2)$ ,使得干涉条纹图中的条纹数少于1,其计算结果如图3所示,图3(a)为模拟得到的一幅条纹数少于1的干涉条纹图,图3(b)为模拟预设的参考相位,图3(c)为所提方法计算得到的相位,图3(d)为图3(b)、(c)的差值分布。其均方根误差为0.018 rad。可以看出对于条纹数少于1的相移干涉条纹图,AIA和PCA这两种算法都是失效的,但所提出的方法仍然可以准确地提取待测相位。

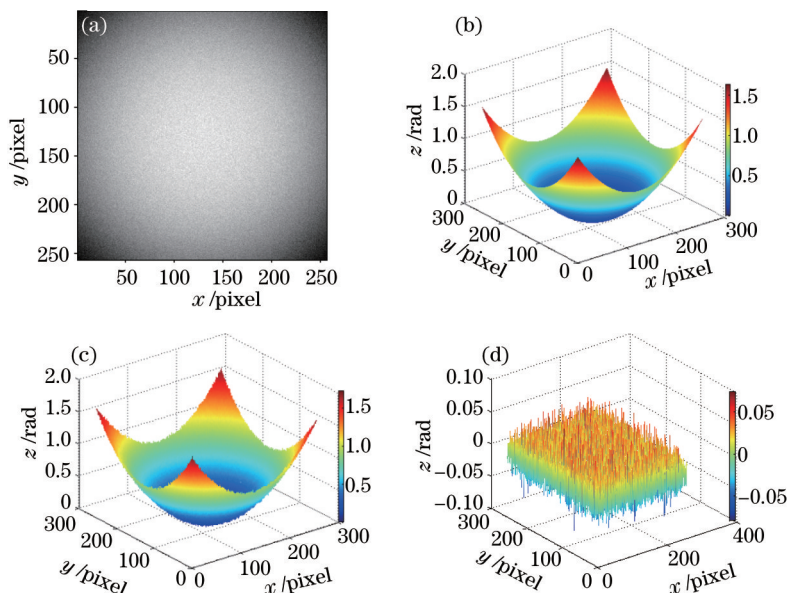


图3 (a) 模拟得到的一幅条纹数少于1的干涉图;(b) 模拟预设的参考相位;(c) 所提方法计算得到的相位;  
(d) 图3(b)、(c)之间的误差分布

Fig.3 (a) One simulated interferogram with the number of fringe less than one; (b) reference phase in simulation;  
(c) retrieved phase by the proposed approach; (d) error distribution between Fig.3 (b) and Fig.3 (c)

## 4 实验验证

实验验证光路系统采用如图4所示马赫-曾德尔干涉仪。光源为波长  $\lambda=632.8 \text{ nm}$  的 He-Ne 激光器,实验过程由压电陶瓷微位移器 PZT 引入相移,由靶面大小为  $768 \text{ pixel} \times 576 \text{ pixel}$  (像元尺寸  $10 \mu\text{m} \times 10 \mu\text{m}$ ) 的图像传感器 CCD 进行干涉条纹图采集。

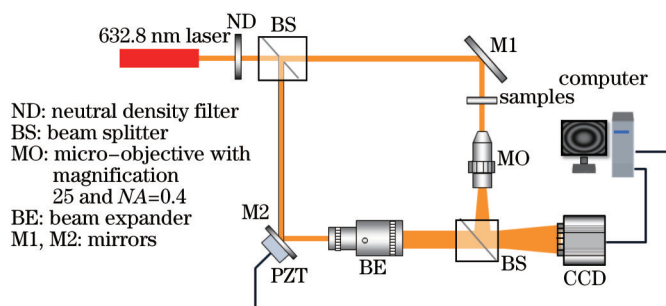


图4 实验光路系统示意图

Fig.4 Schematic of experimental optical system

为了更进一步说明 PZT 相移误差对所提方法的影响,实验中进行与模拟部分类似的计算。在图5(a)所示的等步长相移和广义相移两种不同的相移模式下各采集了16幅大小为  $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$  的相移干涉条纹图。图5(a)中的相移量由文献[15]中的 AIA 算法计算得到。图5(a)为实验采集到的干涉条纹图的不同相移量分布情况。图5(b)为实验采集到的一幅干涉条纹图,为了便于比较,将经典的五步相移算法<sup>[8]</sup>计算的结果作为参考相位,如图5(c)所示。

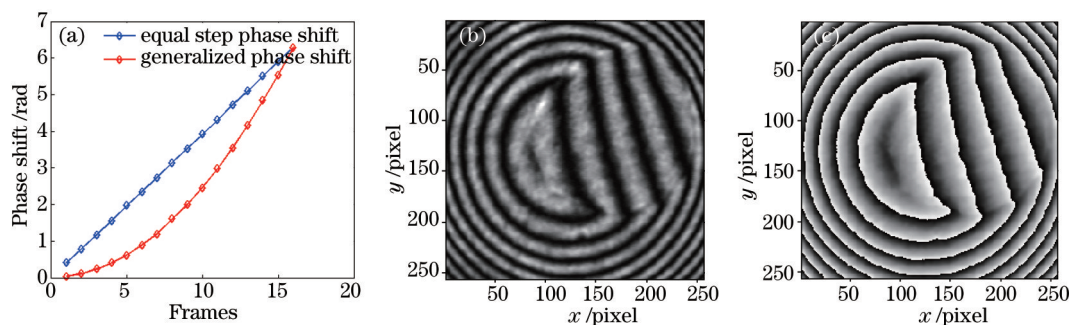


图5 (a) 两种不同相移模式下的相移量分布; (b) 实验采集到的一幅干涉条纹图; (c) 五步相移算法计算得到的参考相位

Fig.5 (a) Two different phase shift distribution of experimental phase-shifting interferograms; (b) one experimental interferogram; (c) retrieved wrapped phase by the 5-step phase-shifting algorithm as reference phase in experiment

同样,采用所提TFT方法对实验采集到的相移量分布如图5(a)所示的两种不同相移模式下各16幅相移干涉条纹图进行了计算,其计算结果如图6所示。图6(a)~(c)依次为所提TFT方法在等步长相移模式下计算得到的包裹相位、解包裹相位以及误差分布情况,图6(d)~(f)依次表示所提方法在广义相移模式下恢复的包裹相位、解包裹相位和误差分布情况。实验中,所提TFT方法在两种不同模式下的计算结果与参考相位之间的均方根误差分别为0.056 rad和0.096 rad。这说明实验计算结果与模拟计算结果有很好的一致性,相移误差会降低所提方法的计算精度,但总体而言其精度已经很高。由于无需对相移干涉条纹图的相移量进行严格的标定,所以TFT方法在广义相移相位恢复中更具有实用价值。

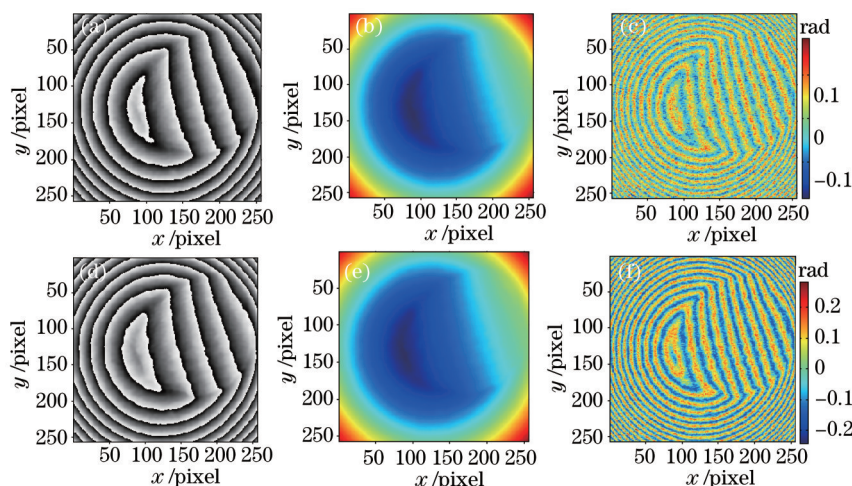


图6 (a) 所提方法在等步长相移模式下从实验采集到的相移干涉图中计算得到的包裹相位; (b) 图6(a)的解包裹相位; (c) 图6(b)与参考相位的误差分布; (d)所提方法在广义相移模式下从实验采集到的相移干涉图中计算得到的包裹相位; (e) 图6(d)的解包裹相位; (f) 图6(e)与参考相位的误差分布

Fig.6 (a) Retrieved wrapped phase from experimental interferograms by proposed approach in the case of equal step phase shift; (b) unwrapped phase of Fig.6(a); (c) error distribution between Fig.6 (b) and reference phase; (d) retrieved wrapped phase from experimental interferograms by proposed approach in the case of the generalized phase shift; (e) unwrapped phase of Fig.6(d); (f) error distribution between Fig.6 (e) and reference phase

与模拟分析类似,用所提出的TFT方法、AIA方法和PCA方法三种不同的广义相移相位恢复方法对实验采集到的广义相移干涉条纹图进行了计算,三种算法的计算结果如图7所示。同时,对三种不同算法的计算结果进行了对比分析,表2为TFT、AIA、PCA三种不同算法计算得到的均方根误差、峰峰值误差以及计算时间。数据分析表明,实验计算结果能和模拟结果很好地吻合,实验上验证了所提方法有效可行。

下面在实验上验证所提方法可以从条纹数少于1的相移干涉条纹图准确地恢复物体的相位,为此,在实验中采集了一组条纹数少于1、大小为150 pixel×150 pixel的相移干涉条纹图。同样,将五步相移算法计算的结果作为参考相位,计算结果如图8所示,图8(a)为实验采集到的一幅条纹数少于1的干涉图,图8(b)为五步

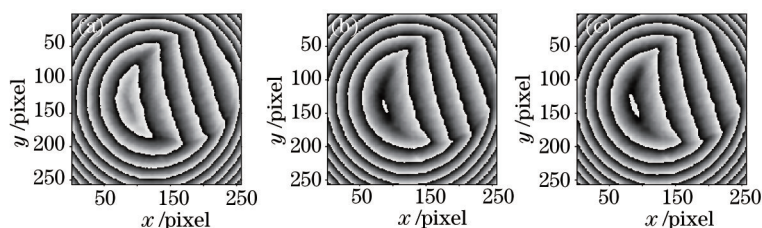


图7 三种不同算法计算得到的包裹相位。(a) 所提的TFT方法; (b) AIA方法; (c) PCA方法

Fig.7 Obtained wrapped phases by three different generalized phase-shifting algorithms. (a) Proposed TFT approach; (b) AIA algorithm; (c) PCA method

表2 不同广义相移算法在实验计算中得到的均方根误差、峰谷值误差以及处理时间

Table 2 Retrieved root-mean-square errors, peak-to-valley errors and processing time obtained by different generalized phase-shifting algorithms(experiment)

| Approaches | TFT   | AIA   | PCA   |
|------------|-------|-------|-------|
| RMS /rad   | 0.096 | 0.055 | 0.054 |
| PV /rad    | 0.52  | 0.43  | 0.42  |
| Time /s    | 9.9   | 7.4   | 0.67  |

相移算法计算得到的参考相位,图8(c)为所提方法计算得到的相位,图8(d)为(b)、(c)之间的差值分布,其均方根误差为0.02 rad,峰峰值误差为0.096 rad。这一结果进一步说明所提方法在实验上也可以从条纹数少于1的相移干涉图中准确地恢复物体的相位。

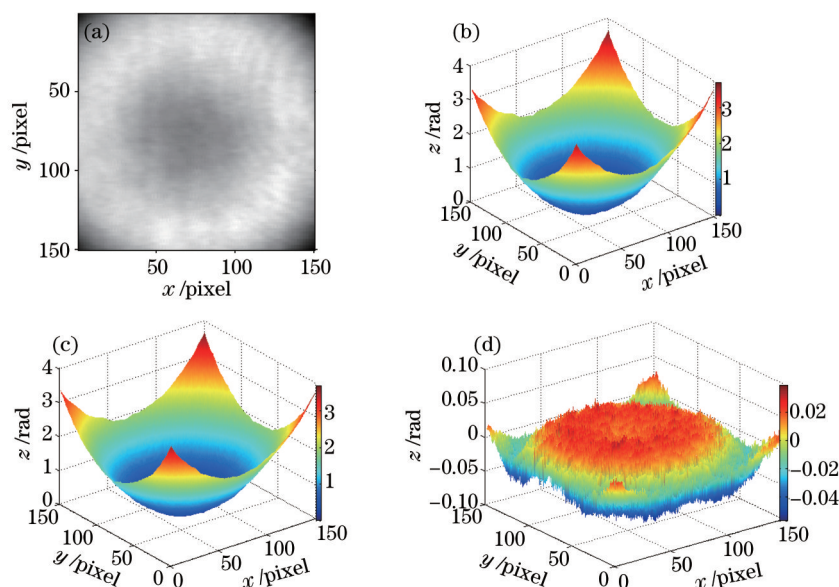


图8 (a) 实验采集到的一幅条纹数少于1的干涉图;(b) 五步相移算法计算得到的参考相位;(c) 所提TFT方法计算得到的相位;(d) 为图8 (b)、(c)之间的误差分布

Fig.8 (a) One experimental interferogram with the number of fringe less than one; (b) reference extracted by the 5-step phase-shifting algorithm in experiment; (c) retrieved phase by proposed approach; (d) error distribution between Fig.8 (b) and (c)

## 5 结 论

本文提出了一种基于时域傅里叶变换的广义相移相位恢复算法。通过压电陶瓷微位移器在时域引入相移,然后由傅里叶变换从频域逐点恢复出物体的相位,进而得到整个待测物体的相位。模拟和实验结果表明,在条纹数多于1的情况下,所提TFT方法的计算精度虽然略低于AIA和PCA方法,但是三种方法均达到了纳米量级的测量精度。当条纹数少于1时,AIA和PCA两种方法都不能有效地恢复物体的相位,但是所提方法可以准确地恢复出物体的相位。所提TFT方法操作简单、计算快捷、精度高,并且可以有效地抑制空气扰动、机械振动等噪声干扰,为从条纹数少于1的相移干涉条纹图中准确地恢复相位提供了有效途径。

- 1 Malacara Z, Servin M. Interferogram Analysis for Optical Testing[M]. USA: CRC press, 2005.
- 2 Chen L C, Yeh S L, Tapilouw A M, *et al.*. 3-D surface profilometry using simultaneous phase-shifting interferometry[J]. Opt Commun, 2010, 283(18): 3376-3382.
- 3 Rong Lu, Wang Dayong, Wang Yunxin, *et al.*. Phase retrieval methods in in-line digital holography[J]. Chinese J Lasers, 2014,41(2): 0209006.  
戎 路,王大勇,王云新,等. 同轴数字全息中的相位恢复算法[J]. 中国激光, 2014,41(2): 0209006.
- 4 Debnath S K, Park Y K. Real-time quantitative phase imaging with a spatial phase-shifting algorithm[J]. Opt Lett, 2011, 36(23): 4677-4679.
- 5 Fan Jinping, Zhang Desi, Lü Xiaoxu, *et al.*. Phase reconstruction and compensation of biological cell with digital holographic microscopy[J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(2): 0209019.  
范金坪,张德思,吕晓旭,等. 数字全息显微术用于生物细胞相位重构与补偿的研究[J]. 中国激光, 2014, 41(2): 0209019.
- 6 Li J, Li J, Shen L, *et al.*. Optical image encryption and hiding based on a modified Mach-Zehnder interferometer[J]. Opt Express, 2014, 22(4): 4849-4860.
- 7 Xu Yuanyuan, Wang Yawei, Jin Weifeng, *et al.*. New process on quantitative phase microscopy and phase retrieval for biological cells[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2014, 51(2): 020006.  
徐媛媛,王亚伟,金卫凤,等. 生物细胞定量相位显微技术及相位恢复方法的新进展[J].激光与光电子学进展, 2014, 51(2): 020006.
- 8 Hariharan P, Oreb B, Eiju T. Digital phase-shifting interferometry: a simple error-compensating phase calculation algorithm[J]. Appl Opt, 1987, 26(13): 2504-2506.
- 9 Stoilov G, Dragostinov T. Phase-stepping interferometry: five-frame algorithm with an arbitrary step[J]. Opt & Laser in Eng, 1997, 28(1): 61-69.
- 10 Yamaguchi I, Zhang T. Phase-shifting digital holography[J].Opt Lett, 1997, 22(16): 1268-1270.
- 11 Zhang Jing, Ye Yutang, Xie Yu, *et al.*. Synchronous multi-channel phase-shifting digital holographic technology[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(10): 1009002.  
张 静,叶玉堂,谢 煜,等. 同步多路相移数字全息技术[J]. 光学学报, 2013, 33(10): 1009002.
- 12 Van Wingerden J, Frankena H J, Smorenburg C. Linear approximation for measurement errors in phase shifting interferometry[J]. Appl Opt, 1991, 30(19): 2718-2729.
- 13 Gutmann B, Weber H. Phase-shifter calibration and error detection in phase-shifting applications: a new method [J]. Appl Opt, 1998, 37(32): 7624-7631.
- 14 Cai L Z, Liu Q, Yang X L. Generalized phase-shifting interferometry with arbitrary unknown phase steps for diffraction objects[J]. Opt Lett, 2004, 29(2): 183-185.
- 15 Wang Z, Han B. Advanced iterative algorithm for phase extraction of randomly phase-shifted interferograms[J]. Opt Lett, 2004, 29(14): 1671-1673.
- 16 Gao P, Yao B, Lindlein N, *et al.*. Phase-shift extraction for generalized phase-shifting interferometry[J]. Opt Lett, 2009, 34(22): 3553-3555.
- 17 Vargas J, Quiroga J A, Belenguer T. Phase-shifting interferometry based on principal component analysis[J]. Opt Lett, 2011, 36(8): 1326-1328.
- 18 Li Jie, Wang Yurong, Meng Xiangfeng, *et al.*. Classification and comparison of phase shift extraction algorithms in generalized phase-shifting interferometry[J]. Chinese J Lasers, 2013, 40(12): 1208003.  
李 杰,王玉荣,孟祥锋,等. 广义相移干涉术相移提取算法的分类与评估方法[J]. 中国激光, 2013, 40(12): 1208003.
- 19 Deng Lijun, Yang Yong, Shi Bingchuan, *et al.*. Two-step phase-shifting digital holography based on extraction of phase shift[J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(2): 0209014.  
邓丽军,杨 勇,石炳川,等. 基于相移量提取的两步相移数字全息术[J]. 中国激光, 2014, 41(2): 0209014.
- 20 Park J, Kim S W. Vibration-desensitized interferometer by continuous phase shifting with high-speed fringe capturing[J]. Opt Lett, 2010, 35(1): 19-21.