

# 环状光束沿斜程路径大气湍流传输的光束扩展

陈 鸿 季小玲

四川师范大学物理学院, 四川 成都 610068

**摘要** 利用数值模拟方法,采用桶中功率为86.5%定义的环围功率束宽作为光束扩展的评价参数,研究了环状光束在大气湍流中沿斜程路径传输的光束扩展。研究表明,自由空间中遮拦比越大,远场光强旁瓣越明显。大气湍流造成光强旁瓣消失,且远场光强分布并不是高斯分布。光束扩展随着遮拦比和天顶角的增大而增大,大气湍流对光束扩展的影响也随天顶角的增大而增大。当遮拦比较大或较小时,湍流对光束扩展影响随遮拦比的增大而减小;当遮拦比中等大小时,湍流对光束扩展的影响几乎不随遮拦比而变化。与已有研究结果比较发现,按照桶中功率不同百分比定义的环状光束环围功率束宽受大气湍流影响规律是不同的,研究结果对实际应用具有意义。

**关键词** 大气光学; 环围功率束宽; 环状光束; 光束扩展; 斜程大气湍流

**中图分类号** O436 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/CJL201542.1113003

## Spreading of Annular Beams Propagating through Atmospheric Turbulence along a Slanted Path

Chen Hong Ji Xiaoling

*Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu, Sichuan 610068, China*

**Abstract** Taking the encircled-power width defined by the power of 86.5% in the bucket as the characteristic parameter, the spreading of annular beams propagating through atmospheric turbulence along a slanted path is studied by using the numerical simulation method. It is shown that in free space, the lobe of the far-field intensity distribution appears with the obscure ratio increasing. The lobe disappears due to the turbulence, and the far-field intensity distribution is not a Gaussian profile. The beam spreading increases as the obscure ratio and the zenith angle increase, and the influence of turbulence on the beam spreading increases when the zenith angle increases. However, when the obscure ratio is large or small, the influence of turbulence on the beam spreading decreases as the obscure ratio increases; when the obscure ratio is middling, the influence of turbulence on the beam spreading is nearly unchanged versus the obscure ratio. Compared with previous work, it is found that the law of the influence of turbulence on the spreading of annular beams is different if the percentage of the power in the bucket is different. The results are useful for practical applications.

**Key words** atmospheric optics; encircled-power width; annular beam; beam spreading; atmospheric turbulence along a slanted path

**OCIS codes** 010.1290; 010.1300; 010.1330; 140.3295

## 1 引 言

研究激光通过湍流介质的传输特性具有重要的理论和实际应用意义。对此,国内外已做了许多研究<sup>[1-12]</sup>。在实际应用中,常常会遇到环状光束,例如,高斯光束通过环状光阑会产生环状光束,环状光阑存在于许多望远镜系统中<sup>[13]</sup>,而激光卫星通信、自由空间光通信系统的发射和接收装置以及激光武器发射装置中都采用这种望远镜系统<sup>[14]</sup>。此外,非稳腔产生的高功率激光通常也是环状光束<sup>[15]</sup>。因此,研究环状光束在大气湍流

收稿日期: 2015-06-16; 收到修改稿日期: 2015-07-27

基金项目: 国家自然科学基金(61178070,61475105)、四川高校科研创新团队建设计划(12TD008)

作者简介: 陈 鸿(1992—),女,硕士研究生,主要从事激光传输特性方面的研究。E-mail: chenhong1032@163.com

导师简介: 季小玲(1963—),女,博士,教授,主要从事激光传输与控制等方面的研究。E-mail: jixl100@163.com(通信联系人)

中的传输特性具有重要意义<sup>[16-21]</sup>。文献[16-18]分别研究了环状光束在大气湍流中的闪烁特性和相干特性,文献[19]推导出了环状光束在大气湍流中传输的二阶矩束宽的解析表达式,并研究了大气湍流对二阶矩束宽的影响,文献[20]推导出了环状光束在大气湍流中传输的 $M^2$ 因子的解析表达式,讨论了环状光束在湍流中传输其光束质量的变化。文献[21]推导出了部分相干环状光束在大气湍流中传输的瑞利尺寸和远场发散角的解析表达式,并研究了其近场和远场的光束的扩展特性。然而,这些研究都仅限于激光沿近地面传输,即均匀大气湍流情况<sup>[16-21]</sup>。

在许多激光应用领域中,如激光通信、激光测距以及激光武器等,不可避免地会遇到激光束沿斜程路径大气(非均湍流)的传输。迄今为止,环状光束在大气湍流中沿斜程路径传输特性的研究涉及甚少。文献[12]采用Rytov相位结构函数二次近似研究了环状光束在大气湍流中沿斜程路径传输的光强分布、光束质心位置和最大光强位置的变化。研究表明,在Rytov相位结构函数二次近似下,环状光束在大气湍流中传输其远场光强为高斯分布<sup>[17,20,22]</sup>。在实际应用中,环围功率定义的束宽是评价激光能量集中度的重要参数。通常,环围功率束宽是不能够解析求解的,需数值求解。本文拟利用自行编制的激光大气湍流传输仿真程序,采用桶中功率(PIB)为86.5%定义的环围功率束宽作为光束扩展的评价参数,用数值模拟方法研究环状光束在大气湍流中沿斜程路径传输的光束扩展问题,得到了一些采用近似解析方法不能够得到的结果。

## 2 数值模拟理论及方法

采用束宽不同的两束平顶光束之差构成环状光束,即在源场( $z=0$ )处的环状光束的复振幅可表示为

$$U(x, y, z = 0) = U_{01}(x, y, z = 0) - U_{02}(x, y, z = 0), \quad (1)$$

式中 $U_{01}$ 和 $U_{02}$ 分别为两束平顶光束的复振幅函数,并且<sup>[23]</sup>

$$U_{01}(x, y, z = 0) = \exp\left[-\frac{(N+1)(x^2+y^2)}{w_0^2}\right] \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} \left[\frac{(N+1)(x^2+y^2)}{w_0^2}\right]^n. \quad (2)$$

将(2)式中的 $w_0$ 换为 $w'_0$ 即可得 $U_{02}$ 。其中 $N$ 为平顶光束的阶数, $w_0$ 和 $w'_0$ 分别为两束平顶光束对应的高斯束宽,且 $w_0 > w'_0$ 。令 $w'_0 = \varepsilon w_0$ , $\varepsilon$ 称为遮拦比,且 $0 < \varepsilon < 1$ 。

近轴近似下光传输的波动方程可表示为<sup>[24]</sup>

$$2ik \frac{\partial U}{\partial z} = \nabla_{\perp}^2 U + k^2(n^2 - 1)U, \quad (3)$$

式中波数 $k = 2\pi/\lambda$ , $\lambda$ 为波长, $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ ,为拉普拉斯算符, $n$ 为折射率, $U$ 为缓变振幅,则光强 $I = UU^*$ 。

(3)式的数值求解一般采用多层相位屏法。令 $U(r, z_j)$ 为 $z_j$ 处的光场,利用分裂算子,在二阶近似下可得 $z_{j+1} = z_j + \Delta z$ 处的光场为<sup>[24]</sup>

$$U(r, z_{j+1}) = \exp\left(-\frac{i}{4k} \Delta z \nabla_{\perp}^2\right) \exp(-is) \exp\left(-\frac{i}{4k} \Delta z \nabla_{\perp}^2\right) U(r, z_j), \quad (4)$$

式中 $s = (k/2) \int_{z_j}^{z_{j+1}} \delta\sigma(r, z') dz'$ 为湍流引起的相位调制,且 $\delta\sigma = n^2 - 1$ 。

(4)式表明,光束从 $z_j$ 到 $z_{j+1} = z_j + \Delta z$ 的传输过程分为3个阶段:1)光束通过自由空间传输 $\Delta z/2$ 距离;2)光束通过一个薄相位屏的传输,即 $\Delta z$ 传输距离内大气湍流造成的相位畸变用一个薄相位屏来体现;3)光束再通过自由空间传输 $\Delta z/2$ 距离。这样,采用多层相位屏法即可模拟光束在大气湍流中的传输。

文中采用Von Karman湍流功率谱<sup>[1]</sup>,即

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 (\kappa_0^2 + \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2)^{-11/6}, \quad (5)$$

式中 $C_n^2$ 为折射率结构常数, $L_0$ 为湍流外尺度, $\kappa_0 = 2\pi/L_0$ , $\kappa_x$ 、 $\kappa_y$ 和 $\kappa_z$ 分别为 $x$ 、 $y$ 和 $z$ 方向的空间波数。激光沿斜程路径传输,大气湍流具有明显的层状结构,其折射率结构常数 $C_n^2$ 是高度的函数,这里引用Hufnagel-Valley(H-V)模型<sup>[25]</sup>,即

$$C_n^2(h) = 8.148 \times 10^{-56} v^2 h^{10} \exp(-h/1000) + C_0 \exp(-h/100) + 2.7 \times 10^{-16} \exp(-h/1500), \quad (6)$$

式中 $v = (v_g^2 + 30.69v_g + 348.91)^2$ ,是横向风速, $v_g$ 为地面风速(取 $v_g=0$ ), $h$ 为垂直高度(单位为m), $C_0$ 为近地面湍流结构常数(取典型值 $C_0=1.7 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ )。此外,有 $\Delta z = \Delta h \times \sec \theta$ ,其中, $\theta$ 为光束斜程传输的天顶角(即传输路

径与竖直方向的夹角),  $\Delta h$  为相邻两个相屏之间的垂直距离。显然,  $\theta=0^\circ$  对应于垂直上行传输路径。

采用多层相位屏法和离散傅里叶变换法, 编写了激光在大气湍流中沿斜程路径传输的仿真程序。由于斜程路径中湍流的非均匀性, 湍流相位屏位置的设置也应为非均匀分布。采用了 Rytov 指数间隔法(ERPS), 该方法被证明是非均匀湍流路径上相位屏设置的首选方案<sup>[26]</sup>。

在实际应用中, 环围功率束宽是评价激光能量集中度的重要参数。环围功率束宽是由 PIB 来定义的。PIB 是给定尺寸桶内围住的激光功率占总功率的百分比, 在极坐标下可表示为

$$P = \int_0^d I(r, z) r dr / \int_0^\infty I(r, z) r dr, \quad (7)$$

式中  $d$  是桶的半径。采用  $P=86.5\%$  对应的“桶”的半径定义为激光的束宽(即环围功率束宽  $w$ )。显然,  $w$  越小, 则光束的能量集中度越好, 光束可聚焦能力越强。值得指出的是, 无论在自由空间还是在大气湍流中, 环围功率束宽  $w$  都不能够解析求解, 因此利用数值计算方法研究是必要的。

### 3 数值计算结果及分析

利用自行编制的激光大气湍流传输仿真程序, 采用数值模拟方法研究了环状光束在大气湍流中沿斜程路径传输的光束扩展问题, 数值计算参数取  $\lambda=0.6328 \mu\text{m}$ ,  $w_0=5 \text{ cm}$ ,  $L_0=10 \text{ m}$ ,  $N=10$ 。在大气湍流中, 数值模拟物理量(即光强  $I$ 、环围功率束宽  $w$ )均是 100 个样本的平均结果。经核实, 取 100 个样本的平均与取 200 个甚至更多样本的平均在定性规律上是一致的。为了节省计时, 文中采用 100 个样本的平均。

图 1 和图 2 分别为自由空间和大气湍流中不同遮拦比  $\varepsilon$  下的远场光强分布, 其中  $\theta=70^\circ$ ,  $z=10 \text{ km}$ 。图 1 表明, 自由空间中,  $\varepsilon$  越大(环状光束越薄), 远场光强旁瓣越明显。比较图 2 与图 1 可知, 大气湍流造成光束明显扩展, 光强旁瓣消失。图 3 为大气湍流中不同天顶角  $\theta$  下的远场光强分布, 其中  $\varepsilon=0.7$ ,  $z=10 \text{ km}$ 。由图 3 可知:  $\theta$  越大, 光束扩展越厉害。值得指出的是, 若采用 Rytov 相位结构函数二次近似或强起伏近似, 可以得到光强的解析表达式, 但远场光强分布均为高斯分布<sup>[17,20,22,27]</sup>。采用数值模拟方法, 远场光强分布不会呈现高斯分布(见图 2 和图 3), 实验结果也不是高斯分布。

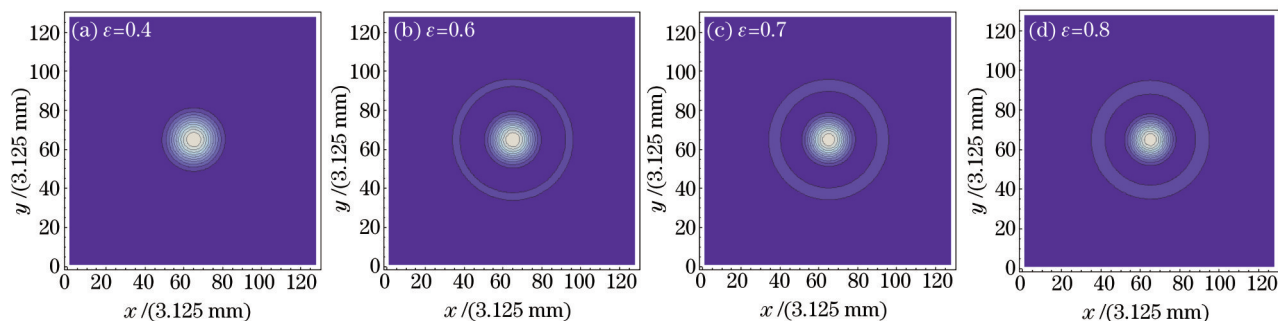


图 1 自由空间中不同遮拦比  $\varepsilon$  下的远场光强分布

Fig.1 Far-field intensity distributions for different values of the obscure ratio  $\varepsilon$  in free space

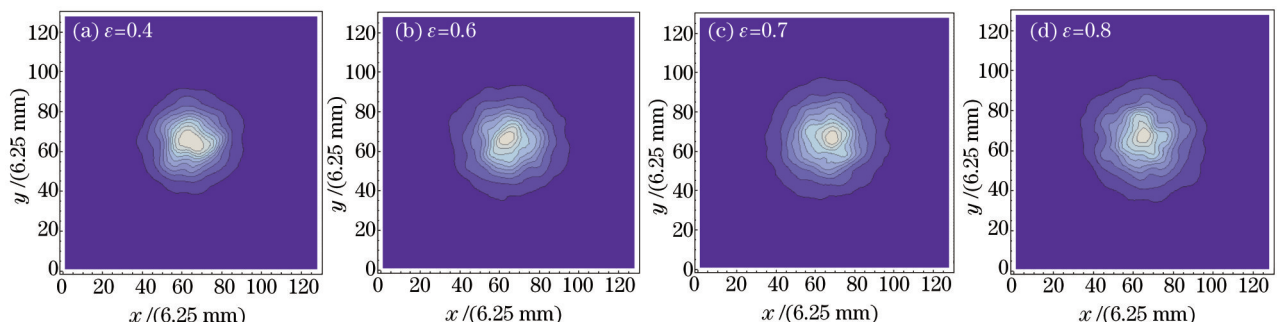


图 2 大气湍流中不同遮拦比  $\varepsilon$  下的远场光强分布

Fig.2 Far-field intensity distributions for different values of the obscure ratio  $\varepsilon$  in turbulence

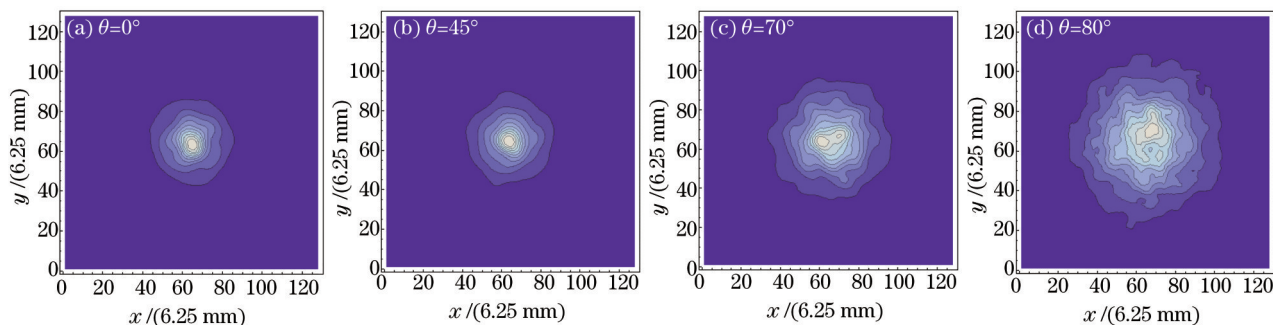


图3 大气湍流中不同天顶角 $\theta$ 下的远场光强分布

Fig.3 Far-field intensity distributions for different values of the zenith angle  $\theta$  in turbulence

图4为远场环围功率束宽 $w$ 随传输距离 $z$ 的变化曲线。由图4(a)、(b)可以看出,在自由空间和大气湍流中, $w$ 随 $\varepsilon$ 和 $z$ 的增大而增大,其物理原因是 $\varepsilon$ 越大,光束衍射越厉害,光束扩展越快。由图4(c)可知, $w$ 随 $\theta$ 的增大而增大,这是由于 $\theta$ 越大(越接近地面传输),湍流越强,光束扩展越快。

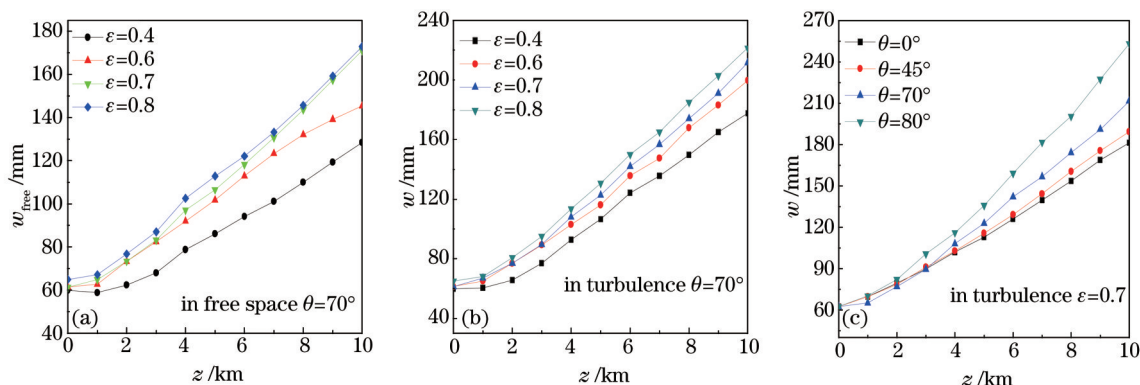


图4 环围功率束宽 $w$ 随传输距离 $z$ 的变化

Fig.4 Encircled-power width  $w$  versus propagation distance  $z$

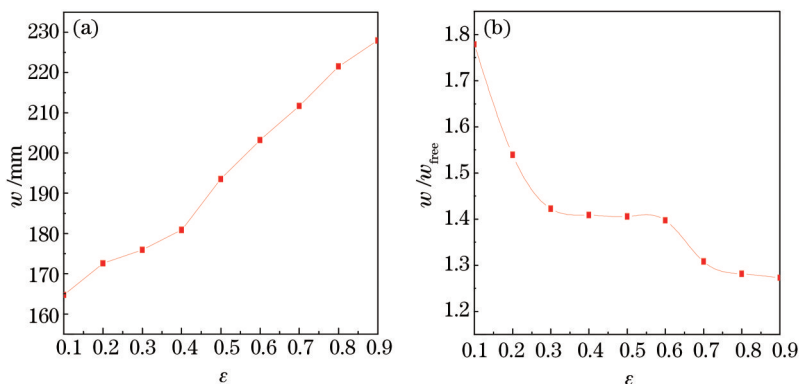


图5 大气湍流中, (a) 环围功率束宽 $w$ 随遮拦比 $\varepsilon$ 的变化; (b) 相对环围功率束宽 $w/w_{\text{free}}$ 随遮拦比 $\varepsilon$ 的变化

Fig.5 In turbulence, (a) encircled-power width  $w$  versus obscure ratio  $\varepsilon$ ; (b) relative encircled-power beam width  $w/w_{\text{free}}$  versus obscure ratio  $\varepsilon$

文中所定义的 $w/w_{\text{free}}$ 为相对环围功率束宽。显然 $w/w_{\text{free}} \geq 1$ ,且 $w/w_{\text{free}}$ 越大表示湍流对光束扩展影响越大。图5为远场环围功率束宽 $w$ 和相对环围功率束宽 $w/w_{\text{free}}$ 随遮拦比 $\varepsilon$ 的变化曲线,其中 $\theta=70^\circ, z=10 \text{ km}$ 。由图5(a)可知,大气湍流中, $w$ 随着 $\varepsilon$ 的增大而增大,这与图2结果一致。图5(b)表明,当 $0.1 < \varepsilon < 0.3$ 和 $0.6 < \varepsilon < 0.9$ 时, $w/w_{\text{free}}$ 随着 $\varepsilon$ 的增大而减小,即湍流对光束扩展影响随 $\varepsilon$ 的增大而减小;当 $0.3 < \varepsilon < 0.6$ 时, $w/w_{\text{free}}$ 几乎不随 $\varepsilon$ 而变化,即湍流对光束扩展的影响几乎不随 $\varepsilon$ 的变化而变化。这一结果与按 $P=63\%$ 对应“桶”半径定义的环围功率束宽的数值计算结果不同<sup>[28]</sup>。文献[28]已证明按 $P=63\%$ 定义的相对环围功率束宽随 $\varepsilon$ 变化呈现非单调变化,且存在一个极大值和一个极小值。因此,对于环状光束,按照桶中功率不同百分比定义的环围功率



束宽受大气湍流影响是不同的。造成这一结果的主要物理原因是自由空间中环状光束远场光强有旁瓣分布,这会使得按照桶中功率不同百分比(如: $P=86.5%$ , $P=63%$ )定义的环围功率束宽随遮拦比 $\varepsilon$ 的变化有明显差异,从而导致相对环围功率束宽 $w/w_{free}$ 不同,即桶中功率不同百分比定义的环状光束环围功率束宽受大气湍流影响规律不同,这在实际应用中值得特别注意。

图6为大气湍流中远场环围功率束宽 $w$ 和相对环围功率束宽 $w/w_{free}$ 随天顶角 $\theta$ 的变化曲线,其中 $\varepsilon = 0.7, z=10$  km。图6表明 $w$ 和 $w/w_{free}$ 均随 $\theta$ 的增大而增大,即光束扩展以及湍流对光束扩展的影响均随 $\theta$ 的增大而增大。

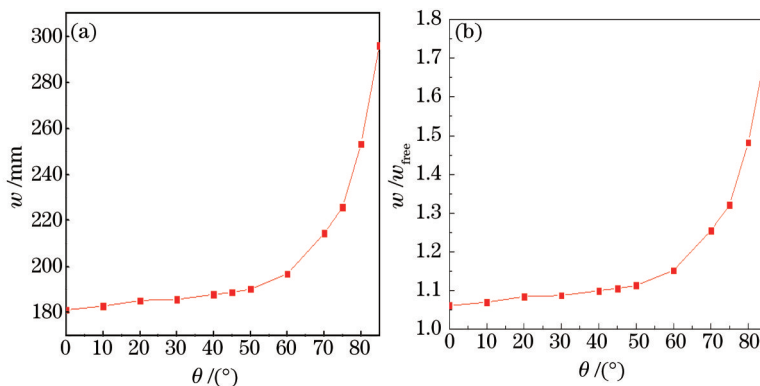


图6 大气湍流中, (a) 环围功率束宽 $w$ 随天顶角 $\theta$ 的变化; (b) 相对环围功率束宽 $w/w_{free}$ 随天顶角 $\theta$ 的变化  
Fig.6 In turbulence, (a) encircled-power width  $w$  versus zenith angle  $\theta$ ; (b) relative encircled-power beam width  $w/w_{free}$  versus zenith angle  $\theta$

#### 4 结 论

利用自行编写的激光大气湍流传输仿真程序,采用数值模拟方法研究了环状光束在大气湍流中沿斜程路径传输的光束扩展问题。研究表明:1) 自由空间中,遮拦比 $\varepsilon$ 越大(即环状光束越薄),远场光强旁瓣越明显。大气湍流造成光强旁瓣消失,且远场光强并不呈现高斯分布(这与实验结果相一致),而解析近似方法计算结果远场光强为高斯分布。2) 光束扩展随着遮拦比和天顶角的增大而增大,大气湍流对光束扩展的影响也随天顶角的增大而增大。但是,大气湍流对按 $P=86.5%$ 定义的环围功率束宽影响规律分为两种情况,即:当 $\varepsilon$ 较大或较小时,湍流对光束扩展影响随 $\varepsilon$ 的增大而减小;当 $\varepsilon$ 中等大小时,湍流对光束扩展的影响几乎不随 $\varepsilon$ 而变化。这一结果与按 $P=63%$ 定义的环围功率束宽的结果(存在一个极大值和一个极小值)不同。因此,按照桶中功率不同百分比定义的环状光束环围功率束宽受大气湍流影响规律是不同的,这是在实际应用中值得特别关注的。

#### 参 考 文 献

- 1 Andrews L C, Phillips R L. Laser Beam Propagation through Random Media[M]. Bellingham: SPIE Press, 2005.
- 2 Gbur G, Wolf E. Spreading of partially coherent beams in random media[J]. J Opt Soc Am A, 2002, 19(8): 1592-1598.
- 3 Shirai T, Dogariu A, Wolf E. Directionality of Gaussian Schell-model beams propagating in atmospheric turbulence[J]. Opt Lett, 2003, 28(8): 610-612.
- 4 Dan Y Q, Zhang B. Second moments of partially coherent beams in atmospheric turbulence[J]. Opt Lett, 2009, 34(5): 563-565.
- 5 Mao H D, Zhao D M. Second-order intensity-moment characteristics for broadband partially coherent flat-topped beams in atmospheric turbulence[J]. Opt Express, 2010, 18(2): 1741-1755.
- 6 Wu Z S, Li Y Q. Scattering of a partially coherent Gaussian-Schell beam from a diffuse target in slant atmospheric turbulence[J]. J Opt Soc Am A, 2011, 28(7): 1531-1539.
- 7 Liu X, Pu J. Investigation on the scintillation reduction of elliptical vortex beams propagating in atmospheric turbulence[J]. Opt Express, 2011, 19(27): 26444-26450.
- 8 Yang Ting, Ji Xiaoling. Regions of spreading of laser beams propagating through non-Kolmogorov atmospheric turbulence[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(5): 0501001.

- 杨 婷, 季小玲. 激光通过非 Kolmogorov 大气湍流传输光束扩展区间的研究[J]. 光学学报, 2015, 35(5): 0501001.
- 9 Chen Feinan, Chen Yanru, Zhao Qi, *et al.*. Change of propagation quality factor of partially coherence Hermite-Gaussian beams traveling through oceanic turbulence[J]. Chinese J Lasers, 2013, 40(4): 0413002.
- 陈斐楠, 陈延如, 赵 琦, 等. 部分相干厄米高斯光束在海洋湍流中光束传输质量的变化[J]. 中国激光, 2013, 40(4): 0413002.
- 10 Sun Haiyue, Wu Wuming, Jin Aijun, *et al.*. Propagation performance of supercontinuum source in non-Kolmogorov turbulence[J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(4): 0413001.
- 孙海跃, 吴武明, 靳爱军, 等. 非科尔莫哥罗夫湍流下超连续谱光源的传输特性[J]. 中国激光, 2014, 41(4): 0413001.
- 11 Wu Huiyun, Chen Jinbao, Sun Zhenhai. Analysis of beam propagation through a Relay mirror system in turbulent atmosphere[J]. Chinese J Lasers, 2013, 40(2): 0213001.
- 吴慧云, 陈金宝, 孙振海. 激光湍流大气中继传输性能分析[J]. 中国激光, 2013, 40(2): 0213001.
- 12 Tao Rumao, Si Lei, Ma Yanxing, *et al.*. Propagation of truncated partially coherent cosh-Gaussian beam in non-Kolmogorov turbulence [J]. Chinese J Lasers, 2013, 40(5): 0502008.
- 陶汝茂, 司 磊, 马阎星, 等. 截断部分相干双曲余弦高斯光束在非 Kolmogorov 湍流中的传输[J]. 中国激光, 2013, 40(5): 0502008.
- 13 Born M, Wolf E. Principles of Optics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1977.
- 14 Valdez E, Agraz J. Laser Communication Links for Use between Satellites[M]. San Diego: San Diego State University Press, 1999.
- 15 Siegman A E. Lasers[M]. California: University Science Books, 1986.
- 16 Chen Y, Cai Y, Eyyuboğlu H T, *et al.*. Scintillation properties of dark hollow beams in a weak turbulent atmosphere[J]. Appl Phys B, 2008, 90(1): 87-92.
- 17 Eyyuboğlu H T. Propagation and coherence properties of higher order partially coherent dark hollow beams in turbulence[J]. Optics & Laser Technology, 2008, 40(1): 156-166.
- 18 Chen Xiaowen, Ji Xiaoling. Influence of turbulence on spatial correlation properties of partially coherent annular beams[J]. Chinese J Lasers, 2009, 36(9): 2319-2325.
- 陈晓文, 季小玲. 湍流对部分相干环状光束空间相干性的影响[J]. 中国激光, 2009, 36(9): 2319-2325.
- 19 Chen Xiaowen, Ji Xiaoling. Influence of turbulence on the spreading of annular beams[J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(4): 2435-2443.
- 陈晓文, 季小玲. 湍流对环状光束扩展的影响[J]. 物理学报, 2009, 58(4): 2435-2443.
- 20 Zhang Shuai, Qiao Na, Zhang Bin, *et al.*. Propagation properties of annular beams in atmospheric turbulence[J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(11): 3103-3109.
- 张 帅, 乔 娜, 张 彬, 等. 环状光束在大气湍流中的传输特性[J]. 光学学报, 2010, 30(11): 3103-3109.
- 21 Dou L Y, Ji X L, W Zhu. Near-field and far-field spreading of partially coherent annular beams propagating through atmospheric turbulence [J]. Appl Phys B, 2012, 108(1): 217-229.
- 22 Dou L Y, Ji X L, Li P Y. Propagation of partially coherent annular beams with decentered field in turbulence along a slant path[J]. Opt Express, 2012, 20(8): 8417-8430.
- 23 Bagini V, Bagini R, Gori F, *et al.*. Propagation of axially symmetric flattened Gaussian beams[J]. J Opt Soc Am A, 1996, 13(7): 1385-1394.
- 24 Felck Jr J A, Morris J R, Feit M D. Time-dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere[J]. Appl Phys, 1976, 10(2): 129-160.
- 25 Smith F G. Atmospheric Propagation of Radiation[M]. Bellingham: SPIE Press, 1993.
- 26 Qian Xianmei, Zhu Wenyue, Rao Ruizhong. Phase screen distribution for simulating laser propagation along an inhomogeneous atmospheric path[J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(9): 6633-6639.
- 钱仙妹, 朱文跃, 饶瑞中. 非均匀湍流路径上光传播数值模拟的相位屏分布[J]. 物理学报, 2009, 58(9): 6633-6639.
- 27 Li X Q, Ji X L. Propagation characteristics of decentered annular beams through non-Kolmogorov turbulence[J]. J Opt Soc Am A, 2014, 31(1): 172-182.
- 28 Chen H, Ji X L, Li X L, *et al.*. Energy focusability of annular beams propagating through atmospheric turbulence along a slanted path[J]. Optics & Laser Technology, 2015, 71: 22-28.